Estructura Multifractal de Funciones

Mariel Rosenblatt

7 de diciembre de 2011

Contenidos

Exponente Hölder Puntual

Definición

Sean $\alpha \geq 0$, $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función localmente acotada y $x_0 \in Dom(f)$. Decimos que f está en la clase $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$ si existen $C > 0$ y un polinomio $P_{x_0}(x)$ de grado menor que α tales que, cerca de x_0,

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C\,|x - x_0|^\alpha$$

Luego, **el exponente Hölder Puntual de f en x_0** es

$$H_f(x_0) = \sup_{\alpha \geq 0} \{\alpha : f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)\}$$

En el caso $\alpha = 0$, por convención, decimos que el polinomio nulo tiene grado $-\infty$ y $|f(x)| < C$.

Exponente Hölder Puntual

- Si f es discontinua en x_0 entonces $H_f(x_0) = 0$

Exponente Hölder Puntual

- Si f es discontinua en x_0 entonces $H_f(x_0) = 0$
- Si f es C^∞ en x_0 entonces $H_f(x_0) = +\infty$

Exponente Hölder Puntual

- Si f es discontinua en x_0 entonces $H_f(x_0) = 0$
- Si f es C^∞ en x_0 entonces $H_f(x_0) = +\infty$
- Si $H_f(x_0) < 1$ entonces f no es diferenciable en x_0

Exponente Hölder Puntual

- Si f es discontinua en x_0 entonces $H_f(x_0) = 0$
- Si f es C^∞ en x_0 entonces $H_f(x_0) = +\infty$
- Si $H_f(x_0) < 1$ entonces f no es diferenciable en x_0
    - Ejemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ tiene $H_f(0) = \frac{1}{2}$

Exponente Hölder Puntual

Si $0 < H_f(x_0) < 1$ se tiene que $f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)$ con $\alpha < 1$, es decir

Exponente Hölder Puntual

Si $0 < H_f(x_0) < 1$ se tiene que $f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)$ con $\alpha < 1$, es decir

$$P_{x_0}(x) = f(x_0) \quad \text{y} \quad |f(x) - f(x_0)| \leq C\,|x - x_0|^\alpha$$

Exponente Hölder Puntual

Si $0 < H_f(x_0) < 1$ se tiene que $f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)$ con $\alpha < 1$, es decir

$$P_{x_0}(x) = f(x_0) \quad \text{y} \quad |f(x) - f(x_0)| \leq C\,|x - x_0|^\alpha$$

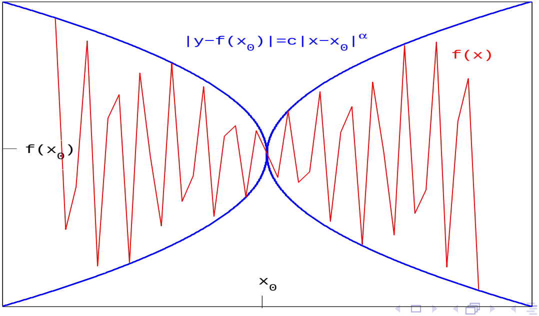
$$-C\,|x - x_0|^\alpha + f(x_0) \leq f(x) \leq C\,|x - x_0|^\alpha + f(x_0)$$

Exponente Hölder Puntual

Si $0 < H_f(x_0) < 1$ se tiene que $f \in \mathcal{C}^{\alpha}(x_0)$ con $\alpha < 1$, es decir

$$P_{x_0}(x) = f(x_0) \quad \text{y} \quad |f(x) - f(x_0)| \leq C\,|x - x_0|^{\alpha}$$

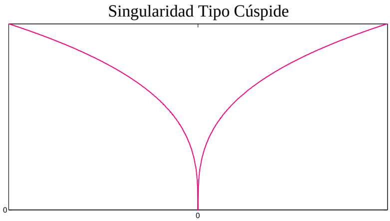
$$-C\,|x - x_0|^{\alpha} + f(x_0) \leq f(x) \leq C\,|x - x_0|^{\alpha} + f(x_0)$$



Exponente Hölder Puntual: Ejemplos

Sea $0 < \gamma \leq 1$

- $f(x) = |x|^{\gamma}$ tiene $H_f(0) = \gamma$ y $H_f(x) = +\infty$ sino.

