Dimensión del Movimiento Browniano Plano.

Un ejemplo de movimiento browniano en $\mathbb{R}^2$ es el movimiento aleatorio que siguen algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo, polen en una gota de agua). Recibe su nombre en honor al escocés Robert Brown, biólogo y botánico que descubrió (sin poder explicar el motivo) éste fenómeno en 1827 y observó que pequeñas partículas de polen se desplazaban en movimientos aleatorios sin razón aparente.

Sin embargo, fue el estudio independiente de Albert Einstein en su artículo de 1905 (Über die con der molekularischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen/ Sobre el movimiento requerido por la teoría cinética molecular del calor de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario el que mostró la solución a los físicos, como una forma indirecta de confirmar la existencia de átomos y moléculas.

Metáfora intuitiva del movimiento browniano:

Considere una gran pelota de 10 metros de diámetro. Imagine esta pelota en un estadio de fútbol o cualquier otra área llena de gente. La pelota es tan grande que permanece por encima de la muchedumbre. Las personas aciertan a golpear el balón en diferentes momentos y direcciones de manera completamente aleatoria. Por ello, la pelota no sigue una trayectoria. Ahora, considere una fuerza ejercida durante un cierto tiempo; podemos imaginar 20 personas empujando para la derecha y 21 para la izquierda y que cada persona está ejerciendo cantidades de fuerza equivalentes. En este caso las fuerzas ejercidas por el lado izquierdo y por el lado derecho no están equilibradas, favoreciendo al lado izquierdo, por lo que la pelota se moverá ligeramente hacia la izquierda. Esta desproporción siempre existe, y es lo que causa el movimiento aleatorio. Si observáramos la situación desde arriba, de modo que no pudiéramos ver a las personas, veríamos la gran pelota como un objeto animado por movimientos erráticos.

Algunos conceptos probabilisticos

Una variable es aleatoria si su valor está determinado por el azar. En gran número de experimentos aleatorios es necesario cuantificar los resultados de modo que se asigne un número real a cada uno de los resultados posibles del experimento. De este modo se establece una relación entre elementos del espacio muestral asociado al experimento y números reales. Una variable aleatoria (v.a.) X es una función real definida en el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, Ω

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

La distribución de probabilidad de una v.a. X, también llamada función de distribución de X es la función $F_X(x)$, que asigna a cada evento definido sobre X una probabilidad dada por la siguiente expresión:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

y de manera que se cumplan las siguientes tres condiciones:
$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
Es continua por la derecha.
Es monótona no decreciente.

La distribución de probabilidad de una v.a. describe teóricamente la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio. Intuitivamente se trataría de una lista de los resultados posibles de un experimento con las probabilidades que se esperarían ver asociadas con cada resultado.

La función de densidad (FD), representada comúnmente como $f(x)$, se utiliza con el propósito de conocer cómo se distribuyen las probabilidades de un suceso o evento, en relación al resultado del suceso.

La FD es la derivada de la función de distribución de probabilidad $F_X(x)$, o de manera inversa, la función de distribución es la integral de la función de densidad:

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)dt.$$

Esperanza

La esperanza matemática (también llamada esperanza, valor esperado o media) de una variable aleatoria X, es el número $E(X)$ que formaliza la idea de valor medio de un fenómeno aleatorio.

Cuando la variable aleatoria es discreta, la esperanza es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso. Por lo tanto, representa la cantidad media que se .$^{\text{es}}$peraçomo resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces. Cabe decir que el valor que toma la esperanza matemática en algunos casos puede no ser esperado en el sentido más general de la palabra (el valor de la esperanza puede ser improbable o incluso imposible.)

Para una variable aleatoria continua, la esperanza se calcula mediante la integral de todos los valores y la función de densidad $f(x)$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

La esperanza tiene las siguientes propiedades:

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ (linealidad),
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Variaza

La varianza de una variable aleatoria es una medida de su dispersión definida como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media. Está medida en unidades distintas de las de la variable. Por ejemplo, si la variable mide una distancia en metros, la varianza se expresa en metros al cuadrado. La varianza tiene como valor mínimo 0.

