Invariancia de la Dimensión de Hausdorff bajo transformaciones bi-Lipschitz

Matías Data y Rodrigo Negri

Motivación: El siguiente trabajo estudia las dimensiónes de Hausdorff y Box y su comportamiento mediante la aplicación de ciertas funciones y también se estudia la dimensión del producto cartesiano. Se define una relación de equivalencia de conjuntos de igual dimensión vía funciones bilipschitz. Se prueban en este trabajo que existen para cada número real no negativo un conjunto de esa dimensión, y que para cada dimensión existen dos conjuntos no bilipschitz equivalentes. Se da una generalización de la construcción del conjunto de Cantor.

1. Preliminares

Definición 1.1: Sea $X\subseteq \mathbb{R}^n$ acotado definimos en diámetro de X como $\mid X \mid := \sup\{\| x-y \| : x,y \in X\}$.

Definición 1.2: Sea $X\subseteq \mathbb{R}^n$ $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección contable tal que $U_i\subseteq \mathbb{R}^n$, se dice un δ- cubrimiento de X si $\mid U_i| \leq \delta$ $\forall U_i$ $i \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \cup_{i\in\mathbb{N}} U_i$.

Definición 1.3: Sea $X\subseteq \mathbb{R}^n$ $H^s_\delta(X) := \inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mid U_i|^s : \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un δ-cubrimiento$\}$.

Definición 1.4: Sea $X\subseteq \mathbb{R}^n$ definimos la medida de Hausdorff s de X como $H^s(X) := \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(X)$

Por una cuestión de simplicidad dada $f : X \longrightarrow Y$, notaremos $f(X) := \{y \in Y : \exists x \in X \; y = f(x)\} = \{f(x) : x\in X\}$

Definición 1.5: Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función,$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ se dice que cumple la condición de hölder-α, o simplemente es hölder-α si $\exists c > 0$ tal que

$\| f(x) - f(y) \| \leq c \| x - y \|^\alpha \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $\alpha = 1$, se dice que la función es lipschitz. Definimos también las funciones bihölder si $\exists c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1 \| x - y \|^\alpha \leq \| f(x) - f(y) \| \leq c_2 \| x - y \|^\alpha$. En particular, si $\alpha = 1$ se dice que la función es bilipschitz.

Ejemplo: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transformación lineal, es lipschitz, pues si $x = (x_1, ..., x_n)$, entonces $\| f(x) \| \leq | x_1 | . \| f(e_1) \| + ... + | x_n | . \| f(e_n) \| \leq \max_{i=1,...,n} \{\| f(e_i) \|\}. \| x \|_1 \leq c. \| x \|$ y luego, $\| f(x) - f(y) \| = \| f(x - y) \| \leq c. \| x - y \|$.

Teorema 1.6: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función hölder-α, $\alpha > 0$ de constante $c > 0 \Rightarrow \forall s \geq 0 \ H^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha} H^s(X)$

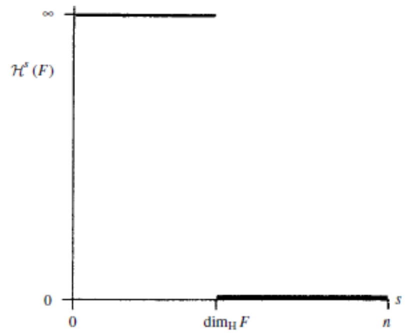
Demostración: Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un δ- cubrimiento de X, luego, como f es hölder-α $| f(X \cap U_i) | \leq c | X \cap U_i |^\alpha \leq c | U_i |^\alpha$, luego se sigue que $\{f(X \cap U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un $\varepsilon = c.\delta^\alpha$ cubrimiento de $f(X)$. Luego como elevar a una potencia respeta el orden, se sigue que $\sum_{i \in \mathbb{N}} | f(X \cap U_i) |^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i \in \mathbb{N}} | U_i |^s$ y luego concluimos que $H_\varepsilon^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha} H_\delta^s(X)$. Luego si $\delta \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$, y por lo tanto $H^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha} H^s(X)$.

⊠

Definimos ahora la Dimensión de Hausdorff. Aunque no entraremos en detalle sobre para que conjuntos de $\mathbb{R}^n$ la medida de Hausdorff y la dimensión estan bien definidas.

Definición 1.7: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $dim_H(X) = \inf\{s \geq 0 : H^s(X) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(X) = \infty\}$.

Observamos que si $dim_H(X) = s$, $H^s(X)$ es 0, finito y positivo, ó ∞. Si dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ graficamos $H^s(X)$ en función de s, obtenemos un gráfico de la forma:



Por otra parte, definimos la Dimensión Box, o de conteo de cajas, superior e inferior.

Definición 1.8: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado, y llamamos $N_\delta(X)$ al menor número de conjuntos de a lo sumo diámetro δ que son un cubrimiento de X.

$\overline{dim_B}(X) := \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln\delta}$ $\underline{dim_B}(X) := \liminf_{\delta\to 0} \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln\delta}$ Si el límite existe, luego definimos $dim_B(X) := \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln\delta}$

Del Teorema 1.6, se siguen varios corolarios:

Corolario 1.9: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$

$i)$ Si f es una hölder-$\alpha \Rightarrow dim_H(f(X)) \leq 1/\alpha . dim_H(X)$. En particular si es lipschitz, $dim_H(f(X)) \leq dim_H(X)$.

$ii)$Si f es una bihölder-α $\Rightarrow$ $dim_H(f(X)) = 1/\alpha . dim_H(X)$. En particular si es bilipschitz $dim_H(f(X)) = dim_H(X)$.

