

Notas sobre la clase del
02/12/11 : Exponentes de
Hölder y dimensión box de
una clase de funciones
fractales auto-afines .

Geometría fractal
2^{do} cuatrimestre de 2011

Pablo Casal

Introducción

Dado un conjunto finito de puntos en el plano, es posible encontrar una función fractal que pase por esos puntos. En este trabajo nos restringiremos a estudiar una clase particular de estas funciones, construidas a través de contracciones lineales. Veremos que, moviendo ciertos parámetros que aparecen en la construcción, podemos lograr que la dimensión box del gráfico de la función sea cualquier número estrictamente entre 1 y 2. Además, veremos que podemos elegir los parámetros de manera que el exponente Hölder, o el exponente Hölder en casi todo punto, sea cualquier número en el $(0,1)$.

Definiciones preliminares

Dada una colección de puntos en el plano, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, que, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $x_0 = 0$ y $x_n = 1$, construimos una curva auto-afín, que pasa por dichos puntos, de la siguiente manera:

Para cada $i=0,1,\dots,n-1$, definimos la transformación afín $\varphi_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\varphi_i(x,y) = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_i^0 \\ r_i^1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde

$$0 < a_i < c_i < 1 \quad (2)$$

y que además verifique

$$\varphi_i(x_0, y_0) = (x_i, y_i) \quad (3)$$

y

$$\varphi_i(x_n, y_n) = (x_{i+1}, y_{i+1}) \quad (4)$$

Supongamos que cada φ_i es una contracción. Luego, existe un único compacto $E \subseteq \mathbb{R}^2$, no vacío, tal que

$$E = \bigcup_{i=0}^{n-1} \varphi_i(E) \quad (5)$$

Además, por las condiciones (3) y (4), E contiene a los puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. Veremos que, en efecto, E es el gráfico de una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Por conveniencia, tomaremos $I = [0,1]$.

Obs. Cada ϕ_i manda líneas verticales en líneas verticales, pues si $x=c$, $\phi_i(c, y) = (\underbrace{a_i c + r_i^0}_{cte.}, b_i c + c_i y + r_i^1)$.

Esto induce una transformación ψ_i de I , dada por $\psi_i(x) = a_i x + r_i^0$ (la coordenada x de la ϕ_i).

Notar que los ψ_i , $i=0, \dots, n-1$, son contracciones ($a_i < 1$) y que $I = \bigcup_{i=0}^{n-1} \psi_i(I)$.

Veamos algunas definiciones y fijemos notación.

Notaremos $\Sigma_n = \{0, \dots, n-1\}^{\mathbb{N}} = \{X = x_1 x_2 \dots : x_i \in \{0, \dots, n-1\}\}$

a las sucesiones cuyos términos son $0, \dots, n-1$; y

$\sigma : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ el shift $\sigma(x_1 x_2 x_3 \dots) = x_2 x_3 \dots$

Una sucesión finita $x_1 \dots x_m$ se notará X_m . La composición $\phi_{x_1} \circ \phi_{x_2} \circ \dots \circ \phi_{x_m}$ se escribirá ϕ_{X_m} , y análogamente,

$\psi_{X_m} = \psi_{x_1} \circ \dots \circ \psi_{x_m}$; $I_{X_m} = \psi_{X_m}(I)$, y $E_{X_m} = \phi_{X_m}(E)$.

Al conjunto I_{X_m} lo llamaremos "m-intervalo" y los

conjuntos E_{X_m} y $C_{X_m} = \{Z \in \Sigma_n : Z_m = X_m\}$.

(las sucesiones que coinciden en los primeros m dígitos) serán "m-cilindros".

Es fácil ver que, dada una sucesión $X = x_1 \dots x_m \dots \in \Sigma_n$, $\text{diam}(I_{x_m})$ y $\text{diam}(E_{x_m})$ tienden a cero cuando $m \rightarrow \infty$.
Luego, existen $x \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\{x\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_{x_m} \quad \text{y} \quad \{(x, y)\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} E_{x_m}$$

Definimos $\pi : \Sigma_n \rightarrow I$ como $\pi(X) = x$.