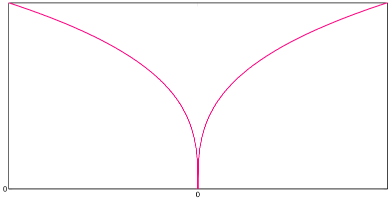


Exponente Hölder Puntual: Ejemplos

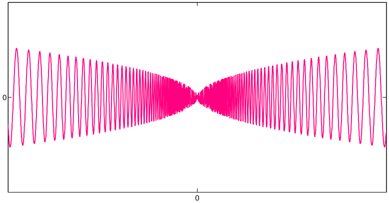
Sea $0 < \gamma \leq 1$ y $\beta > 0$.

- $f(x) = |x|^{\gamma}$ tiene $H_f(0) = \gamma$ y $H_f(x) = +\infty$ sino.
- $f(x) = |x|^{\gamma} \sin\left(\frac{1}{|x|^{\beta}}\right)$ ext. cont., tiene $H_f(0) = \gamma$ y $H_f(x) = +\infty$ sino.

Singularidad Tipo Cúspide

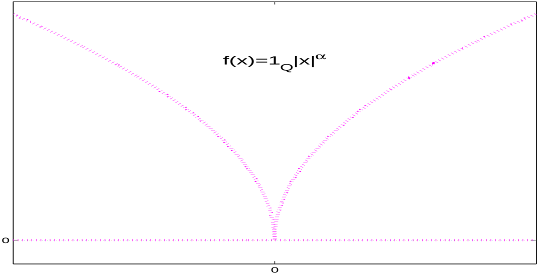


Singularidad Tipo Chirp

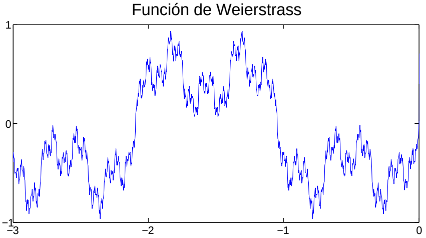


Exponente Hölder Puntual: Ejemplos

- $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} \ |x|^{\alpha}$ tiene $H_f(0) = \alpha$ y $H_f(x) = 0$ sino.



Exponente Hölder Puntual: Ejemplos: $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 3^{-\frac{k}{2}} sin\left(3^k x\right)$

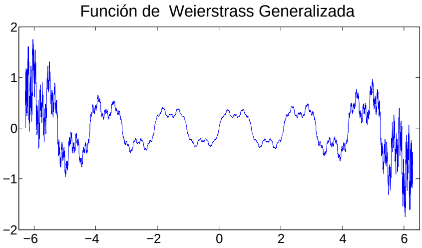


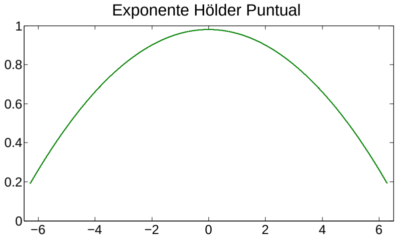
Resultado (ver en (Jaffard, 2004))

$A < 1 < AB$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k sin\left(B^k x\right) \Rightarrow H_F(x) = -\frac{log(A)}{log(B)}$$

Exponente Hölder Puntual: Ejemplos





Resultado (ver en (Daoudi, Lévy vehel, Meyer, 1998))

$A < 1 < AB$ y sea $H : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $H(x)$ continua, $0 < c \leq H(x) \leq d < 1$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k\,H(x)} sin\left(B^k x\right) \Rightarrow H_F(x) = H(x)$$

Exponente Hölder Puntual: Propiedades

- El exponente capta las singularidades de una función.

Exponente Hölder Puntual: Propiedades

- El exponente capta las singularidades de una función.
- La función Hölder puntual $H_f : x \to H_f(x)$ de una función f es capaz de identificar los cambios en la regularidad puntual de f.

