

Ariel Borky

Música y fractales

Lo que estoy dividiendo en 3 ~~partes~~ partes:

- 1) La primera parte tratará sobre una introducción a la relación que mantiene la música y la matemática, mostrando los conocimientos de los pitagóricos en la construcción de escalas a partir de subdividir convenientemente cuerdas vibrantes. Esta parte me dará el pie para luego comenzar un análisis de melodías utilizando herramientas de la música fractal.
- 2) La segunda parte tratará sobre aplicaciones de teoría y herramientas provenientes de la teoría de fractales matemática en el análisis musical. Se definirán algunos conceptos sobre dimensiones y atractores, y se analizarán algunos obras de composiciones Bach.
- 3) En la tercera parte introduciré un algoritmo para la composición de melodías, utilizando el concepto de generador de una estructura fractal. Luego iremos complejizando el algoritmo para lograr ampliar el alcance de este. Finalmente, y a modo de propuesta para continuar investigando el tema, se planteará una posible aplicación de este algoritmo para la composición de escalas de música (midi) simple.

Parte 1: La música y los pitagóricos.

Cada nota musical tiene una frecuencia (cantidad de veces que lo oído de sonido 'vibra' en un periodo de tiempo). Por ejemplo, si uno toca un LA central en el piano, este sonido se caracteriza por una frecuencia de 440 Hz (ciclo por segundo). Sin embargo, a la hora de componer con sonidos, las frecuencias no son tan importantes como la proporción entre ellas.

La estructura de una escala musical está determinada por la ϕ proporción entre las frecuencias de las notas que la componen; la elección de estas proporciones está dada por el gusto de 'consonancia' (las notas son consonantes si 'suena bien' al ser tocadas juntas, evento que sucede cuando las notas tienen ^{sonidos} armónicos en común).

↳ Armónicos: así como se ϕ disminuye la fuerza en los armónicos de las frecuencias que la componen, cada nota es resultado de varias notas que la componen. Estas notas se llaman armónicas.

El caso trivial de proporción es 1:1, que es el unísono. El segundo caso más simple es 2:1, llamado octava. Por ejemplo, como 440 Hz determine el LA, 880 Hz determina el LA una octava arriba.

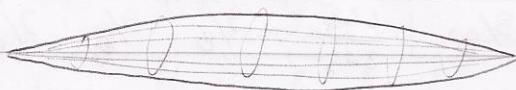
Matemáticamente, el problema de construir una escala es el de determinar un conjunto apropiado de proporciones para las notas que aparecen entre una nota y la nota correspondiente a 2:1. Desde un punto de vista matemático, el número de notas interpoladas es arbitrario, pero esto puede contrarrestar el concepto estético de la consonancia. En este punto es donde surgen los pitagóricos, al formar la

Aril Bortz

'escala pitagórica'.

La estrategia para construir esta escala es agarrar cualquier nota y construir las siguientes por proporciones de números enteros, en particular $2:1$ y $3:1$.

Consideremos una cuerda vibrando a una frecuencia t :



La misma cuerda puede vibrar a una frecuencia $2t$.



Luego la relación entre las notas resultantes es $2t:t$, o $2:1$, no octava.

La misma cuerda puede vibrar a $3t$:



El intervalo entre las notas de frecuencias $3t$ y $2t$ es $3/2$.

Entonces la frecuencia de la nota no octava abajo de $3t$ es $3/2t$, luego el intervalo entre la nota t y $3/2t$ es $3/2$.

Formamos la escala $\{t, 3/2t, 2t\}$. Si llamamos C a t y C' a $2t$, esta escala es

$$\begin{array}{ccc} C & G & C' \\ t & 3/2t & 2t \end{array}$$

Este procedimiento continúa con 2 intervalos:

- Entre C y G se forma un quinto perfecta, de proporción $3/2$.
- Entre G y C' se forma una cuerda perfecta, de proporción $2t:3/2t = 4/3$, y a la nota $\frac{4}{3}$ la llamamos F .

C	F	G	C'
+	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2

Iterando este procedimiento, poder obtener más notas. Del intervalo entre F y G obtenemos el tro, que es un intervalo de proporción $\frac{9}{8}$. Continuando, obtenemos

Nota	C	D	E	F	G	A	B	C'
Frecuencia (Hz)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Intervalo	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	

El intervalo $\frac{256}{243}$ se llama semitono.

Así obtenemos la escala pitagórica, o 'escala mayor'.

Al repetir el proceso comenzado desde cada una de las notas de la escala obtenida, obtenemos las 12 escalas mayores.