Dada una variable aleatoria X con media $E(X)$, se define su varianza, $Var(X)$, como

$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$.

Desarrollando la definición anterior, se obtiene la siguiente definición alternativa (y equivalente):

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2)] \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

Algunas propiedades de la varianza son:

- $Var(X) \geq 0$
- $Var(aX + b) = a^2Var(X)$, siendo a y b números reales cualesquiera. De esta propiedad se deduce que la varianza de una constante es cero, es decir, Var(b) = 0.

- $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$ si las v.a. X e Y son independientes.

Distribución normal

Se dice que una v. a. continua X sigue una distribución normal de parámetros μ y σ y se denota $X\ N(\mu, \sigma)$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde μ es la media y σ^2 es la varianza.

Se llama distribución normal estándar a aquélla en la que sus parámetros toman los valores $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. En este caso la función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Usaremos la siguiente propiedad de v.a. normales,

dadas X e Y v.a. independientes y con distribución normal, entonces $X + Y$ también es una v.a. normal.

Teorema Central del Límite

El Teorema del límite central (TCL) establece que bajo ciertas condiciones (como pueden ser independientes e idénticamente distribuidas con varianza finita), la suma de un gran número de variables aleatorias se distribuye aproximadamente como una normal.

Lema de Borel Cantelli

Sea $E_n$una sucesión de eventos en algún espacio de probabilidad. El lema de Borel-Cantelli dice:

Si la suma de las probabilidades de E_n es finita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) < \infty,$$

entonces la probabilidad de que ocurra infinitas veces es 0, esto es,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0.$$

Definición de un proceso estocástico.

Sea $\mathbb{R}^n$ con la σ-álgebra de los borelianos y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es una función $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ para $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$; con valores en $\mathbb{R}^n$, tal que para cada $t \geq 0$, $X_t(\cdot)$ es una función medible de Ω en $\mathbb{R}^n$. Usualmente se asocia a la variable t con el tiempo.

Costrucción intuitiva en $\mathbb{R}$:

Consideremos una partícula que realiza un paseo aleatorio en la recta real, comenzando desde el 0. Supongamos que cada intervalos de tiempo pequeños τ, la partícula tiene que decidir si hacer un paso a la derecha o a la izquierda, para ello se tira una moneda equilibrada, si sale cara camina a la iquierda y si sale seca a la derecha. Es decir a tiempo τ la partícula esta en el 1 si salió seca y en el -1 si salió cara. Sea $B_\tau(t)$ la posición de la partícula a tiempo t. Una vez realizado este proceso debemos tender el pequeño intervalo de tiempo con el cual se realizan los saltos, esto es tomar τ cada vez mas pequeño. Con esto podría pasar que en un tiempo corto la partícula este en el infinito. Para evitar ello, y que el proceso este bien definido tomando limite en τ es que debemos multiplicar por una función de τ adecuada. Esta función es $\tau^{1/2}$ debido al Teorema Central del Límite(TCL) (lo anunciamos mas adelante).

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^{1/2} B_\tau(t) = B(t)$$

Tambien gracias al TCL es que $B(t)$ es una variable aleatoria con distribución normalcon media 0 y varianza 1.

Construcción en $\mathbb{R}^n$:

Para extenderlo a $\mathbb{R}^n$, basta con construir movimientos brownianos independientes en cada doordenada, y así obtenemos un MB en $\mathbb{R}^n$.

Definición del Movimiento Browniano

Definición 0.1. *Sea un proceso estocástico* $\{B(t),\ t \geq 0\}$*. Decimos que* $\{B(t),\ t \geq 0\}$ *es un Movimiento Browniano si cumple:*

- $B(0) = 0$.
- $\{B(t), t \geq 0\}$ *tiene incrementos independientes, es decir si* $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$*, entonces* $B_(t_0), B(t_1) - B(t_0), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ *son variables aleatorias independientes.*

- *$B(t+s) - B(s)$ tiene distribución gaussiana/normal con media 0 y varianza h para toda $t > 0$ y $s \geq 0$.*

- *$B(t)$ tiene trayectorias continuas, casi seguramente.*

Si en el tercer punto de la definición anterior, $h = 1$, llamamos al proceso Movimiento Browniano estándar.