Exponente Hölder Puntual: Propiedades

- El exponente capta las singularidades de una función.
- La función Hölder puntual $H_f : x \to H_f(x)$ de una función f es capaz de identificar los cambios en la regularidad puntual de f.
  - Valores del exponente cercanos a cero $\leftrightarrow$ Más irregularidad en el gráfico de f

Exponente Hölder Puntual: Propiedades

- El exponente capta las singularidades de una función.
- La función Hölder puntual $H_f : x \rightarrow H_f(x)$ de una función f es capaz de identificar los cambios en la regularidad puntual de f.
  - Valores del exponente cercanos a cero $\leftrightarrow$ Más irregularidad en el gráfico de f
  - Valores del exponente altos $\leftrightarrow$ Porciones suaves del gráfico de f

Espectro de Singularidades

Dada f una función localmente acotada queremos estudiar el conjunto:

$$\{x \in Dom(f) : H_f(x) = h\} \qquad \text{con } h \in \mathbb{R} \geq 0 \cup \{+\infty\}$$

Espectro de Singularidades

Dada f una función localmente acotada queremos estudiar el conjunto:

$$\{x \in Dom(f) : H_f(x) = h\} \qquad \text{con } h \in \mathbb{R} \geq 0 \cup \{+\infty\}$$

Espectro de singularidades

Si $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ y $0 \leq h \leq +\infty$, el *espectro de singularidades* de f es:

$$d(h) = dim\,\{x \in Dom(f) : H_f(x) = h\}$$

donde dim es la dimensión de Hausdorff.
OBS: $dim(\emptyset) = -\infty$, es decir que $d(h) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$

Funciones Multifractales

- La multifractalidad es un concepto que proviene de problemas físicos (Frisch y Parisi,1985)). La velocidad de un fluído con turbulencias sigue la relación
$$|\nu(x+h)-\nu(x)| \cong C\,|h|^{\alpha}$$

Funciones Multifractales

- La multifractalidad es un concepto que proviene de problemas físicos (Frisch y Parisi,1985)). La velocidad de un fluído con turbulencias sigue la relación
$$|\nu(x+h)-\nu(x)| \cong C\,|h|^{\alpha}$$
- Estimaron que
$$\{x : |\nu(x+h)-\nu(x)| \cong C\,|h|^{\alpha}\}$$
es un fractal para $\alpha \in (\alpha_{min}, \alpha_{max})$

Funciones Multifractales

Sea $S_h = \{x \in Dom(f) : H_f(x) = h\}$

Funciones Multifractales

Sea $S_h = \{x \in Dom(f) : H_f(x) = h\}$

Definición: Función Multifractal

$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice multifractal si,

$$d(h) = dim\,(S_h)$$

toma infinitos valores para $h \in [H_{min}, H_{max}]$, $H_{min} \neq H_{max}$

Funciones Multifractales

Sea $S_h = \{x \in Dom(f) : H_f(x) = h\}$

Definición: Función Multifractal

$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice multifractal si,

$$d(h) = dim\,(\,S_h)$$

toma infinitos valores para $h \in [H_{min}, H_{max}]$, $H_{min} \neq H_{max}$

Obs: Entonces se estudian infinitos conjuntos fractales S_h y de ahí la palabra **multifractal**.

Funciones Multifractales

¿Es Multifractal la función de Weierstrass? ¿Y la Generalizada?

Funciones Multifractales

¿Es Multifractal la función de Weierstrass? ¿Y la Generalizada?

- Si $H_F(x) = 0{,}5$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $S_{0,5} = \mathbb{R}$

$$d(h) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad h = 0{,}5 \\ -\infty & \text{sino} \end{cases}$$

Funciones Multifractales

¿Es Multifractal la función de Weierstrass? ¿Y la Generalizada?

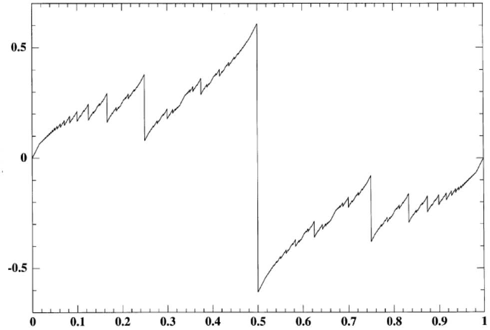
- Si $H_F(x) = 0{,}5$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $S_{0,5} = \mathbb{R}$

$$d(h) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad h = 0{,}5 \\ -\infty & \text{sino} \end{cases}$$

- Función de Weierstrass Generalizada: Si $0 < c \leq H(x) \leq d < 1$ entonces S_h tiene a lo sumo dos elementos y

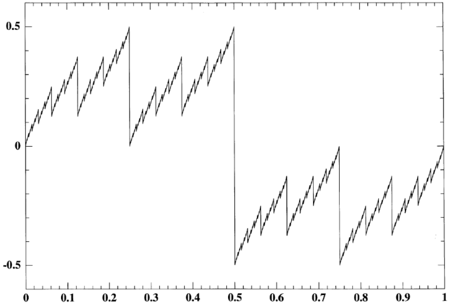
$$d(h) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h \in [c, d] \\ -\infty & \text{sino} \end{cases}$$