Nota para el interesado: la construcción de esta escala pitagórica, al iterar repetidas veces, termina llevando a ciertas contradicciones matemáticas debido a la no existencia de solución de algunas ecuaciones diofánticas de la forma $3^p = 2^q$. Sin embargo, como esto sucede al iterar varias veces, se llega a aproximaciones tan buenas que las ratios resultantes son indistinguibles para el oído humano.

Bibliografía recomendada: 'Music and Mathematics: From Pythagoras to fractals' - Fauriol, Flood y Wilbra

Ariel Botz

Parte 2: Análisis matemático de la música de Bach

Los siguientes resultados fueron tomados del paper "The Two-Part and Three-Part inventions of Bach: A mathematical analysis" por Jennifer Shopen de la escuela de arte de la universidad del este de Texas, que a su vez extrae resultados de los artículos 'Fractal Geometry of Music' de Kenneth J. y Andrew Hui y 'Fractals in music: Introductory Mathematics for Musical Analysis' por Gerd Mordden.

El artículo plantea explicar los conceptos de estructura fractal, dimensiones y estructuras extrañas al análisis musical.

Estructura fractal

En el nivel más simple, los fractales pueden ser generados a partir de un 'generador', y aplicados iterativa y sucesivamente. Algunos ejemplos de este tipo de fractales son la curva de Koch, el triángulo de Sierpinski y el conjunto de Cantor, entre otros.

En el artículo 'The Fractal Nature of Music', Larry Soder define la idea de que transformar un generador en un fractal mediante la repetición, traslación, rotación, contracción y expansión pueden ser comparados con las operaciones de transposición, retrogradación, aumentación, disminución e inversión, utilizadas en la composición por contrapunto. Soder sostiene que la idea de transformación utilizada para crear fractales es inherente a la composición en general musical que utiliza las técnicas previamente mencionadas. Entre estas técnicas se encuentran la contracción y la inversión.

El ~~con~~ ^{con} una ~~capricio~~ ^{capriccio} es lo cual los ~~vece~~ ^{vece} entre sucesivamente o determinado altura y tiempo, ~~hacer~~ ^{hacer} ~~hacer~~ ^{hacer} lo mismo melodía. El ~~con~~ ^{con} utilizo la ~~transposición~~ ^{transposición} y ~~retrogradación~~ ^{retrogradación} para ~~crear~~ ^{crear} una ~~capriccio~~ ^{capriccio} compleja a base de una melodía simple. La ~~inversión~~ ^{inversión} se basa en un ~~tema~~ ^{tema} frase o tema que se le utilizo repetidamente ~~veces~~ ^{veces}, aplicándole variaciones melódicas como:

- Aumentación (hacer la frase en una mayor cantidad de tiempo)
- Diminución (hacer la frase en una menor cantidad de tiempo)
- Inversión (hacer la melodía 'al revés')
$$\hookrightarrow I(L \uparrow) = \downarrow L$$
- Retrogradación (hacer la melodía de atrás para adelante).

En el anexo, se puede ver la partitura de Invention n.º 1 de Bach donde la frase S se divide en a y b y c derivado de b, y estas frases se aplican en el resto de la composición.

El concepto de inversión será esencial en la tercera parte de la clase, donde se presentará un algoritmo para generarlos.

Dimensión

Muchos fractales se construyen al dividir una figura y solamente retener cierta parte resultante. La dimensión Hausdorff de este tipo de fractales es fácil de calcular en general, y se obtiene de aplicar la fórmula

$$S = \ln(\text{total cantidad de partes retenidas}) / \ln(\text{cantidad de piezas en las que se dividió originalmente})$$

Aril Botz

§ Esto fórmula es fácil de ~~aplicar~~ aplicar que deduce del teorema 9.3 del libro 'Fractal Geometry' de Falconer.

Existen otras definiciones de dimensión. Entre ellas está la box-dimension, definida por Falconer como

$$\dim_{\text{box}} F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln \delta} \quad \text{con}$$

$N_{\delta}(F)$ = el mínimo número de conjuntos de diámetro δ que cubren a F .

= número de cajas de lado δ que interseccionan a F .

Existen dos conceptos de dimensión aplicados a la música, lo primero es cargo de Hsu y Kenneth, lo segundo de Modde.

Hsu: $D = \frac{\ln F - c}{-\ln i}$ con F = frecuencia del intervalo i entre notas sucesivas
 i = intervalo musical

'Melodic-line dimension': en el libro, Charles Modde propone

otra forma de medir la dimensión de una obra.

