

# Método de Newton

María Laura Barbagallo, Guillermo Tochi

Clase del 22/11/11

## 1. Introducción

Queremos aproximar ceros de polinomios. La idea es comenzar en algún punto cercano a la raíz buscada, trazar la recta tangente al polinomio en tal punto y tomar como siguiente punto a la intersección de la recta con el eje de las abscisas.

Es decir, si la recta tangente en  $x_0$  es  $L(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0)$  pedimos que  $L(x_1) = 0$  despejando tenemos que  $x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$ , y en general  $x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$ .

Es decir estamos iterando la función

$$N_p(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)}$$

En 1879 Cayley propuso usar este método para hallar raíces de polinomios complejos, y se preguntó para que valores iniciales se convergía a una cierta raíz previamente seleccionada. Resolvió el problema para el caso cuadrático (cosa que haremos mas adelante), pero observó lo siguiente: *"El caso de la ecuación cúbica parece presentar considerable dificultad"*

La idea de las siguientes secciones es seguir con estas ideas, y tratar de entender cuando es que el método de Newton funciona bien.

## 2. Iteración de funciones racionales

Nos interesa recordar lo que vimos en clase sobre puntos atractivos, repelentes, conjuntos de Julia, etc. Pero como la función que iteramos es racional (cociente de polinomios), y en clase vimos todo para polinomios, corresponde preguntarse que resultados siguen valiendo.

El mayor cuidado que hay que tener cuando pasamos de iterar polinomios a iterar funciones racionales es el tratamiento del infinito. Aclaremos que estamos pensando todo en el plano complejo extendido.

Las definiciones de punto fijo y periódico son las mismas que las vistas en clase. Las omitimos. Pero recordemos, que si  $z$  es un punto  $p$ -periódico de la función racional  $R$ , esto es  $R^p(z) = z$ , (y  $p$  es el menor natural para el que vale esto), a  $z$  se la asocia un número  $\lambda$ , que llamamos su multiplicador,  $\lambda = (R^p)'(z) = \prod_{k=0}^{p-1} R'(R^k(z))$

Según sea  $\lambda$ , clasificamos a  $z$ , de la siguiente manera,

**Definición 1.** 1. Si  $|\lambda| < 1$   $z$  es atractivo

2. Si  $|\lambda| > 1$   $z$  es repelente

3. Si  $\lambda = 0$   $z$  es superatractivo

4. Si  $|\lambda| = 1$  y  $\lambda$  es una raíz de la unidad  $z$  es racionalmente indiferente

5. Si  $|\lambda| = 1$  y  $\lambda$  no es una raíz de la unidad  $z$  es irracionalmente indiferente

Una observación no menor es que hay que tener cuidado en definir el multiplicador cuando alguno de los puntos tiene derivada infinita. En estos casos, se conjuga a  $R$  por una homografía apropiada para evitar el problema.

Repasemos ahora algunos hechos sobre el conjunto de Julia de  $R$ , que notamos  $J(R)$ . Sorpresivamente, notamos al conjunto de Fatour de  $R$  (el complemento del de Julia) por  $F(R)$

1.  $J(R)$  es el conjunto de los  $z$  donde  $(R^n)_{n \in \mathbb{N}}$  no es normal

2.  $J(R)$  es la clausura de los punto periódicos repelentes.

3.  $J(R)$  es no vacío.

4.  $J(R)$  es invariante por  $R$  para adelante y para atras. Esto es  $R(J(R)) = R^{-1}(J(R)) = J(R)$ . y por lo tanto  $F(R)$  también es invariante.

5.  $J(R) = \partial A(w)$  donde  $w$  es un punto periódico atractivo, y  $A(w)$  es la cuenca de atracción

6.  $J(R) = J(R^p)$

7.  $J(R)$  puede dejar de ser acotado (veremos un ejemplo)

8.  $J(R)^\circ$  puede dejar de ser vacío, pero en tal caso es todo el plano complejo. (aunque para nosotros esto no sucederá, por razones que quedaran claras mas adelante)

### 3. Iteración de $N_p$

Acordemos de ahora en más que  $p \in \mathbb{C}[X]$ ,  $n = \deg(p) \geq 2$ ,  $p$  mónico y que

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = \frac{zp(z) - p'(z)}{p'(z)}$$

Observemos ademas que  $N'_p(z) = 1 - \frac{p'(z)p'(z) - p(z)p''(z)}{(p'(z))^2} = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}$

1. Los ceros de  $p$  son puntos fijos de  $N_p$ .

Esto es claro pues  $N_p(z) = z$  implica  $\frac{p(z)}{p'(z)} = 0$ , y luego  $p(z) = 0$

2. Los ceros de  $p$  son puntos fijos atractivos, y si son ceros simples son superatractivos.

Claramente si  $z$  es un cero simple de  $p$   $N'_p(z)$  no tiene ningún problema de definición y es igual a cero. Luego en este caso  $z$  es superatractivo.