Demostración:

$i)$ Si $s > dim_H(X)$, luego por el Teorema 1.6, $H^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha} H^s(X) = 0$ Como la dimensión es el ínfimo de los s, tales que es cero, se sigue que $dim_H(f(X)) \leq s/\alpha \ \forall s > dim_H(X)$. Luego $dim_H(f(X)) \leq 1/\alpha . dim_H(X)$.

$ii)$ Basta observar que siendo bihölder-α la función f es inyectiva pues si $x \neq y \Rightarrow \| x-y \| > 0 \Rightarrow 0 < c_1 . \| x-y \|^\alpha \leq \| f(x)-f(y) \|$. Por lo tanto, restringiendome a la imagen, es biyectiva y tengo $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$. Sean $x, y \in f(X)$ $x = f(x_o)$ $y = f(y_o)$, siendo f hölder,

$c_1 \| x_o - y_o \|^\alpha \leq \| f(x_o) - f(y_o) \| \leq c_2 \| x_o - y_o \|^\alpha$, lo que implica

$c_1 \| f^{-1}(x) - f^{-1}(y) \|^\alpha \leq \| x-y \| \leq c_2 \| f^{-1}(x) - f^{-1}(y) \|^\alpha$, de donde se sigue que $1/c_2^{1/\alpha} \| x-y \|^{1/\alpha} \leq \| f^{-1}(x) - f^{-1}(y) \| \leq 1/c_1^{1/\alpha} \| x-y \|^{1/\alpha}$ y por lo tanto, f^{-1} es hölder-$1/\alpha$. Luego aplicando $i)$ a f obtenemos que $dim_H(f(X)) \leq 1/\alpha . dim_H(X)$ y aplicando $i)$ a f^{-1} obtenemos que $dim_H(X) = dim_H(f^{-1}(f(X))) \leq \alpha . dim_H(f(X))$. De estas dos desigualdades obtenemos que ${}^{1}/_{\alpha}.dim_H(X) \leq dim_H(f(X)) \leq {}^{1}/_{\alpha}.dim_H(X)$, de lo cual se sigue inmediatamente la igualdad deseada.

$\boxtimes$

Proposición 1.10: Supongamos que tenemos $f : X \longrightarrow Y$ tal que $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, bilipschitz, entonces el gráfico de f ,$Gr(f) := \{\overrightarrow{x} \in X \times Y : \overrightarrow{x} = (x, f(x))\}$ es de $dim_H(Gr(f)) = dim_H(X)$.

Demostración: Considero $\overline{f} : X \longrightarrow Gr(f)$, $\overline{f}(x) := (x, f(x))$, veamos que es bilipschitz. Es claro que es sobreyectiva. Por un lado tenemos que,

$\| \overline{f}(x) - \overline{f}(y) \| = \| (x, f(x)) - (y, f(y)) \| = \| (x - y, f(x) - f(y)) \| \leq |x - y| + |f(x) - f(y)| \leq (1 + c_2).|x - y|$.

Y por otro lado tenemos $\| \overline{f}(x) - \overline{f}(y) \| = \| (x - y, f(x) - f(y)) \| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.|x - y| + |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.(1 + c_1).|x - y|$.

Luego, $dim_H(Gr(f)) = dim_H(X)$. Se puede generalizar a $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ sin ningún problema salvo el notacional.

$\boxtimes$

Ahora, veremos que los resultados del corolario anterior, son válidos para la dimensión box, mostrando que las funciones bilipschitz son un invariante dimensiónal, lo cual es de suma importancia. Lo enunciamos cuando el límite es el superior, sin embargo con razonamientos análogos se obtienen los mismos resultados para la dimensión inferior.

Proposición 1.11: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado.

i) Si f es una hölder-$\alpha \Rightarrow \overline{dim_B}(f(X)) \leq {}^{1}/_{\alpha}.\overline{dim_B}(X)$. En particular si es lipschitz, $\overline{dim_B}(f(X)) \leq \overline{dim_B}(X)$.

*ii)*Si f es una bihölder-$\alpha \Rightarrow \overline{dim_B}(f(X)) = {}^{1}/_{\alpha}.\overline{dim_B}(X)$. En particular si es bilipschitz $\overline{dim_B}(f(X)) = \overline{dim_B}(X)$.

Demostración:

*i)*Si X puede ser cubierto por $N_\delta(X)$ conjuntos de diámetro a lo sumo δ, entonces, la imagen de cada uno de estos conjuntos vía f, es analogamente al razonamiento anterior, de diámetro a lo sumo $c.\delta^\alpha$. Luego se sigue que $\overline{dim_B}(f(X)) =$

$\limsup_{c\delta^\alpha\to 0}\frac{\ln(N_{c\delta^\alpha}(f(X)))}{-\ln(c\delta^\alpha)} \leq \limsup_{\delta\to 0}\frac{\ln(N_\delta(X))}{-\alpha\ln(\delta)-\ln(c)} = {}^1\!/\alpha.\limsup_{\delta\to 0}\frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln(\delta)} = {}^1\!/\alpha.\overline{dim_B}(X)$.

ii) Se utiliza un argumento similar al del Corolario 1.9 *ii*), y se obtiene el resultado análogo para las bihölder.

$\boxtimes$

2. Relación de equivalencia entre conjuntos vía funciones bilipschitz

Nuestro enfoque del problema nos llevo a la siguiente formulación:

Proposición 2.1: Sean $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos la siguiente relación, $X \backsimeq Y \iff \exists f: X \longrightarrow Y$ bilipschitz tal que $f(X) = Y$, osea sobreyectiva $\Rightarrow$La relación anterior, es de equivalencia.