Funciones Multifractales (Jaffard, 1997): La función de Riemann integrable (1854)



Es discontinua en puntos de la forma $\frac{p}{2q}$ con p y q coprimos

Funciones Multifractales (Jaffard, 1997): La función de Levy



Es discontinua en puntos de la forma $\frac{k}{2^{n+1}}$ con k impar y $n \in \mathbb{N}_0$

Funciones Multifractales (Jaffard, 1997)

- Función de Riemann:

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

- Función de Levy:

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n x)}{2^n}$$

con

$$(x) = \begin{cases} x - m & \text{si} \quad |x - m| < \frac{1}{2}, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si} \quad x = m + \frac{1}{2}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Funciones Multifractales (Jaffard, 1997)

El espectro de singularidades de ambas funciones es:

$$d(h) = dim(S_h) = \begin{cases} h & \text{si} \quad h \in [0,1] \\ -\infty & \text{sino} \end{cases}$$

Funciones Multifractales (Jaffard, 1997)

El espectro de singularidades de ambas funciones es:

$$d(h) = dim(S_h) = \begin{cases} h & \text{si} \quad h \in [0,1] \\ -\infty & \text{sino} \end{cases}$$

Es decir hay infinitos conjuntos fractales S_h, todos con distinta dim de Hausdorff

Funciones Multifractales: La función de Levy

Propiedades de la función de Levy $\mathcal{L}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n x)}{2^n}$

- Si $x_0 \neq \frac{k}{2^{n+1}}$, k impar, $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $\mathcal{L}$ es continua.

Funciones Multifractales: La función de Levy

Propiedades de la función de Levy $\mathcal{L}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n x)}{2^n}$

- Si $x_0 \neq \frac{k}{2^{n+1}}$, k impar, $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $\mathcal{L}$ es continua.
- Si $x_0 = \frac{k}{2^{n+1}}$ entonces $\mathcal{L}$ es discontinua y el salto entre los límites por derecha y por izquierda mide 2^{-n}.

Funciones Multifractales: La función de Levy

Propiedades de la función de Levy $\mathcal{L}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n x)}{2^n}$

- Si $x_0 \neq \frac{k}{2^{n+1}}$, k impar, $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $\mathcal{L}$ es continua.
- Si $x_0 = \frac{k}{2^{n+1}}$ entonces $\mathcal{L}$ es discontinua y el salto entre los límites por derecha y por izquierda mide 2^{-n}.
- Si x_0 no es un elemento de $2^{-n}\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces el valor del exponente Hölder puntual $H_{\mathcal{L}}(x_0)$ depende de como los puntos diádicos de la recta real aproximan a x_0.

Funciones Multifractales: La función de Levy $\mathcal{L}(x)$

Proposición

Sea $x_0 \notin 2^{-n}\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\Delta_n x_0 = dist(x_0, 2^{-n}\mathbb{Z})$, entonces

$$H_{\mathcal{L}}(x_0) = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \frac{-n}{log_2(\Delta_n x_0)}$$

Además

$$d(h) = dim(S_h) = h \qquad \forall h \in [0, 1]$$

La función de Levy $\mathcal{L}(x)$: Demostración de la Proposición

La demostración se puede encontrar en la sección 5 del artículo «*Old Friends Revisited: The Multifractal Nature of Some Classical Functions*» de S. Jaffard (1997). La intención de este apéndice es ampliar las explicaciones allí dadas.

La función $\mathcal{L}(x)$, definida por Paul Levy, es una función continua en x_0 si:

$$x_0 \neq \frac{k}{2^{n+1}},\ k \text{ impar},\ n \in \mathbb{N}_0$$

El término general de la serie de funciones que define a $\mathcal{L}$ está acotado por $\frac{1}{2^{n+1}}$, lo cual garantiza la convergencia uniforme de la serie de funciones. En consecuencia, como cada función $(2^n x)$ es continua si $x_0 \neq \frac{k}{2^{n+1}}$, las sumas parciales