El método de Modde se basa en la box counting dimension, y utiliza gráficas mostrando la forma de la música, graficando altura dependiente del tiempo. Aplica una grilla al gráfico, se pueden contar las cajas para determinar la dimensión.

En su trabajo, Modda determinó una fórmula que mide la diferencia entre las alturas de los notes y contando el número de veces que se intersecciona por el gráfico. Los problemas que surgen de tener valores muy pequeños no existen, porque hay un mínimo de tiempo que puede durar cada note individualmente.

~~Resumen~~

Atracción: En el artículo 'Chaos and Ecology: Is mother nature a strange attractor?' Alan Hastings define al atractor como "un conjunto de puntos en el espacio-fase que representa un conjunto estable final dinámico del sistema", y tiene las siguientes características:

- Uno vez que el estado del sistema está en el conjunto, no se escapa.
- Todos los puntos del conjunto son atractivos.
- Cualquier trayectoria suficientemente cerca del atractor se aproxima al atractor.

Modda define 3 tipos de atractores:

- Fijo: un punto único al que tiende el movimiento, como el centro de un espiral.
- Periódico: el movimiento a un único punto, sino que oscila en un conjunto de puntos.
- Extraño: es un atractor periódico, pero las órbitas nunca se repiten exactamente.

Aplicación musical: Modda aplica el concepto de atractor al crear gráficos que consisten en cada note asignado un valor numérico, y se coloca un punto por cada note, con un valor representado en el eje vertical, y el número de

Ariel Body

la nota anterior en el eje horizontal, y mirar la punta según el orden que aparece las notas por las curvas nuevas. Como la música nunca se repite, esta gráfica muestra estructuras que definen al texto y tienen la forma de un abstracción caótica. Además, si la composición tiene cierto estilo armónico, las abstracciones tienen formas particulares, como en la 'en diagonal' (ver anexo 2).

En el anexo 3 hay algunas células de diseño y abstracciones.

Parte 3: Generación de algoritmo de composición

El objetivo es crear un algoritmo para componer melodías "masdard" (inmemorias) utilizando herramientas de la autosimilitud y el concepto de generador, para tratarlo que el resultado se mantenga en los parámetros de la música ~~occidental~~ occidental.

1) El primer paso es establecer ciertos parámetros generales de la melodía. Estos son:

- Matriz 'm' $\rightarrow \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{8}, \frac{3}{8}, \text{etc}$
- Tiempo 't'
- Cantidad de compases 'r'
- Nota máxima a y mínima b.
- Número aleatorio 'y' en base 10 con $0 < y < 1$

2) Ahora debemos establecer un generador g: esto es una sucesión de notas y sus tiempos que dura la cantidad de tiempo de la métrica elegida, pero más una nota adicional.

Sea F la función que a una nota x le asigna la subdivisión brindada por el generador, usando x como la

primera nota. Por definición, $F(\text{silencio}) = \text{silencio}$.

3) Leer todos los compases del tema respetando la estructura del generador, usando como primera nota del compás i la nota extra del compás $i-1$, $i \geq 1$.

4) Sea a_i el primer dígito de y_i . A partir del tiempo a_i , contar a_i notas distintas. En la nota a_i , aplicar F . Luego, sea a_{i+1} el segundo dígito de y_i , y a partir de a_i , contar a_{i+1} notas distintas. En la nota a_{i+1} , aplicar F . Iterar este procedimiento una vez, con

$$m = \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^k a_i < t.s \right\}, \text{ y}$$

$s = \text{tiempo por compás.}$

5) Al terminar la primera vuelta, volver a comenzar el proceso hasta que se produzca una repetición, y terminar el ciclo.

De esta forma, el vector $(m, t, t.s, a, b, y, f)$ determina la melodía minicamente.

En el Anexo ~~B~~ hay 2 melodías generadas por este método.

Preguntas abiertas:

1) ¿Qué peso se presta la presencia de más de un generador?

2) ¿Cuál es la 'música-línea' de estos?