Notar que $\psi_j(\pi(x_1, x_2, \dots)) = \pi(j, x_1, x_2, \dots)$. La notación de I_{x_m} y E_{x_m} se eligió de manera que $\pi(C_{x_m}) = I_{x_m}$ y que E_{x_m} sea la parte del gráfico de f que está por encima del intervalo I_{x_m} .

Se puede ver que π es suryectiva, y más aún: es casi ~~sea~~ inyectiva, en el sentido de que la inyectividad falla en un conjunto numerable de I . Esto tiene que ver con que la familia de intervalos $\{I_i\}$ tiene la propiedad de que los interiores de los intervalos son disjuntos dos a dos ~~entre ellos~~.

ie: $\text{int}(I_i) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset$ si $i \neq j$, y esto implica por inducción que para cada m , la familia

$\{I_{x_m}\}$ tiene la misma propiedad. Luego,

si $x \in I_{x_m} \cap I_{z_m}$, entonces x es un extremo

del intervalo I_{x_m} y de I_{z_m} . Luego, hay a lo sumo numerables puntos en I asociados a mas de una sucesión de Σ_n (de hecho, cada uno ^{de ellos} está asociado exactamente a dos sucesiones, de la misma manera que $0,0999\dots$ representa el mismo número que $0,1000\dots$ en la representación decimal). Estos serían los únicos puntos donde E no sería el gráfico de una función. Sin embargo, las condiciones (3) y (4) aseguran que el gráfico "se pega bien", con lo cual, resulta que E es el gráfico de alguna función continua $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. (Más adelante, cuando estudiemos una clase particular de estas transformaciones afines, quedará mas clara la construcción y que, efectivamente, está todo bien definido).

Def: El ~~exponente~~ exponente Hölder de f en x es

$$h_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \frac{\log |f(x) - f(y)|}{\log |x - y|} : y \in B(x, \varepsilon) \right\}$$

Lema 1: $h_x = \sup \{ \alpha: |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha \quad \forall y \text{ en un entorno de } x \}$

Dem/ ver [1]

Notamos $h = \inf \{ h_x: x \in I \}$ y llamamos a h el "exponente Hölder de f ". Si existe un número h_λ tal que $h_\lambda = h_x$ para casi todo punto $x \in I$ (con la medida de Lebesgue), entonces llamamos a h_λ el "exponente Hölder de f en casi todo punto."

Llamamos a un arco C una "envolvente" de f en x si, para algún entorno de x , C es la unión de los gráficos de g_+ y g_- , donde $g_\pm(y) = \pm |x - y|^\alpha + f(x)$. Llamamos a α el "exponente" de la envolvente.

Notamos $gr(f)$ al gráfico de $f: \{ (x, f(x)): x \in I \}$, y D_B a la dimensión box.

Recordemos un resultado visto en alguna de las clases:

Lema 2: Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con exponente Hölder h . Entonces $h \leq 2 - D_B(gr(f))$

Dem/ ver [2]

Exponentes para una clase de transformaciones ^{lineales} afines.

Consideremos ahora el caso especial cuando

$$x_i = \frac{i}{n}, \text{ para } 0 \leq i \leq n-1 \text{ (puntos equiespaciados)}. \quad (6)$$

De la definición de las φ_i , junto con las condiciones

(2), (3) y (4), resulta que $a_i = \frac{1}{n} =: a$, y $v_i^0 = ia \quad \forall 0 \leq i \leq n-1$.

En este caso, la transformación $\pi: \Sigma_n \rightarrow I$ está dada

por $x_1 x_2 \dots \mapsto 0, x_1 x_2 \dots$ (base n).

Para ilustrar la idea, trabajemos con $n=2$. Es decir, tenemos 3 puntos: $(0, y_0)$, $(\frac{1}{2}, y_1)$ y $(1, y_2)$; y 2 transformaciones φ_0 y φ_1 .