Demostración: La demostración es muy simple, sin embargo la comentaremos dada la importancia del resultado en este trabajo.

Es reflexiva, osea $X \backsimeq X\ \forall X \subseteq \mathbb{R}^n$ pues la restricción $Id|_X : X \longrightarrow X$ de la funcion $Id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $Id(x) := x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ es bilipschitz, porque $\| Id(x) - Id(y) \| = \| x - y \|$.

Es simetrica, pues $X \backsimeq Y \iff \exists f : X \longrightarrow Y$ bilipschitz sobreyectiva, luego por lo observado anteriormente, es biyectiva, y por lo tanto inversible, y como vimos la inversa es bilipschitz, luego $Y \backsimeq X$.

Es transitiva, pues la composición de funciones bilipschitz, es bilipschitz: $\| g\circ f(x) - g\circ f(y) \| = \| g(f(x)) - g(f(y)) \| \leq c_g. \| f(x) - f(y) \| \leq c_g.c_f. \| x - y \|$, y analogamente se hace la cuenta para la acotación inferior.

$\boxtimes$

Observamos que el resultado anterior, puede generalizarse al siguiente hecho:

Corolario 2.2: $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ $X \simeq Y \Longleftrightarrow \exists f : X \longrightarrow Y$ bihölder sobreyectiva, es una relación de equivalencia. Sobreentendemos de ahora en adelante, que la función es sobreyectiva en casos similares (bihölder, o bilipschitz) pues nos interesa la imagen de la función.

La demostración es análoga a la anterior.

$\boxtimes$

La Proposición 2.1 es de suma importancia, ya que el Corolario 1.9 *ii)* y la Proposición 1.11 *ii)* nos dicen que si $X_\sim := \{Y \subseteq \mathbb{R}^n : X \backsimeq Y\}$, y sea $Y \in X_\sim \Rightarrow dim_H(X) = dim_H(Y)$ y $\overline{dim_B}(X) = \overline{dim_B}(Y)$. Esto nos dice que dado un conjunto de una dimensión, puedo construirme $2^{\aleph_o}$ conjuntos de la misma dimensión, pues como las transformaciones lineales (o afines) biyectivas en dimensión finita, son bilipschitz, luego si llamamos $\mathcal{F}_X = \{f : X \longrightarrow Y$, bilipschitz para algún $Y \subseteq \mathbb{R}^n\}$ tenemos que $2^{\aleph_o} = \sharp GL(\mathbb{R}^n) \leq \sharp \mathcal{F}_X \leq \sharp C(\mathbb{R}^n) = 2^{\aleph_o}$ donde $\sharp$ denota al cardinal del conjunto en cuestión. Podemos transladar el conjunto a $2^{\aleph_o}$ puntos en el espacio, y por lo tanto el resultado era bastante obvio. Pero sin embargo, esta es una muy buena forma de encontrar varios conjuntos de la misma dimensión.

Luego de establecer esta relación de equivalencia, evidentemente la primera pregunta que nos formulamos, fue la inversa. Es decir, dados dos conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, tales que $dim_H(X) = dim_H(Y)$ entonces,¿ $\exists f : X \longrightarrow Y$ bilipschitz? La respuesta en general es no. Esto se debe a que la relación anterior preserva varias propiedades más ademas de la dimensión de hausdorff, en particular, notamos que preserva cardinalidad, por lo tanto si tomamos un conjunto X de n elementos, y otro Y de m elementos en $\mathbb{R}^n$. Sabemos que ambos tienen dimensión de hausdorff cero, pero no existe ninguna biyección entre ambos por cardinalidad. También sabemos que ambos son de dimensión box superior cero, pues siendo finitos, $\exists \delta_o > 0$ tal que $\forall \delta < \delta_o N_\delta(X) = N_{\delta_o}(X) = \sharp X = n$, basta tomar $\delta_o = \min\{d(x_i, x_j) : x_i \neq x_j,\ x_i, x_j \in X\}$, y luego $\overline{dim_B}(X) = \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln(\delta)} = \limsup \frac{n}{-\ln(\delta)} = 0$, análogo para Y. Otro contraejemplo sería tomar el intervalo [0,1] y [0,1]$\sqcup$[2,3] ambos de dimensión hausdorff uno, de suponer que existe una $f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \sqcup [2,3]$ lipschitz, llegamos a un absurdo, pues si f es lipschitz en particular es un homeomorfismo, pues las funciones hölder son uniformemente continuas (dado α y c se toma $\varepsilon = c.\delta^\alpha$)y si f es hölder-α, f^{-1} es bi-hölder-$1/\alpha$, pero [0,1] es conexo y [0,1]$\sqcup$[2,3] no, es decir, no son homeomorfos. Ver [Fal97] páginas 143 a 146, para un ejemplo de un conjunto no bilipschitz equivalente al Cantor $^1/_3$, que además es topológicamente equivalente.

Motivado por estos ultimos resultados definimos luego el siguiente conjunto.

Definición 2.3: Sea $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definimos $\mathcal{H}_s := \{X \subseteq \mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$:$dim_H(X) = s\}$

Los contraejemplos encontrados anteriormente, nos llevan a formular el siguiente teorema:

Teorema 2.4: $\exists_n X, Y \subseteq \mathbb{R}^n : X_\sim \cap Y_\sim = \emptyset$ y $dim_H(X) = \overline{dim_B}(X) = \overline{dim_B}(Y) = dim_H(Y) = s$.