Para la verificación de que existe un proceso estocástico como el que definimos arriba, ver [Dur], capítulo 7, teorema 1.3. Otra observación es que el último punto de la definición no es necesario pues el Teorema de Wiener [Dud] (capítulo 12, teorema 12.1.5) asegura que un proceso estocástico que cumple los puntos anteriores es continuo, casi seguramente.

Consecuencias:

- B es estacionaria, es decir, $B(t+h) - B(t)$ tiene distribución independiente de t.

- B no es diferenciable en ningún punto.

- Proyecciones sobre L_θ de un MB es MB.

Veamos el último item para un MB en R^2, $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$. La proyección de $X(t)$ sobre la recta L_θ (recta q pasa por el origen con ángulo θ con el eje x) se calcula intersecando L_θ con la recta perpendcular a L_θ que pasa por (x, y), esto da $(x\cos(\theta) + y\sin(\theta))(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Por otro lado $\lambda(\cos(\theta), \sin(\theta)) \to \lambda$ "manda" MB en MB. De esta forma para $t > 0$ y $h > 0$, las variables aleatorias $X_1(t+h) - X_1(t)$ y $X_2(t+h) - X_2(t)$ son idependientes y con distribución normal con media 0 y varianza h. Entonces los incrementos de las proyecciones sobre L_θ, dadas por $(X_1(t+h) - X_1(t))\cos(\theta) + (X_2(t+h) - X_2(t))\sin(\theta)$ son normalmente distribuidas con media 0 y varianza $h\cos^2(\theta) + h\sin^2(\theta) = h$

El siguiente lema presenta la Propiedad de escalamiento del Movimiento Browniano. Esta propiedad, intuitivamente, es que la trayectoria de un Movimiento Browniano hasta un tiempo $T > 0$, tiene las mismas propiedades estocásticas que la trayectoria hasta el tiempo 1, multiplicada por un factor que depende de T (en el sentido de multiplicar un escalar por un conjunto). Esto quiere decir que las trayectorias del Movimiento Browniano cortadas a diferentes tiempos son iguales estocásticamente excepto por un factor de escalamiento.

Lema 0.2 (Propiedad de escalamiento). *Sea $a > 0$ y $\{B(t),\ t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano. Entonces el proceso $B_a(t) = \{\sqrt{a}B(\frac{t}{a}),\ t \geq 0\}$ es también un Movimiento Browniano.*

Demostración. Notemos que debido a que $\{B(t), t \geq 0\}$ es continuo y tiene incrementos independientes, $\{B_a(t) \geq 0\}$ también es continuo y tiene incrementos independientes. Debido a que $B(t+s) - B(t)$ tiene distribución gaussiana para toda $t > 0$, $\sqrt{a}\,[B(\frac{t}{s} + \frac{s}{a}) - B(\frac{t}{a})] = B_a(t+s) - B_a(s)$ también tiene distribución gaussiana.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} E(B_a(t+s) - B_a(s)) &= E\Big(\sqrt{a}B\Big(\frac{t+s}{a}\Big) - \sqrt{a}B\Big(\frac{t}{a}\Big)\Big) \\ &= \sqrt{a}\,E\Big(B\Big(\frac{t}{s} + \frac{s}{a}\Big) - B\Big(\frac{t}{a}\Big)\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Denotemos por $Var(X)$ a la varianza de la variable aleatoria X. Entonces

$$\begin{aligned} Var(B_a(t+s) - B_a(s)) &= Var\Big(\sqrt{a}[B\Big(\frac{t}{a} + \frac{s}{a}\Big) - B\Big(\frac{t}{a}\Big)]\Big) \\ &= aVar\Big(B\Big(\frac{t}{a} + \frac{s}{a}\Big) - B\Big(\frac{t}{a}\Big)\Big) \\ &= a[h\Big(\frac{t}{a}\Big)] \\ &= ht. \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que $\{B_a(t),\ t \geq 0\}$ es un Movimiento Browniano. □