Donde $\varphi_i(x, y) = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i^0 \\ v_i^1 \end{pmatrix}$. Las condiciones (3) y (4)

$$\text{dicen que } \begin{cases} \varphi_0(0, y_0) = (0, y_0) \\ \varphi_0(1, y_2) = (\frac{1}{2}, y_1) \end{cases} \text{ y } \begin{cases} \varphi_1(0, y_0) = (\frac{1}{2}, y_1) \\ \varphi_1(1, y_2) = (1, y_2) \end{cases}$$

$$\text{Para } \varphi_0: \quad \varphi_0(0, y_0) = (a_0 \cdot 0 + v_0^0, b_0 \cdot 0 + c_0 y_0 + v_0^1) = (0, y_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0^0 = 0} \\ c_0 y_0 + v_0^1 = y_0 \Rightarrow \boxed{v_0^1 = y_0(1 - c_0)}$$

$$\cdot \varphi_0(1, y_2) = (a_0, b_0 + c_0 y_2 + y_0(1 - c_0)) = (\frac{1}{2}, y_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b_0 + c_0 y_2 + y_0(1 - c_0) = y_1}$$

En definitiva, $\left[\varphi_0(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, [y_1 - y_0 - c_0(y_2 - y_0)]x + c_0y + y_0(1 - c_0) \right) \right]$

Análogamente, se llega a que

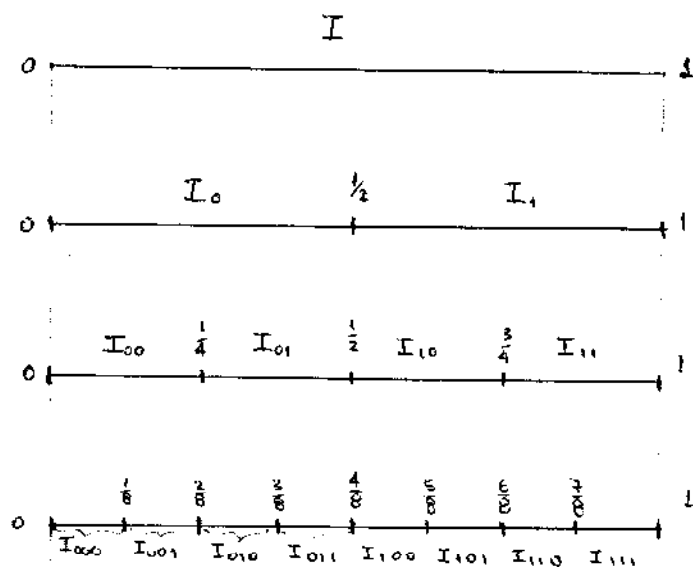
$$\left[\varphi_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, [y_2 - y_1 - c_1(y_2 - y_1)]x + c_1y + y_1(1 - c_1) \right) \right]$$

Aquí, $\psi_0(x) = \frac{1}{2}x$ y $\psi_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Luego,

$$\psi_0([0, 1]) = [0, \frac{1}{2}] \text{ y } \psi_1([0, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$$

$$\psi_0(\psi_0([0, 1])) = [0, \frac{1}{4}], \psi_0(\psi_1([0, 1])) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}],$$

$$\psi_1(\psi_0([0, 1])) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \text{ y } \psi_1(\psi_1([0, 1])) = [\frac{3}{4}, 1]$$

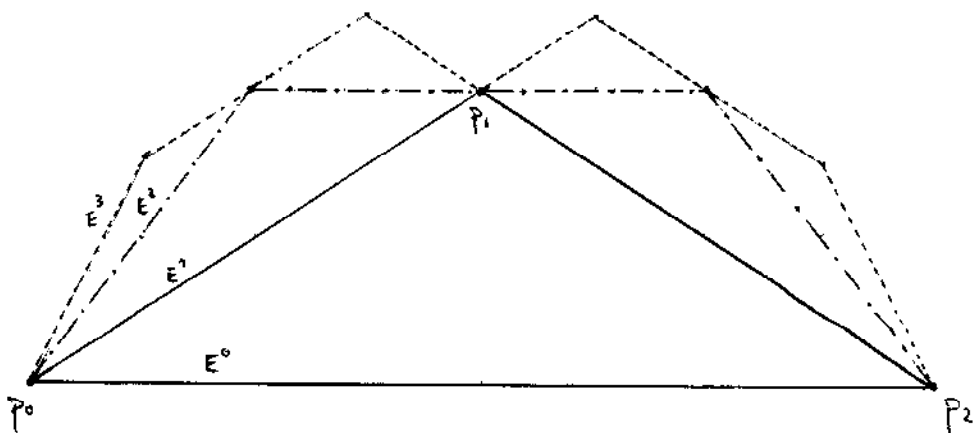


Así, $\pi(C_{x_m}) = I_{x_m}$ es el intervalo formado por todos los números cuyo desarrollo en base 2 coincide en los m primeros términos.