El enfoque posible para alcanzar este resultado, con las herramientas desarrolladas en el trabajo, sería poder demostrar la existencia de funciones bihölder $\forall \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ y probar que existen dos conjuntos no bihölder equivalentes. Sin embargo buscando estas funciones, nos encontramos que no son tan faciles de definir y que "no abundan en $\mathbb{R}^n$".

las funciones hölder son uniformemente continuas (dado α y c se toma $\varepsilon = c.\delta^\alpha$)

Observación 2.5: $\exists X, Y \subseteq \mathbb{R}^n : X$ e Y no son bihölder equivalentes.

Basta tomar el intervalo $[0,1]^n$ y $([0,1] \sqcup [2,3])^n$, y observar que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ las funciones bi-hölder son homeomorfismos, y por lo tanto no puede existir tal función pues un conjunto es conexo y el otro no.

Proposición 2.6: $f : X \longrightarrow Y$, tanto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ como $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos (con la topología heredada de $\mathbb{R}^n$, y $\mathbb{R}^m$) y conexos, entonces, f es bihölder $\Longleftrightarrow f$ es bilipschitz.

Demostración: La vuelta es trivíal, y para la ida, la observación crucial es observar que si f es hölder de exponente $\alpha > 1$, entonces f es constante. Este resultado se ve de la siguiente forma, sean x,$v \in \mathbb{R}^n$,$\| f(x+v) - f(x) \| \leq c \| (x+v) - x \|^\alpha = \| v \|^\alpha$. Siendo $\alpha > 1$, luego $\alpha - 1 > 0$, y sea $0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $0(v) = \overrightarrow{0}$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$, es una transformación lineal, tal que $\frac{\|f(x+v)-f(x)-0(v)\|}{\|v\|} \leq c. \| v \|^{\alpha-1}$

y en consecuencia $\lim\limits_{\|v\|\to 0} \frac{\|f(x+v)-f(x)-0(v)\|}{\|v\|} \leq \lim\limits_{\|v\|\to 0} c. \parallel v \parallel^{\alpha-1} = 0$, por lo tanto, f es diferenciable, y su diferencial es la transformación lineal 0, por lo tanto es constante. Usamos que X es abierto, para poder diferenciar, y que es conexo para concluir que la función es constante.

Luego de obtener este resultado pueden ocurrir dos cosas, f es bihölder de exponente $\alpha > 1$, en cuyo caso es constante y luego es absurdo pues no es inyectiva, o f es bihölder de exponente $\alpha < 1$, en cuyo caso $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, es bihölder de exponente $1/\alpha > 1$, y por lo tanto constante, absurdo. Luego $\alpha = 1$.

$\boxtimes$

El resultado es bastante más fuerte en el sentido de que si X tiene interior no vacio, no existe una bihölder de exponente $\alpha \neq 1$ definida en X, pues siendo bihölder es un homeomorfismo, tomando una bola abierta en X, que es conexa, su imagen es abierta y conexa, y por lo tanto, es constante en la bola, lo cual es absurdo. Esto nos dice que no podemos definir funciones bihölder razonablemente en $\mathbb{R}^n$, pero los conjuntos que estudiamos, no tienen abiertos en ningun lado por lo general.

Notamos por último sobre las bihölder, que no todo ha sido en vano, de hecho en contextos más generales estas funciones existen, y tienen un rol importante en la teória de la geometría fractal. Pues para demostrar esta proposición usamos por ejemplo, que el espacio es normado y completo (al diferenciar). Por ejemplo, sea $Id_{\{0,1\}} : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$ con la metrica usual de $\mathbb{R}$, es bihölder-α $\forall \alpha > 0$, pues $\mid f(1) - f(0) \mid = 1 = \mid 1 \mid^{\alpha}$.

Por lo tanto pensamos atacar el Teorema 2.4 con otras herramientas.

Mostraremos de manera constructiva que uno puede encontrar para cada dimensión de hausdorff $s \geq 0$, al menos un conjunto compacto sin puntos aislados y otro de la misma dimensión con algun punto aislado, lo que nos dira que no son homeomorfos y por lo tanto no bi-lipschitz equivalentes. Tambien probaremos el resultado analogo para dimensión box superior. Usaremos tres proposiciones de la teórica, que también están en [Fal03], y no las demostraremos.

Definición 2.7: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ definimos la densidad superior-s de X en x, como $\overline{D}^s(X,x) = \limsup_{r\to 0} \frac{H^s(X\bigcap B_r(x))}{(2r)^s}$

Definición 2.8: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ decimos que X es un s-set si X es tal que $0 < H^s(X) < \infty$

Proposición 2.9: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano, μ una distribución de masa en $\mathbb{R}^n$ $c > 0$ una constante, si $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} < c$ para todo $x \in X$, entonces $H^s(X) \geq \frac{\mu(X)}{c}$

Proposición 2.10: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un s-set, entonces $2^{-s} \leq \overline{D}^s(X,x) \leq 1$ para casi todo $x \in X$ (i.e. salvo un conjunto de medida cero de Hausdorff-s). Además, la función $\overline{D}^s(X,x)$ es medible borel, para ver la demostración de esto, ver [Fal86], páginas 22 a 23.

Proposición 2.11: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano tal que $0 < H^s(X) \leq \infty$, luego $\exists Y \subseteq X$ compacto tal que $0 < H^s(Y) < \infty$.

Proposición 2.12: Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, borelianos, tales que $H^s(X), H^t(Y) < \infty$ entonces, $\exists c > 0$ tal que $H^{s+t}(X \times Y) \geq c.H^s(X).H^t(Y)$

El caso general, $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ es similar.

Si $H^s(X) = 0$ o $H^t(Y) = 0$, ya esta, pues la medida es no negativa.