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(2^n x)}{2^n}$$

resultan funciones continuas si $x_0 \neq \frac{k}{2^{n+1}}$, k impar, $n \in \mathbb{N}_0$. Esto implica que $\mathcal{L}(x)$ también es continua allí. Además $\mathcal{L}$ es discontinua si $x_0 = \frac{k}{2^{n+1}}$, k impar, $n \in \mathbb{N}_0$ y el salto de la función $\mathcal{L}$ en estos puntos mide 2^{-n}. Se puede estimar este salto calculando $\left|\mathcal{L}(x_0^+) - \mathcal{L}(x_0^-)\right|$ para $x_0 = \frac{k}{2^{n+1}}$, con $n \in \mathbb{N}$, donde $x_0^+ = x_0 + \frac{1}{2^\ell}$ y y $x_0^- = x_0 + \frac{1}{2^\ell}$, con $\ell \in \mathbb{N}$.

$$\left|\mathcal{L}(x_0^+) - \mathcal{L}(x_0^-)\right| = \left|\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2^m x_0^+)}{2^m} - \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2^m x_0^-)}{2^m}\right| =$$

y por la convergencia de ambas series

$$= \left|\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2^m x_0^+) - (2^m x_0^-)}{2^m}\right| \tag{1}$$

La función de Levy $\mathcal{L}(x)$: Demostración de la Proposición

La suma de la ecuación (1) es finita pues $(2^m x_0^+) = (2^m x_0^-) = 0$ pues, a partir de cierto m, los valores $2^m x_0^+$ y $2^m x_0^-$ son enteros, por lo tanto

$$\left|\mathcal{L}(x_0^+) - \mathcal{L}(x_0^-)\right| = \left|\sum_{m=0}^{N} \frac{(2^m x_0^+) - (2^m x_0^-)}{2^m}\right| \qquad N = max\,\{\ell, n+1\}$$

La función (x) es discontinua en puntos de la forma $\frac{k}{2}$ con k impar y en estos puntos los límites laterales de la función (x) difieren en 1. En consecuencia $\left|(2^m x_0^+) - (2^m x_0^-)\right|$ está cerca de 1 si $2^m x_0 = \frac{k}{2}$, es decir

$$2^m x_0 = 2^m \frac{k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^{n+1-m}} = \frac{k}{2} \qquad \text{con } k \text{ impar;}$$

y la última igualdad se verifica si $m = n$.
Para los demás m la diferencia $\left|(2^m x_0^+) - (2^m x_0^-)\right|$ es pequeña. Más precisamente, por definición de (x)

$$\left|(2^n x_0^+) - (2^n x_0^-)\right| = 1 - \frac{2}{2^\ell} \qquad y \qquad |(2^m x_0^+) - (2^m x_0^-) = \frac{2^{m+1}}{2^\ell}$$

Separando el término n-ésimo de la suma, se tiene que

$$\left|\sum_{m=0}^{N} \frac{(2^m x_0^+) - (2^m x_0^-)}{2^m}\right| = \left(1 - \frac{2}{2^\ell}\right) 2^{-n} + \sum_{m \neq n}^{N} \frac{2^{m+1}}{2^\ell} 2^{-m} = \left(1 - \frac{2}{2^\ell}\right) 2^{-n} + N\frac{2}{2^\ell} \qquad (2)$$

Si $N = max\,\{\ell, n+1\}$ se deduce que,

$$\text{Si } \ell \longrightarrow +\infty \text{ entonces } \left|\mathcal{L}(x_0^+) - \mathcal{L}(x_0^-)\right| \longrightarrow 2^{-n}.$$

La función de Levy $\mathcal{L}(x)$: Demostración de la Proposición

Para demostrar cómo se computa el exponente Hölder Puntual usaremos el siguiente Lema:

Lema

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función discontinua en un conjunto denso A, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión que converge a x_0 tal que s_n es el salto de la función f en el punto r_n.
Entonces

$$H_f(x_0) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \frac{log(s_n)}{log(|r_n - x_0|)}$$

Sea x_0 no diádico, $\Delta_n x_0$ la distancia de x_0 a los diádicos del nivel n.
Por la densidad de los puntos diádicos en la recta real se tiene una sucesión de diádicos $(r_n)_n$ tal que

$$r_n = \tfrac{k_n}{2^n}, \qquad k_n \text{ impar} \qquad \text{y} \qquad r_n \longrightarrow x_0$$