$$I_{011} = \varphi_1(\varphi_1(\varphi_0(I))) = \{x \in [0, 1] : x = 0, 011x_1x_2\ldots, x_i \in \{0, 1\}\}$$

↑
de izquierda a
derecha, indica
el orden de
la composición.

Llamemos, por conveniencia, $p_i = (x_i, y_i)$. La idea de las condiciones (3) y (4) es que al aplicar φ_i al segmento que une p_0 con p_n (lo notaremos $\overline{p_0 p_n}$), obtenemos el segmento $\overline{p_i p_{i+1}}$ (de $\overline{p_0 p_n}$). Luego, si unimos las imágenes de todos los φ_i 's, en la primera iteración obtendremos la poligonal que une los puntos $p_0, \dots, p_n$. Además, los puntos de los extremos (en este caso, p_0 y p_n) quedan fijos. El siguiente paso es aplicar nuevamente cada una de las φ_i a los n segmentos resultantes del paso anterior ($\overline{p_0 p_1}, \overline{p_1 p_2}, \dots$). Nuevamente, los extremos de estos n segmentos (los vértices de la poligonal) quedan fijos. Como esto sucede en cada paso de la iteración, las condiciones (3) y (4) garantizan que los puntos $p_0, \dots, p_n$ estarán incluidos en la poligonal resultante de cada iteración.



$$E^0 = \overline{p_0 p_2}$$

$$E^1 = \overline{p_0 p_1} \cup \overline{p_1 p_2} = \varphi_0(\overline{p_0 p_2}) \cup \varphi_1(\overline{p_0 p_2})$$

$$E^2 = \varphi_0(\overline{p_0 p_1}) \cup \varphi_1(\overline{p_0 p_1}) \cup \varphi_0(\overline{p_1 p_2}) \cup \varphi_1(\overline{p_1 p_2})$$

Como ya habíamos observado antes, las ϕ_i preservan las líneas verticales. Esto tiene que ver con que el vector $(0,1)$ es autovector de la parte lineal de cada ϕ_i (asociado al autorvalor c_i). Es decir, que las ϕ_i 's contraen las líneas verticales en un factor c_i .

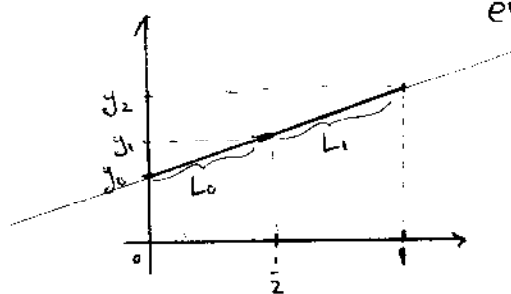
Un autovector asociado al otro autorvalor ($a_i = \frac{1}{n}$) es el $\left(1, \frac{b_i}{\frac{1}{n} - c_i}\right)$. Llamaremos "autoespacio fuertemente contractivo" al espacio generado por este autovector (recordar que $0 < \underline{a_i = \frac{1}{n}} < c_i < 1$, con lo cual, se puede pensar que la contracción en la dirección del $\left(1, \frac{b_i}{\frac{1}{n} - c_i}\right)$ es "más fuerte", al ser en un factor más chico).

Analicemos por separado el caso trivial en que los puntos están alineados. En este caso, son equivalentes:

- (a) los puntos $p_0, \dots, p_n$ están alineados.
- (b) $gr(f)$ es una línea recta
- (c) los autoespacios fuertemente contractivos de las ϕ_i coinciden.

Veamos la demostración de esto para $n=2$.