Observación

Supongamos que $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$ es un MB n-dimensional. Como $X_i(t+h) - X_i(t)$ tiene distribución independiente y normal $\forall i$. Si $[a_i, b_i]$ son intervalos entonces

$$P(X_i(t+h) - X_i(t) \in [a_i, b_i]) = (2\pi h)^{-1/2} \int_{a_i}^{b_i} e^{-\frac{x_i^2}{2h}} dx$$

Entonces si consideramos el paralelepípedo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ entonces

$$P(X(t+h) - X(t) \in E) = \prod_1^n (2\pi h)^{-1/2} \int_{a_i}^{b_i} e^{-\frac{x_i^2}{2h}} dx$$

$$= (2\pi h)^{-n/2} \int_E e^{-\frac{|x|^2}{2h}} dx$$

esto se generaliza a borelianos, en partícular a bolas $B(0,r)$ (y usando un cambio de coordenadas $r = |x|$)

$$P(|X(t+h) - X(t)| \leq r) = ch^{-n/2} \int_0^r r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2h}} dr$$

donde $c = (2\pi)^{-n/2} |\partial B(0,1)|_{n-1}$, usaremos estos cálculos en el siguiente lema.

Lema 0.3. *Sea $B : [0,1] \to R^n$ un MB. Dado $\lambda \in (0, 1/2)$, con probabilidad 1 se satisface*

$$|B(t+h) - B(t)| \leq b|h|^\lambda.$$

para h pequeño y la constante b solo depende de λ.

Demostración. Sea $h > 0$,

$$\begin{aligned} P(|B(t+h) - B(t)| > h^\lambda) &= ch^{-n/2} \int_{h^\lambda}^\infty r^{n-1} exp(\frac{-r^2}{2h}) dr \\ &= 2c \int_{h^{\lambda-1/2}}^\infty u^{n-1} exp(\frac{-u^2}{2}) du \\ &\leq C \int_{h^{\lambda-1/2}}^\infty e^u dr \\ &= Cexp(h^{\lambda-1/2}) \\ &\leq ch^2. \end{aligned}$$

Para el intervalo $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$, obtenemos la cota

$$P(\left|B\big((m-1)2^{-j}\big) - B\big(m2^{-j}\big)\right| > 2^{-j\lambda}) \leq c2^{-2j}.$$

Notamos $A_{j,m} = |B\big((m-1)2^{-j}\big) - B\big(m2^{-j}\big)\big| > 2^{-j\lambda}$.

Tomando el intervalo $[t, t+h]$ de forma binaria, queremos ver que el MB varia poco con probabilidad 1 en intervalos pequeños, es decir,

$$P(|B\big((m-1)2^{-j}\big) - B\big(m2^{-j}\big)\big| \leq 2^{-j\lambda} \text{ para todo } j \geq k \text{ para todo } 1 \leq m \leq 2^j) = 1$$

Para ello veamos que el complemento de este evento es bien pequeño,

$$P(A_{j,m},\ \text{para algun } j \geq k,\ \text{para algun } 1 \leq m \leq 2^j)$$
$$= P\Big(\cup_{j=k}^{\infty} \cup_{m=1}^{2^j} A_{j,m} \Big)$$
$$\leq \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^j} P(|B\big((m-1)2^{-j}\big) - B\big(m2^{-j}\big)\big| > 2^{-j\lambda})$$
$$\leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^j c 2^{-j} = c2^{-k+1}$$

Como esta cota es sumable en k, por Borell Cantelli obtenemos que $\cup_{j=k}^{\infty} \cup_{m=1}^{2^{-j}}$ $A_{j,m}$ ocurre finitas veces. Por lo tanto, existe K grande, tal que con probabilidad 1,

$$|B\big((m-1)2^{-j}\big) - B\big(m2^{-j}\big)\big| \leq 2^{-j\lambda}$$

para $j \geq K$. Falta ver que vale para cualquier intervalo de longitud h.