Invention No. 1

J. S. Bach (1685-1750)

1 **A**

3 **B**

4

5

7 **C**

8

9

10

C:

C:

cadenza

cadenza

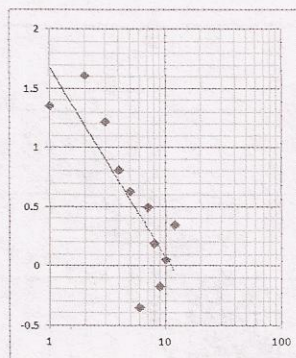
Two-Part Invention in C Major, No. 1, BWV 772 (1723)

Dimension, Madden

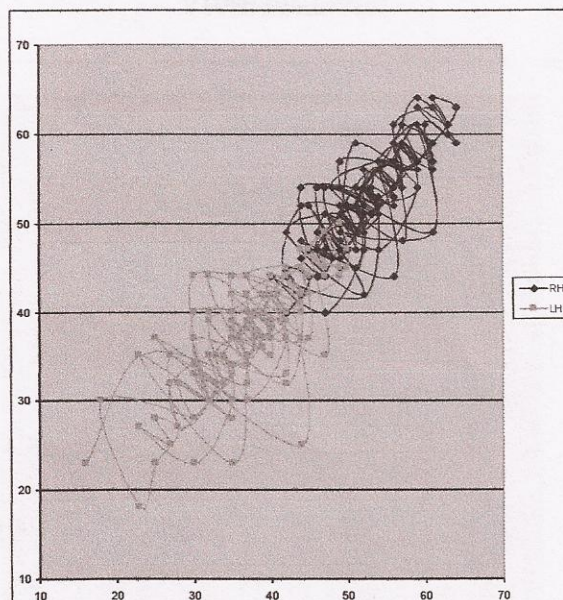
- Right hand: 1.1802
- Left hand: 1.2086

Dimension, Hsu

- Combined dimension: 1.6012



Attractor Plot

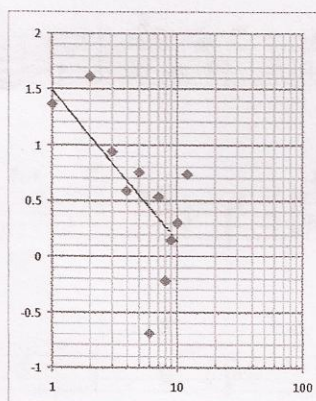
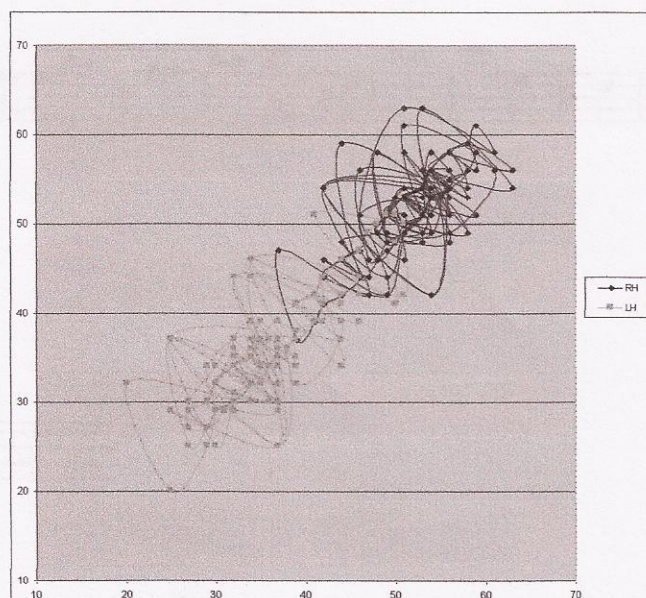


Two-Part Invention in D Major, No. 3, BWV 774 (1723)**Dimension, Madden**

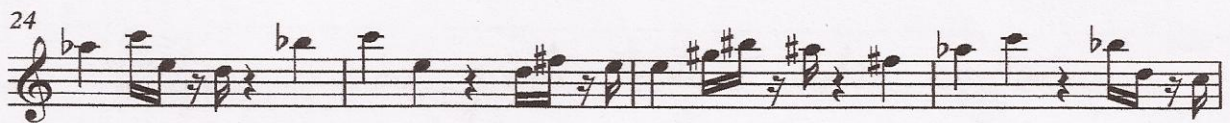
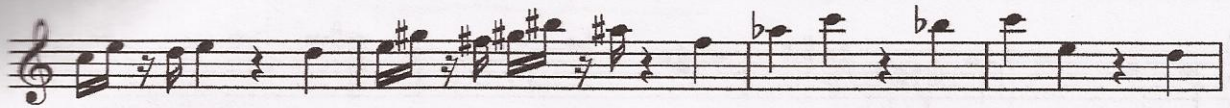
- Right hand: 1.2014
- Left hand: 1.2080

Dimension, Hsu

- Combined dimension: 1.3489

**Attractor Plot**

ANEXO 4



$$'y' = \pi - 3$$