Supongamos que vale (a). Luego, los puntos p_0, p_1 y p_2 están contenidos en la recta



$$y = 2 \cdot (y_1 - y_0)x + y_0. \text{ Veamos}$$

qué sucede al evaluar ϕ_i en los puntos de esa recta.

$$\varphi_0(x, 2(y_1 - y_0)x + y_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x, (y_1 - y_0(1-\omega) - \omega y_2)x + \omega [2(y_1 - y_0)x + y_0] + y_0(1-\omega) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x, [y_1 - y_0(1-\omega) - \omega(2y_1 - y_0)]x + 2\omega(y_1 - y_0)x + \cancel{\omega y_0} + y_0 - \cancel{\omega y_0} \right)$$

$$\uparrow$$

$$y_2 = 2y_1 - y_0$$

$$= \left(\frac{1}{2}x, (y_1 - y_0)x + y_0 \right) = \left(\frac{1}{2}x, 2(y_1 - y_0) \cdot \frac{1}{2}x + y_0 \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_0(x, 2(y_1 - y_0)x + y_0) = \left(\frac{1}{2}x, 2(y_1 - y_0) \frac{1}{2}x + y_0 \right)$$

es decir, la recta es invariante por φ_0 .

Una cuenta análoga muestra que sucede lo mismo con φ_1 .

Si intersecamos la recta con el $[0,1] \times \mathbb{R}$, lo que se tiene es que la imagen del segmento por φ_0 es la primer mitad del segmento, y la imagen por φ_1 es la segunda mitad (L_0 y L_1 , respectivamente, en el dibujo de la página anterior).

Luego, el autoespacio fuertemente contractivo de φ_0 y φ_1 coincide. Esto prueba (a) $\Rightarrow$ (c).

Si el autoespacio fuertemente contractivo de los φ_i coincide, entonces al intersecarlo con $[0,1] \times \mathbb{R}$ (llamamos a ese conjunto F) se tiene que

$$F = \varphi_0(F) \cup \varphi_1(F)$$

Pero por unicidad de soluciones compactas no vacías de esta ecuación (ver (5)) se tiene que $F = E = \text{gr}(f)$.

En particular, resulta que $\text{gr}(f)$ es una línea recta.

Luego, (c) $\Rightarrow$ (b).

Como $\text{gr}(f)$ contiene a los puntos p_0, p_1, p_2 , que

(b) $\Rightarrow$ (a) es trivial.

Esto muestra que (a), (b) y (c) son equivalentes.

Supongamos ahora que los puntos no están alineados.

Teorema: Para los φ_i definidos en (6), si los puntos $p_0, \dots, p_n$ no están alineados, se tiene que:

$$(1) \quad D_E(\text{gr}(f)) = 1 + \frac{\log\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i\right)}{-\log(a)}$$

$$(2) \quad h_\lambda = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(c_i)}{\log(a)}$$

$$(3) \quad h = \frac{\log\left(\max_{0 \leq i \leq n-1} c_i\right)}{\log(a)}$$

Dem / Dado $A \subseteq \mathbb{R}^2$, se definen

(lo hacemos para $n=2$) $\left\{ \begin{array}{ll} |A|_H := \sup \{ |y-y'| : (x,y), (x',y') \in A \} & (\text{alto}) \\ |A|_W := \sup \{ |x-x'| : (x,y), (x',y') \in A \} & (\text{ancho}) \end{array} \right.$

Para la demostración, necesitaremos probar antes el siguiente resultado: $\exists d, D > 0$ tales que $\forall X \in \Sigma_n$ y $\forall m \in \mathbb{N}_0$

vale que $|E_{x_m}|_W = a^m$ y

$$d c_{x_1} \cdots c_{x_m} \leq |E_{x_m}|_H \leq D c_{x_1} \cdots c_{x_m}$$

• Para la primera estimación:

$$|E_{x_m}|_W = |\varphi_{x_m}(E)|_W = |\varphi_{x_1} \cdots \varphi_{x_m}(E)|_W$$

Ahora, $\sup_{x,y \in I} |\psi_i(x) - \psi_i(y)| = \sup_{x,y \in I} \left| \frac{1}{2}(x-y) \right| = \frac{1}{2} = a$

$$\Rightarrow \text{si aplico } \psi_i \text{ m veces, } |E_{x_m}|_W = a^m \quad \checkmark$$

• Cota superior de $|E_{x_m}|_H$:

$E_{x_m} = \varphi_{x_m}(E)$, la parte del gráfico de f que está por encima de I_{x_m} , es la traslación de la parte lineal de φ_{x_m} , que llamaremos T_{x_m} .