Supongamos que $0 < H^s(X), H^t(Y) < \infty$. Definimos la siguiente distribución de masa con soporte en $X \times Y$. Sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(I \times J) := H^s(I \cap X).H^t(J \cap Y)$.

Por la Proposición 2.10 tenemos que $\limsup_{r\to 0} \frac{H^s(X \bigcap B_r(x))}{(2r)^s} \leq 1$ para casi todo $x \in X$ y $\limsup_{r\to 0} \frac{H^s(Y \bigcap B_r(y))}{(2r)^s} \leq 1$ para casi todo $y \in Y$. Llamemos $X_o = \{x \in X : \limsup_{r\to 0} \frac{H^s(X \bigcap B_r(x))}{(2r)^s} > 1\}$ y analogamente,$Y_o = \{y \in Y :$

$\limsup_{r\to 0} \frac{H^s(Y \bigcap B_r(y))}{(2r)^s} > 1\}$. Notamos por la Proposición 2.10 que $H^s(X_o) = 0$ y $H^t(Y_o) = 0$, y los conjuntos X_o, Y_o son borelianos. Ahora, las bolas en $\mathbb{R}$ son simplemente intervalos de longitud $2r$, y $B_r(x,y) \subseteq B_r(x) \times B_r(y)$, luego tenemos que $\mu(B_r(x,y)) \leq \mu(B_r(x) \times B_r(y)) = H^s(X \cap B_r(x)).H^t(Y \cap B_r(y))$. Dividiendo por $2r^{s+t}$ y tomando limite obtenemos que

$\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x,y))}{2r^{s+t}} \leq \limsup_{r\to 0} \frac{H^s(X \cap B_r(x))}{2r^s}. \limsup_{r\to 0} \frac{H^t(Y \cap B_r(y))}{2r^t} \leq 1$ para casi todo $(x,y) \in X \times Y$, salvo para $(x,y) \in X_o \times Y$ o para $(x,y) \in X \times Y_o$. Sea $C = \{(x,y) \in X \times Y$ tales que $x \in X_o$ o $y \in Y_o\}$.

Por la Proposición 2.9, tenemos que $H^{s+t}(X \times Y) \geq H^{s+t}((X \times Y) \setminus C) \geq 2^{-(s+t)}.\mu((X \times Y) \setminus C) = 2^{-(s+t)}.\mu((X \setminus X_o) \times (Y \setminus Y_o)) =$

$2^{-(s+t)}.H^s(X \setminus X_o).H^t(Y \setminus Y_o) = 2^{-(s+t)}.H^s(X).H^t(Y)$ y por lo tanto, la Proposición 2.12 queda probada. Usamos que $(X \times Y) \setminus C = (X \setminus X_o) \times (Y \setminus Y_o)$, esto es una igualdad de conjuntos directa. Además, siendo X, X_o, Y, Y_o borelianos, $X \setminus X_o, Y \setminus Y_o$ se sigue que son borelianos, para poder usar la Proposición 2.9. Y también usamos que $H^s(X \setminus X_o) = H^s(X)$, pues $H^s(X) = H^s((X \setminus X_o) \cup X_o) \leq H^s(X \setminus X_o) + H^s(X_o)$, y por lo tanto $H^s(X \setminus X_o) \geq$

$H^s(X) - H^s(X_o) = H^s(X)$ y como $H^s(X \setminus X_o) \leq H^s(X)$ pues $X \setminus X_o \subseteq X$, tenemos la igualdad usada.

$\boxtimes$

Proposición 2.13: Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$, borelianos, entonces $dim_H(X \times Y) \geq dim_H(X) + dim_H(Y)$

Demostración: sean $s < dim_H(X)$, $t < dim_H(Y)$ luego $H^s(X) = \infty$, $H^t(Y) = \infty$ y por la Proposición 2.11 sean $X_o \subseteq X$, $Y_o \subseteq Y$ compactos (en particular borelianos) tales que $0 < H^s(X_o) < \infty$ $0 < H^t(Y_o) < \infty$. Por la Proposición 2.12 sabemos que $H^{s+t}(X \times Y) \geq H^{s+t}(X_o \times Y_o) \geq c.H^s(X_o).H^t(Y_o) > 0$. Luego $dim_H(X \times Y) \geq s + t$ $\forall s, t$ tales que $s < dim_H(X)$, $t < dim_H(Y)$, por lo tanto, $dim_H(X \times Y) \geq dim_H(X) + dim_H(Y)$.

$\boxtimes$

Proposición 2.14: Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$, luego $dim_H(X \times Y) \leq dim_H(X) + \overline{dim_B}(Y)$

Demostración: Lo probaremos para $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, el caso general es similar. Sea $s > dim_H(X)$, $t > \overline{dim_B}(Y)$. Existe un $\delta_o > 0$, tal que Y puede cubrirse con $N_\delta(Y) \leq \delta^{-t}$ intervalos de longitud δ, $\forall \delta \leq \delta_o$, esto se sigue de la definición de $\overline{dim_B}(Y)$, pues para todo δ menor que algún δ_o vale $t > \overline{dim_B}(Y) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln(N_\delta(Y))}{-\ln(\delta)}$, Sea $\varepsilon = t - \overline{dim_B}(Y)$ luego por ser limite superior existe $\delta_o \geq 0$ / $\forall \delta \leq \delta_o$ $\frac{\ln(N_\delta(Y))}{-\ln(\delta)} < \overline{dim_B}(Y) + \varepsilon = t \Rightarrow N_\delta(Y) \leq \delta^{-t}$. Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un δ-cubrimiento de X, tales que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mid U_i \mid^s < 1$, esto también lo puedo encontrar por la definición de $dim_H(X)$, pues como $s > dim_H(X)$ $H^s(X) = 0$. Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $\{U_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$un cubrimiento de Y, por $N_{|U_i|}(Y)$ intervalos de longitud $\mid U_i \mid$. Luego $U_i \times Y$ es cubierto por $N_{|U_i|}(Y)$ "rectangulos" $\{U_i \times U_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de lado $\mid U_i \mid$. Por lo tanto