Sea $h > 0$, tal que $h < 2^{-K}$ y sea k el mínimo valor tal que $2^{-k} \leq h$. Usando una partición adecuada del intervalo obtendremos la cota buscada. Ubicamos un intervalo de longitud 2^{-k} en el centro del intervalo de longitud h, luego ubicamos a la derecha y a la izquierda dos intervalos de igual longitud 2^{-j} para algun j mas grande que k, y asi siguiendo con este procedimiento, hasta llegar a una distancia de longitud menor que ϵ de los bordes, donde este es el ϵ de la continuidad del MB. Con esta construcción obtenemos la cota buscada,

$$\begin{aligned} |B(t) - B(t+h)| &\leq |B(t) - B(t_1)| + |B(t_2) - B(t_3)| + ... + |B(t_n) - B(t+h)| \\ &\leq 2\epsilon + 2\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\lambda} \\ &\leq \frac{2h^{\lambda}}{1-2^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

Usando que dado $\epsilon < 2^{-j}$ para algún j grande, existen δ, t_1, t_n tal que $t_1 - t < \delta$ y $t + h - t_n < \delta$ y con ellos usar la definición de la continuidad del MB . $\square$

Teorema 0.4. *Con probabilidad 1, la trayectoria de un MB tiene dimensión Hausdorff igual a 2 para* $2 \leq n$.

Demostración. Probaremos sólo una desigualdad:

Para todo $0 < \lambda < 1/2$, $X : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ $(2 \leq n)$ satisface la condición de Hölder con proabilidad 1, entonces $\dim_H(X[0,1]) \leq (1/\lambda)\dim_H[0,1]$ y tomando λ tendiendo a $1/2$ se obtiene una desigualdad. □

Teorema 0.5. *Con probabilidad 1, el gráfico de un MB $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ tiene dimensión Hausdorff* $3/2$.

Demostración. Por la propiedad de Hölder y el corolario 11.2 a del Falconer, es claro que con probabilidad 1, el gráfico de X tiene dimensión a lo sumo $2 - \lambda$ para todo $\lambda < 1/2$. Ahora si hacemos λ tender a $1/2$ se tiene que la dimensión es menor o igual a $3/2$. □

Sin embrago con probabilidad 1, las trayectorias del MB en $\mathbb{R}^n$ tienen medida de Hausdorff 0. Esto es que en principio la dimensión de Hausdorff no es suficiente para ver el tamaño del MB. Pero para ello es que hay una medida un poco mas fina, y es la siguiente:

Sea $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función continua y creciente. Definimos,

$$H^h_\delta(F) = \inf\{\sum h(|U_i|) : \{U_i\} \text{ es un } \delta - \text{cubrimiento de } F\}$$

donde F es un sub-conjunto de $\mathbb{R}^n$. De aquí obtenemos la medida $H^h(F) = \lim_{\delta \to 0} H^h_\delta(F)$. Observemos que si $h(t) = t^s$, tenemos la definición usual de medida de Hausdorff.

Con un cálculo mas refinado puede verse que la trayectoria del MB tiene medida H^h positiva y finita para

$$h(t) = t^{\frac{3}{2}} \log\log(\frac{1}{t}) \text{ en el caso de } n \geq 3,$$

$$h(t) = t^2 \log(\frac{1}{t}) \log\log\log(\frac{1}{t}) \text{ en el caso de } n = 2.$$

¿Las trayectorias son curvas simples ?

Dada una función f decimos que x tiene multiplicidad k si $f(t) = x$ para k valores distintos de t.

El siguiente teorema nos dice cuando un MB se auto-interseca:

Teorema 0.6. *Dado un MB, $B(t) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$, con probabilidad 1,*

- $n = 2$, *hay puntos de multiplicidad k para todo $k \in \mathbb{N}$,*
- $n = 3$, *hay puntos con multiplicidad 2, pero no hay con multiplicidad 3,*
- $n \geq 4$, *no hay puntos multiples.*

Demostración. Una idea de la demostración puede verse en Falconer, Capítulo 16. $\square$