Como las traslaciones no modifican el tamaño del conjunto, basta estudiar el comportamiento de T_{x_m} .

$$T_{x_m} = T_{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m} = T_{x_1} \cdot T_{x_2} \cdot \dots \cdot T_{x_m}$$

$$T_{x_k} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ b_{x_k} & c_{x_k} \end{pmatrix}$$

Se ve fácilmente por inducción que

$$T_{x_1} \cdot \dots \cdot T_{x_m} = \begin{pmatrix} 2^{-m} & 0 \\ \underbrace{2^{-m+1} b_{x_1} + 2^{-m+2} c_{x_1} b_{x_2} + \dots + 2^{-1} c_{x_1} \dots c_{x_{m-2}} b_{x_{m-1}} + c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}} b_{x_m}}_{\alpha} & \prod_{i=1}^m c_{x_i} \end{pmatrix}$$

Es una transformación "shear" que contrae las líneas verticales en un factor $\prod_{i=1}^m c_{x_i}$.

Acotemos $|\alpha|$

$$\begin{aligned} |\alpha| &\leq 2^{-m+1} |b_{x_1}| + 2^{-m+2} c_{x_1} |b_{x_2}| + \dots + 2^{-1} c_{x_1} \dots c_{x_{m-2}} |b_{x_{m-1}}| + c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}} |b_{x_m}| \\ &\leq \left(2^{-m+1} + 2^{-m+2} c_{x_1} + \dots + 2^{-1} c_{x_1} \dots c_{x_{m-2}} + c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}} \right) |b| = (*) \end{aligned}$$

$$\text{donde } |b| = \max \{ |b_{x_i}| \} = \max \{ |b_0|, |b_1| \}$$

$$(*) = \left(2^{-m+1} \cdot \frac{1}{c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}}} + 2^{-m+2} \cdot \frac{1}{c_{x_1} \dots c_{x_{m-2}}} + \dots + 1 \right) \cdot |b| \cdot c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}}$$

llamando $c = \min \{c_{x_i}\} = \min \{c_0, c_1\}$, tenemos que

$$c^{m-i} \leq c_{x_1} \dots c_{x_{m-i}} \Rightarrow \frac{1}{c_{x_1} \dots c_{x_{m-i}}} \leq \frac{1}{c^{m-i}}$$

$$\text{Luego, } (*) \leq \left(\frac{2^{-m+1}}{c^{m-1}} + \frac{2^{-m+2}}{c^{m-2}} + \dots + 1 \right) \cdot |b| \cdot c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{2c} \right)^{m-1} + \left(\frac{1}{2c} \right)^{m-2} + \dots + 1 \right) \cdot |b| \cdot c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2c} \right)^j \cdot |b| \cdot c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2c} \right)^j |b| c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2c}} \cdot |b| \cdot c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}} = r$$

Como $\frac{1}{2} < c$, $\frac{1}{2c} < 1$

Luego, puedo acotar las sumas parciales de la geométrica por toda la serie.

Luego, $|\alpha| \leq r \cdot c_{x_1} \dots c_{x_{m-1}}$, donde

r es una constante positiva que no depende de m .

Para acotar $|E_{x_m}|_H$, miremos la diferencia en la coordenada y de $\varphi_{x_m}(x, y)$ y $\varphi_{x_m}(x', y')$, con $x, x' \in I_{x_m}$:

$$\begin{aligned} & \left| \alpha x + \prod_{i=1}^m c_{x_i} y - \left(\alpha x' + \prod_{i=1}^m c_{x_i} y' \right) \right| \leq \\ & \leq |\alpha| |x - x'| + \prod_{i=1}^m c_{x_i} |y - y'| \leq r \cdot \prod_{i=1}^{m-1} c_{x_i} |x - x'| + \prod_{i=1}^m c_{x_i} |y - y'| \\ & = \left(\underbrace{\frac{r}{c_{x_m}}}_{\leq \frac{r}{c}} \underbrace{|x - x'|}_{\leq 1} + |y - y'| \right) \prod_{i=1}^m c_{x_i} \leq D \cdot \prod_{i=1}^m c_{x_i} \end{aligned}$$