$H^{s+t}_{\sqrt{2}.\delta}(X \times Y) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mid U_i \times U_{i,j} \mid^{s+t} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} N_{|U_i|}(Y).2^{(s+t)/2}. \mid U_i \mid^{s+t} \leq 2^{(s+t)/2}. \sum_{i \in \mathbb{N}} \mid U_i \mid^{-t} \mid U_i \mid^{s+t} = 2^{(s+t)/2}. \sum_{i \in \mathbb{N}} \mid U_i \mid^s \leq 2^{(s+t)/2}$.

Donde el $2^{(s+t)/2}$ sale del diámetro del rectangulo con respecto a su lado.

Haciendo tender $\delta \to 0$, luego $H^{s+t}(X \times Y) < \infty$ y por lo tanto para todo $s > dim_H(X)$, $t > \overline{dim_B}(Y)$ tenemos que $dim_H(X \times Y) \leq s + t$ y luego $dim_H(X \times Y) \leq dim_H(X) + \overline{dim_B}(Y)$.

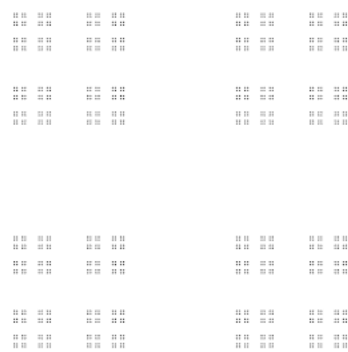
$\boxtimes$

Corolario 2.15: Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ tales que $dim_H(Y) = \overline{dim_B}(Y)$, entonces $dim_H(X \times Y) = dim_H(X) + dim_H(Y)$.

Demostración: Basta observar que $dim_H(X) + dim_H(Y) \leq dim_H(X \times Y) \leq dim_H(X) + \overline{dim_B}(Y) = dim_H(X) + dim_H(Y)$.

$\boxtimes$

Por ejemplo, el siguiente dibujo aproxima al conjunto de cantor 1/3 en producto cartesiano con si mismo:



Teorema 2.16: Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ entonces $\overline{dim_B}(X \times Y) \leq \overline{dim_B}(X) + \overline{dim_B}(Y)$

Demostración: Lo probaremos para $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, el caso general es similar. Si X es cubierto por $N_\delta(X)$ conjuntos de diametro menor que δ que notamos $\{U_i\}_{i=1}^{N_\delta(X)}$, y analogamente para Y tengo $N_\delta(Y)$, y notamos $\{V_j\}_{j=1}^{N_\delta(Y)}$, entonces $\{U_i \times V_j\}_{i,j=1}^{N_\delta(X).N_\delta(Y)}$ claramente cubre a $X \times Y$ y es un $\sqrt{2}.\delta$ cubrimiento del mismo. Entonces $N_{\sqrt{2}\delta}(X \times Y) \leq N_\delta(X).N_\delta(Y)$ implica que $\ln(N_{\sqrt{2}\delta}(X \times Y)) \leq \ln(N_\delta(X).N_\delta(Y)) = \ln(N_\delta(X)) + \ln(N_\delta(Y))$ y luego $\overline{dim_B}(X \times Y) = \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\ln(N_{\sqrt{2}\delta}(X \times Y))}{-\ln(\sqrt{2}.\delta)} \leq \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln(\sqrt{2}.\delta)} + \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(Y))}{-\ln(\sqrt{2}.\delta)} = \overline{dim_B}(X) + \overline{dim_B}(Y)$.

Ahora usaremos otro teorema y un corolario de la teórica que no demostraremos para calcular la dimensión de ciertos conjuntos, que llamaremos conjuntos uniformes de Cantor:

Teorema 2.17: Si $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ son similaridades contractivas, osea $\| \varphi_i(x) - \varphi_i(y) \| = c_i. \| x - y \| \forall i = 1, ..., n$, si A es el compacto atractor de las similaridades, que existe y es único, y $\varphi_i(A) \cap \varphi_j(A) = \emptyset$ si $i \neq j$ luego sea $s : \sum_{i=1}^n c_i^s = 1 \Rightarrow 0 < H^s(A) < +\infty$ y $dim_H(A) = \overline{dim_B}(A) = s$.

Corolario 2.19: Bajo las mismas hipotesis, sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\varphi(K) := \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(K)$, $\varphi(K) \subseteq K$, entonces si A es el atractor, $A \subseteq K$.

Construiremos los conjuntos uniformes de Cantor de la siguiente forma. Sea $n \geq 2$ $n \in \mathbb{N}$, y sea $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 < r < 1/n$.