Usando el lema y que el salto de $\mathcal{L}$ en r_n es $2^{-(n-1)}$ se deduce que

$$H_f(x_0) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \frac{log_2(2^{-n+1})}{log_2(|r_n - x_0|)}$$

además, como $\Delta_n x_0 \leq |r_n - x_0|$,

$$H_f(x_0) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \frac{-n+1}{log_2(\Delta_n x_0)} = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \frac{-n}{log_2(\Delta_n x_0)}$$

También, de esta última desigualdad, puede deducirse que $H_f(x_0) \leq 1$ pues:

$$\Delta_n x_0) \leq 2^{-n} \Rightarrow log_2(\Delta_n x_0) \leq -n \implies 1 \geq \tfrac{-n}{log_2(\Delta_n x_0)}$$

La función de Levy $\mathcal{L}(x)$: Demostración de la Proposición

Obs: Usando el lema también se deduce que si $x_0 \in \mathbb{Z}$ tambiés vale que $H_f(x_0) \leq 1$ (Basta tomar $r_n = x_0 + \frac{1}{2^n}$). Es decir que

$$H_f(x_0) \leq 1 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Probemos la otra desigualdad acotando $|\mathcal{L}(x_0 + \ell) - \mathcal{L}(x_0)|$. Si $h = \Delta_n x_0$, por los mismos argumentos usados en (2), se tiene que

$$|\mathcal{L}(x_0 + h) - \mathcal{L}(x_0)| \leq 2^{-n} + O(h)$$

Buscamos α tal que $2^{-n} + O(h) \sim h^\alpha$, es decir queremos encontrar α tal que existan $C > 0$ y $D > 0$ que cumplan:

$$Dh^\alpha \leq 2^{-n} + O(h) \leq Ch^\alpha$$

Aplicando log_2 en esta última desigualdad se deduce que

$$\frac{-n}{log_2(h)} + \frac{D_1}{log_2(h)} \leq \alpha \leq \frac{-n}{log_2(h)} + \frac{C_1}{log_2(h)}$$

Luego, calculando $\liminf$ y teniendo en cuenta que $h = \Delta_n x_0$),

$$\alpha = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \frac{-n}{log_2(\Delta_n x_0)}$$

entonces

$$|\mathcal{L}(x_0 + h) - \mathcal{L}(x_0)| \leq Ch^\alpha$$

También se verifica esta última desigualdad si $\Delta_{n+1} x_0 \leq h \leq \Delta_n x_0$, lo que implica que $\mathcal{L}$ pertenece a la clase Hölder puntual $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$. Por definición de exponente Hölder puntual se concluye que

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \frac{-n}{log_2(\Delta_n x_0)} \leq H_f(x_0)$$

La función de Levy $\mathcal{L}(x)$: Demostración de la Proposición

Calculemos ahora la dimensión Hausdorff del conjunto de puntos del dominio de $\mathcal{L}$ que tienen regularidad puntual β, con $\beta \leq 1$:

$$d(\beta) = dim\,\{x \in Dom(f) : H_f(x) = \beta\} = dim(S_\beta)$$

Sea

$$E_a = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \underbrace{\bigcup_k \left[k2^{-n} - 2^{-a}, k2^{-n} + 2^{-a}\right]}_{A_n}$$

Por definición el límite superior de una sucesión de conjuntos $(A_n)_n$ es

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{j=n}^{+\infty} A_j$$

Esto significa que si $x \in E_a$ entonces x está en infinitos A_n, es decir en infinitos intervalos centrados en diádicos $k2^{-n}$ y de longitud $2\ 2^{-na}$:

$$\left[k2^{-n} - 2^{-na}, k2^{-n} + 2^{-na}\right]$$

Probaremos que los conjuntos E_a tienen $dim(E_a) = \frac{1}{a}$.

La función de Levy $\mathcal{L}(x)$: Demostración de la Proposición

$dim(E_a) \geq \frac{1}{a}$:
Para cada $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2\, 2^{-n_0 a} < \delta$ y

$$E_a \subset \bigcup_{j=n_0}^{+\infty} A_j = \bigcup_{j=n_0} \bigcup_{k} \underbrace{\left[k2^{-j} - 2^{-ja}, k2^{-j} + 2^{-ja}\right]}_{diam<\delta}$$

Entonces existe una subsucesión $(j_n)_n$ tal que

$$x \in E_a \Leftrightarrow x \in \left[k2^{-j_n} - 2^{-j_n a}, k2^{-j_n} + 2^{-j_n a}\right] \qquad \forall n \geq n_0$$

Estos intervalos son un δ-cubrimiento de E_a y como $\sum_{n \geq n_0} \left(22^{-j_n a}\right)^{1/a}$ es finita, tenemos que $\mathcal{H}^{1/a}(E_a) < +\infty$. Por lo tanto $dim(E_a) \leq \frac{1}{a}$.
$dim(E_a) \geq \frac{1}{a}$:
Para probar esta desigualdad usaremos el principio de distribución de masa.