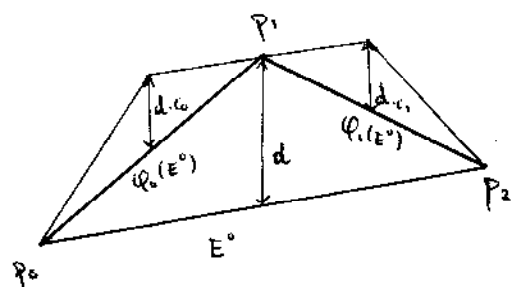
$|y - y'| \leq |E|_H = |g \circ f|_H \leq M$ pues f es una función continua definida en el $[0, 1]$, que es compacto.

Luego, $|E_{x_m}|_H \leq D \cdot \prod_{i=1}^m c_{x_i}$, donde D es una constante positiva que no depende de m .

Veamos la cota inferior de $|E_{x_m}|_H$:

(ver [3])

Como $p_0, p_1, p_2 \in E \Rightarrow \varphi_{x_m}(p_i) \in \varphi_{x_m}(E)$
($i=0, 1, 2$)



$$\text{Luego, } \left| \varphi_{x_m}(p_0) \varphi_{x_m}(p_1) \varphi_{x_m}(p_2) \right|_H \leq \left| \varphi_{x_m}(E) \right|_H$$

↓
triángulo de vértices $\varphi_{x_m}(p_i)$

Esta última desigualdad vale pues al mirar $| \cdot |_H$ del triángulo, estoy comparando las diferencias en la coordenada y de solamente 3 puntos de $\varphi_{x_m}(E)$ (la parte del fractal $gr(f)$ sobre el intervalo I_{x_m}). Podría pasar que haya puntos en $\varphi_{x_m}(E)$ que estén a una distancia vertical mayor (con lo cual, $|\varphi_{x_m}(E)|_H$ sería mayor).

Pero la altura del triángulo de vértices $\varphi_{x_m}(p_i)$ es la misma que la del triángulo de vértices $T_{x_m}(p_i)$, pues la diferencia es una traslación, que no modifica la forma del conjunto.

Como la parte lineal de las φ_i es una transformación que contrae las líneas verticales en un factor $\prod_{i=1}^m c_{x_i}$,

la altura del triángulo es por lo menos la altura vertical ("d" en el dibujo de la página anterior)

del triángulo $\widehat{p_0 p_1 p_2}$ multiplicada por el factor de contracción.

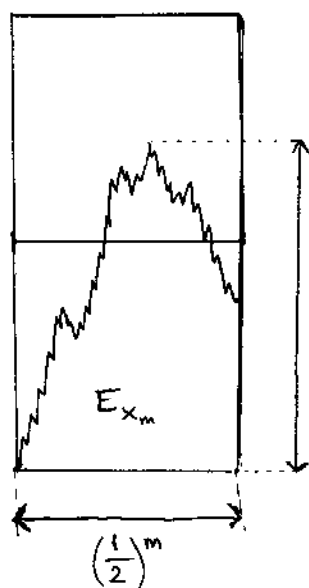
Es decir,

$$d \cdot \prod_{i=1}^m c_{x_i} \leq \left| \widehat{T_{x_m}(p_0) T_{x_m}(p_1) T_{x_m}(p_2)} \right|_H = \left| \widehat{\varphi_{x_m}(p_0) \varphi_{x_m}(p_1) \varphi_{x_m}(p_2)} \right|_H \leq |E_{x_m}|_H$$

Luego, $d \prod_{i=1}^m c_{x_i} \leq |E_{x_m}|_H \leq D \prod_{i=1}^m c_{x_i}$, donde d y D no dependen de m .

Ahora si, demostramos (1).