Sea $\varphi_i(x) := r.x + a_i$ las $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ son similaridades contractivas, y los $\{a_i\}_{i=1}^n$ tales que $a_i = \frac{(i-1)}{n-1}.(1-r)$ los a_i fueron elegidos de forma tal que todos queden uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 1]$, es decir, que la distancia entre $\varphi_i([0, 1])$ y $\varphi_{i+1}([0, 1])$ sea igual para todo $i = 1, ..., n$. Sea C el conjunto atractor. Notamos que $\varphi([0, 1]) \subseteq [0, 1]$, y por el Corolario 2.19, luego $C \subseteq [0, 1] = E_0$. Falta ver que $\varphi_i(C) \cap \varphi_j(C) = \emptyset$, pero como $C \subseteq [0, 1]$, si mostramos que $\varphi_i([0, 1]) \cap \varphi_j([0, 1]) = \emptyset$ si $i \neq j$ luego $\varphi_i(C) \cap \varphi_j(C) \subseteq \varphi_i([0, 1]) \cap \varphi_j([0, 1]) = \emptyset$. Y $\varphi_i([0, 1]) \cap \varphi_j([0, 1]) = \emptyset$ es evidente, de la definición de las φ_i. Luego, por el Teorema 2.17, $\sum_{i=1}^n r^s = n.r^s = 1$ y por lo tanto, $s. \ln(r) = \ln(1/n) = -\ln(n)$, y luego $s = \frac{\ln(n)}{-\ln(r)}$ y $dim_H(C) = \overline{dim_B}(C) = \frac{\ln(n)}{-\ln(r)}$. Eligiendo n y r podemos obtener cualquier valor para la dimensión entre 0 y 1, pues fijado n, (por ejemplo $n = 2$), tomando $r = 1/n$, $\frac{\ln(n)}{-\ln(1/n)} = 1$ y por lo tanto, puedo tomar cualquier valor entre 0 y 1 (estrictamente).

Usando el Corolario 2.15 más inducción, dado $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, tomando un $n \in \mathbb{N}$ $n > s$, sea C_o un conjunto uniforme de cantor de dimensión $s/n < 1$ y haciendo el producto cartesiano de C_o n-veces, obtenemos $C = C_o \times ... \times C_o$, tal que $dim_H(C) = n.s/n = s$.

Corolario 2.19: Si X, Y son tales que $\overline{dim_B}(X) = dim_H(X)$, $\overline{dim_B}(Y) = dim_H(Y)$ entonces $\overline{dim_B}(X \times Y) = \overline{dim_B}(X) + \overline{dim_B}(Y)$.

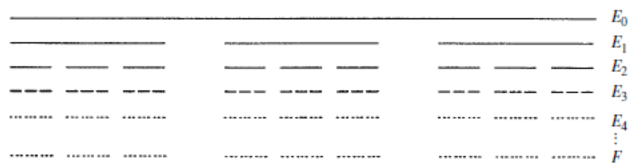
Demostración: Basta observar que bajo estas hipotesis $\overline{dim_B}(X \times Y) \geq dim_H(X \times Y) = dim_H(X) + dim_H(Y) = \overline{dim_B}(X) + \overline{dim_B}(Y)$. La otra cota vale en general.

Luego usando este corolario anterior, sabemos que el conjunto C construido es de dimensión $dim_H(C) = \overline{dim_B}(C) = s$

3. Caracterización de los conjuntos uniformes de Cantor

Definición 3.1: Decimos que un conjunto es un conjunto uniforme de Cantor (n, r), si $n \geq 2$ $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $0 < r < 1/n$, $C_{(n,r)}$ es el atractor de las $\varphi_i(x) = r.x + a_i$ $i = 1, ..., n$ tales que $a_i = \frac{(i-1)}{n-1}.(1-r)$.

Un ejemplo de un conjunto uniforme de Cantor es el siguiente, tomando $n = 3$, y $r = 4/15$ obtenemos el siguiente dibujo:



Proposición 3.2: Sea C el atractor de las $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ mencionadas anteriormente entonces, $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} E_n$, si llamamos $E_n := \varphi^n(E_0)$.

Demostración: Escribamos un intervalo arbitrario de $E_m = \varphi^m(E_0)$, estos intervalos, quedan determinados por la elección en cada paso de un φ_i. Con una cuenta simple se obtiene que $\varphi_{i_m} \circ ... \circ \varphi_{i_1}([0,1]) = [\sum_{k=1}^{m} r^{m-k}.a_{i_k}, r^m + \sum_{k=1}^{m} r^{m-k}.a_{i_k}]$, ahora veamos que si tomamos un intervalo fijo de E_{m+1} está contenido en algúno de estos intervalos del E_m. El intervalo será $\varphi_{j_{m+1}} \circ ... \circ \varphi_{j_1}([0,1]) = [\sum_{k=1}^{m+1} r^{m+1-k}.a_{j_k}, r^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} r^{m+1-k}.a_{j_k}] =$

$= [r^m.a_{j_1} + \sum_{k=2}^{m+1} r^{m+1-k}.a_{j_k}, r^m.(a_{j_1}+r) + \sum_{k=2}^{m+1} r^{m+1-k}.a_{j_k}]$, y como $r^m.a_{j_1} < r^m$, y $r^m.(a_{j_1}+r) \leq r^m$ pues $a_{j_1} + r \leq 1$, se sigue que,$\varphi_{j_{m+1}} \circ ... \circ \varphi_{j_1}([0,1]) \subseteq [\sum_{k=2}^{m+1} r^{m+1-k}.a_{j_k}, r^m + \sum_{k=2}^{m+1} r^{m+1-k}.a_{j_k}]$, que es algúno de los intervalos de E_m. Esto muestra que $E_{m+1} = \varphi(E_m) \subseteq E_m$, y por lo tanto, hemos probado que $C \subseteq E_m \forall m \in \mathbb{N}$, y luego $C \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Veamos que $C \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} E_n$, supongamos que $\exists x_o \in (\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} E_n) \setminus C$, pero, como C es compacto, entonces $\exists \varepsilon > 0$, tal que $C \subseteq (\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} E_n) \setminus B_\varepsilon(x_o)$. Pero como $x_o \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} E_n$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $x_o \in \varphi_{i_{n_o}} \circ ... \circ \varphi_{i_1}([0,1])$ y $| \varphi_{i_{n_o}} \circ ... \circ \varphi_{i_1}([0,1]) | < \varepsilon$. Por lo tanto, sea $x \in C$, luego $\varphi_i(x) \in C$ $\forall i = 1, ..., n$, por inducción $\varphi_{i_{n_o}} \circ ... \circ \varphi_{i_1}(x) \in C$, pero $\varphi_{i_{n_o}} \circ ... \circ \varphi_{i_1}(x) \in B_\varepsilon(x_o)$, y esto es absurdo pues $C \cap B_\varepsilon(x_o) = \emptyset$.