Proposición (Principio de Distribución de Masa)

Sea μ una distribución de masa con soporte en $F \subset \mathbb{R}^n$ que verifica que existen $C > 0$ y $\delta > 0$ tales que:

$$\text{Si } diam(\mathcal{U}) < \delta \quad \Rightarrow \quad \mu(\mathcal{U}) < C\, diam(\mathcal{U})^s$$

Entonces

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{C}$$

La función de Levy $\mathcal{L}(x)$: Demostración de la Proposición

Sea

$$F_a = \bigcap_m \left(\bigcup_k \left[k2^{-n_m} - 2^{-n_m a}, k2^{-n_m} + 2^{-n_m a} \right] \right)$$

donde n_m podría definirse como, por ejemplo, $n_m = 2^{n_{m-1}}$. Claramente $F_a \subset E_a$.
Si $m = 0$ a cada intervalo $\left[k2^{-n_0} - 2^{-n_0 a}, k2^{-n_0} + 2^{-n_0 a} \right]$ se le asigna la misma masa 2^{-n_0}. A su vez estos intervalos contienen $A(k, n_0)$ intervalos del tipo $\left[\ell 2^{-n_1} - 2^{-n_1 a}, \ell 2^{-n_1} + 2^{-n_1 a} \right]$ y a cada uno de estos intervalos se le asigna masa $2^{-n_0}/A(k, n_0)$. Así, iterando este procedimiento para los demás n_m, se obtiene una medida μ con soporte en F_a tal que si $x \in F_a$,

$$\mu\left([x-h, x+h]\right) \leq C\ h^{1/a}$$

Por ejemplo si $\mathcal{U} = \left[k2^{-n_0} - 2^{-n_0 a}, k2^{-n_0} + 2^{-n_0 a} \right]$

$$\mu(\mathcal{U}) = 2^{-n_0} = \left(2^{-n_0 a} \right)^{1/a} \leq C\ diam(\mathcal{U})^{1/a}$$

Y esto se puede generalizar para $\mathcal{U} = [x-h, x+h]$. Por lo tanto, usando el principio de distribución de masa, se tiene que

$$\mathcal{H}^{1/a}\left(F_a\right) > 0 \tag{3}$$

Es decir que $\mathcal{H}^{1/a}\left(E_a\right) > 0$ y en consecuencia $dim(E_a) \geq \frac{1}{a}$.

La función de Levy $\mathcal{L}(x)$: Demostración de la Proposición

Faltaría calcular

$$dim(\{x : H_{\mathcal{L}}(x) = \beta\}) = dim(S_\beta) \qquad 0 < \beta \leq 1$$

A partir de la fórmula obtenida para calcular $H_{\mathcal{L}}(x_0)$ se puede interpretar que $\Delta_n(x_0) \sim 2^{-n\frac{1}{\beta}}$ para infinitos n.
Más precisamente

$$S_\beta = \bigcap_{a<\frac{1}{\beta}} E_a - \bigcup_{a>\frac{1}{\beta}} E_a$$

Como $F_{1/\beta} \subset S_\beta$, usando (3), se deduce que $\mathcal{H}^\beta\ (S_\beta) > 0$ y esto implica que $dim(S_\beta) \geq \beta$.
Por otra parte, sea $(a_n)_n$ una sucesión tal que

$$1/a_n \searrow \beta \qquad (a_n < \frac{1}{\beta})$$

Entonces

$$dim(S_\beta) \underbrace{\leq}_{S_\beta \subset E_{a_n}} dim(E_{a_n}) = 1/a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En consecuencia, si $n \longrightarrow +\infty$, $dim(S_\beta) \leq \beta$.
Obs: Para $\beta = 0$ claramente $dim(S_0) = 0$ pues S_0 es numerable.

Por lo tanto, probamos que el espectro multifractal cumple que $d(\beta) = \beta$ si $0 \leq \beta \leq 1$.