Cubrimos $gr(f)$ con cuadraditos de lado $(\frac{1}{2})^m$. Para cada m , sea $N(m)$ el mínimo número de cuadraditos necesarios para cubrir todo.



$$|E_{x_m}|_H \leq D \prod_{i=1}^m c_{x_i}$$

Por lo anterior, se tiene que

$$\frac{\sum_{x_m} d \prod_{i=1}^m c_{x_i}}{(\frac{1}{2})^m} \leq N(m) \leq \frac{\sum_{x_m} D \prod_{i=1}^m c_{x_i}}{(\frac{1}{2})^m}$$

donde las sumas son sobre todas las tiras de longitud m de 0's y 1's.

$$d \cdot 2^m \cdot \sum_{x_m} c_{x_1} \cdots c_{x_m} \leq N(m) \leq D \cdot 2^m \cdot \sum_{x_m} c_{x_1} \cdots c_{x_m} \quad (**)$$

Ahora, sumar sobre todas las tiras de longitud m formados por 0's y 1's es sumar sobre todas las posibles combinaciones $c_1, \dots, c_m$ donde $x_i \in \{0,1\}$, y esto es

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \cdot c_0^j \cdot c_1^{m-j} = \binom{m}{j} \cdot (c_0 + c_1)^m$$

↑
Binomio
de Newton

Obs. En el caso que se tienen n dígitos (ie: $x_i \in \{0, \dots, n-1\}$)

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = a_1 \sum_{j=1}^m b_j + \dots + a_n \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j$$

es sumar sobre i y j todas las posibles combinaciones $a_i b_j$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=0}^n c_i \right) \left(\sum_{j=0}^n c_j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i c_j, \text{ y si esto elevado}$$

a la m ,

$$\left(\sum_{i=0}^n c_i \right)^m = \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=0}^n \dots \sum_{i_m=0}^n c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \dots \cdot c_{i_m}$$

y esto es sumar sobre todas las tiras de longitud m de términos que pueden tomar n valores.

En definitiva, $(**)$ queda:

$$d \cdot 2^m (c_0 + c_1)^m \leq N(m) \leq D \cdot 2^m (c_0 + c_1)^m$$

$$\frac{\log(d \cdot 2^m \cdot (c_0 + c_1)^m)}{-\log(\frac{1}{2^m})} \leq \frac{\log(N(m))}{-\log(\frac{1}{2^m})} \leq \frac{\log(D \cdot 2^m \cdot (c_0 + c_1)^m)}{-\log(\frac{1}{2^m})}$$

$$1 + \frac{\log(d)}{m \log(2)} + \frac{\log(c_0 + c_1)}{\log(2)} \leq \frac{\log(N(m))}{-\log(\frac{1}{2^m})} \leq 1 + \frac{\log(D)}{m \log(2)} + \frac{\log(c_0 + c_1)}{\log(2)}$$

tomando límite $m \rightarrow \infty$,

$$1 + \frac{\log(c_0 + c_1)}{\log(2)} \leq D_B(g_r(f)) \leq 1 + \frac{\log(c_0 + c_1)}{\log(2)}$$

$$\Rightarrow D_B(g_r(f)) = 1 + \frac{\log(c_0 + c_1)}{\log(2)}$$

■

Observar que como $\frac{1}{2} < c_0, c_1 < 1$

$$\Rightarrow 1 < c_0 + c_1 < 2$$

$$\Rightarrow 0 < \log(c_0 + c_1) < \log(2)$$

y luego, $D_B(\text{gr}(f)) \in (1, 2)$.

Para las demostraciones de (2) y (3) ver [1]

Comentario: Para un f definida como arriba, se tiene que $h \leq 2 - D_B(\text{gr}(f)) \leq h_2$, y las desigualdades se pueden reemplazar por igualdades si, y solo si, los c_i son todos iguales.

Dem/ ver [1]

Referencias:

- [1] Tim Bedford (1989): Hölder Exponents and Box dimension for Self-Affine Fractal Functions. Constructive Approximation (1989) 5: 33-48.
- [2] Función de Weierstrass. Notas de clase 25/11/11, Geometría fractal Victoria Arcón.
- [3] Falconer K.J, Fractal geometry: Mathematical foundations and Applications. John Wiley & Sons. 1990.