$\boxtimes$

Notamos que los conjuntos de Cantor son compactos y perfectos (acabamos de usarlo en la demostración) y, por lo tanto, no tienen puntos aislados.

Como probamos que existe para cada dimensión de hausdorff, un conjunto compacto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sin puntos aislados, entonces uno puede construir otro conjunto que no puede ser bilipschitz equivalente agregandole un punto aislado y viendo que eso no afecta la dimensión.

Consideramos la bola de centro $\overrightarrow{0}$ y radio r donde $B = \bar{B}_r(\overrightarrow{0})$ es tal que $X \subseteq B$. Como X es compacto esto se puede hacer. Sea $n_o > r$, consideramos el punto $x := (n_o, 0, ..., 0)$, como es un punto, es cerrado, y luego un boreliano. Luego $X \sqcup \{x\}$ tiene un punto aislado, y por lo tanto no es bilipschitz equivalente a X ya que x un punto de acumulación, vía una función bilipschitz, $f(x)$, es un punto de acumulación, pues $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \parallel x - y \parallel < \delta \Rightarrow \parallel f(x) - f(y) \parallel < \varepsilon$, y si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \ : \ x_n \longrightarrow x$, entonces $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Falta ver que $dim_H(X \sqcup \{x\}) = dim_H(X) = s$.

Ahora $H^t(X \sqcup \{x\}) = H^t(X) + H^t(\{x\}) \ \forall t \geq 0$, pues son borelianos disjuntos. Y como $dim_H(\{x\}) = \inf\{s \geq 0 : H^s(\{x\}) = 0\} = 0$ pues es un punto, se sigue que $dim_H(X \sqcup \{x\}) = \inf\{t \geq 0 : H^t(X \sqcup \{x\}) = 0\} = \inf\{t \geq 0 : H^t(X) + H^t(\{x\}) = 0\} = s$ pues $H^t(\{x\}) = 0 \ \forall t > 0$. Si $t < s \Rightarrow \infty = H^t(X) \leq H^t(X \sqcup \{x\})$, si $t > s \Rightarrow H^t(X) = 0 \Rightarrow H^t(X \sqcup \{x\}) = 0$, esto muestra que efectivamente, es el ínfimo.

Esto también nos servira para probar el mismo resultado en la dimensión box superior pues $\exists \delta_o > 0$ tal que $\forall \delta < \delta_o \ N_\delta(X \sqcup \{x\}) = N_\delta(X) + 1$, basta tomar $\delta_o = d(x, X)$. Además sabemos que en este caso, $N_\delta(X) \longrightarrow \infty$ si $\delta \longrightarrow 0$, pues sino, $\overline{dim_B}(X) = 0$, que no es el caso, el caso de dimensión cero ya lo excluimos. Luego, $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \delta > 0$ tal que $N_\delta(X) > n$, basta ver que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$, y esto sale usando el criterio de la derivada, a $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$, $(\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, luego $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(\ln(x))'} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$, y obtenemos el resultado deseado. Ahora usamos lo anterior y,

$$\overline{dim_B}(X \sqcup \{x\}) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln(N_\delta(X)+1)}{-\ln(\delta)} = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln(N_\delta(X)+1)}{\ln(N_\delta(X))} . \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln(\delta)} =$$
$$= \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln(N_\delta(X)+1)}{\ln(N_\delta(X))} . \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln(\delta)} = 1 . \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln(\delta)} =$$
y $\limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln(N_\delta(X))}{-\ln(\delta)} = \overline{dim_B}(X)$.

De esta forma queda demostrado el teorema 2.4.

$\boxtimes$

Preguntas abiertas: Dos preguntas interesantes, pero demasiado dificiles, es la de caracterizar a los conjuntos bilipschitz equivalentes, y la de caracterizar las funciones que preservan la dimensión hausdorff y box. Para esta última pregunta, encontramos por ejemplo que en [Alb08] se prueba que todas las funciones de distribución estrictamente crecientes absolutamente continuas, preservan la dimensión hausdorff. Otra pregunta interesante es encontrar para cada dimension Haussdorf dos conjuntos topologicamente equivalentes no bi-lipschitz equivalentes, para esta conjeturamos que es cierta, sin embargo no sabemos como probarla.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecerle a Germán Stefanich, Leopoldo Taravilse, por sus valiosos comentarios, a Juan Pablo Darago por su gran ayuda para la edición, y a Ursula Molter por guiarnos en la construcción de este trabajo.

REFERENCIAS

[Fal86] Kenneth J. Falconer, *The geometry of fractal sets,*Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Fal03] Kenneth J. Falconer, *Fractal geometry, second ed.*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, 2003, Mathematical foundations and applications.

[Fal97] Kenneth J. Falconer, *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, 1997.

[Bar93] Michael F. Barnsley, *Fractals Everywhere, second ed.*, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 1993.

[Alb08] Sergio Albeverio, Mykola Pratsiovytyi y Grygoriy Torbin, *Transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension*,Central European Journal of Mathematics, Volume 6, Number 1, 119-128, 2008.