Si  $z$  es una raíz múltiple de  $p$  podemos escribir  $p(x) = (x - z)^m g(x)$  donde  $m$  es la multiplicidad de  $z$ ,  $g$  es un polinomio, y  $g(z) \neq 0$

Luego

$$N_p(x) = x - \frac{(x - z)^m g(x)}{m(x - z)^{m-1} g(x) + (x - z)^m g'(x)} = x - \frac{(x - z)g(x)}{mg(x) + (x - z)g'(x)}$$

Derivando, tenemos que

$$N'_p(x) = 1 - \frac{[g(x) + g'(x)(x - z)](g(x)m + g'(x)(x - z)) - [(m + 1)g'(x) + g''(x)(x - z)]((x - z)g(x))}{(mg(x) + (x - z)g'(x))^2}$$

Entonces,

$$N'_p(z) = 1 - \frac{g(z)^2 m}{g(z)^2 m^2} = 1 - \frac{1}{m} < 1$$

3. Infinito es un punto fijo repelente

Como

$$N_p(z) = \frac{zp(z) - p'(z)}{p'(z)}$$

y el numerador es un polinomio de grado  $n$  y el denominador uno de grado  $n-1$  se tiene que infinito es un punto fijo. Como además el coeficiente principal del numerador es  $n-1$  y el del denominador es  $n$ , para  $z$  grande tenemos que

$$N_p(z) \sim \frac{(n-1)z^n}{nz^{n-1}} = (1 - \frac{1}{n})z$$

Entonces, como  $(1 - \frac{1}{n}) < 1$ , me alejo de  $\infty$ , y así infinito es repelente.

Veamos ahora una proposición que nos resultará útil en lo que siga.

**Proposición 1.** Sean  $F$  y  $G$  son funciones conjugadas, ie, existe una homografía  $H$  tal que  $F = H^{-1} \circ G \circ H$ . Entonces:

1.  $J(F) = H^{-1}(J(G))$
2.  $F$  y  $G$  tienen puntos fijos relacionados

*Demostración.* Veamos que si  $G$  es normal en  $w$ , entonces  $F$  es normal en  $H^{-1}(w)$ . Veamos entonces que si  $V$  es un entorno abierto de  $w$  donde  $F$  es normal, entonces  $G$  es normal en  $W = H^{-1}(V)$ . Para esto basta ver que si  $(G^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  converge a una función analítica y acotada en  $V$ , o a infinito, entonces  $(F^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  converge a una función analítica y acotada o a infinito en  $W$

Si  $(G^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  se va a infinito en  $V$ , tenemos que  $(G^n \circ H)_{n \in \mathbb{N}_1}$  converge a infinito en  $W$ . Luego  $(H^{-1} \circ G^n \circ H)_{n \in \mathbb{N}_1}$  converge a  $H^{-1}(\infty)$  en  $W$ , y entonces  $(F^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  converge a  $H^{-1}(\infty)$  (que es una función analítica constante, o infinito) en  $W$ .

Si  $(G^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  se va a una función analítica y acotada  $T$ , con el mismo procedimiento de antes, obtenemos que si  $T(W)$  no contiene al polo de  $H^{-1}$ ,  $(F^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  se va a  $H^{-1} \circ T$  que es una función analítica bien definida, y sino  $(F^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$  se va a  $\infty$ .

Finalmente, si  $w$  es un puto fijo de  $G$ ,  $H^{-1}(w)$  es un punto fijo de  $F$ , pues  $F(H^{-1}(w)) = (H^{-1} \circ G \circ H) \circ (H^{-1}(w)) = H^{-1}(G(w)) = H^{-1}(w)$ . Además, si  $(H^{-1})'(w)$  no es ni cero ni infinito,  $F'(H^{-1}(w)) = G'(w)$ , pues, como  $F \circ H^{-1} = H^{-1} \circ G$ , derivando tenemos que  $F'(H^{-1}(w))(H^{-1})'(w) = (H^{-1})'(G(w))G'(w) = (H^{-1})'(w)G'(w)$

□

## 4. Polinomios de grado 2

Vimos en las clases teóricas que todo polinomio de grado 2 es conjugado de un polinomio del tipo  $P(z)(z) = z^2 - c$ , donde  $c \in \mathbb{C}$ . (ver página 223 de [1]). Entonces basta analizar los polinomios de esta forma.

Tenemos entonces:  $P(z) = z^2 - c$ ,  $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

- Los ceros de este polinomio son  $z_1, z_2$  con  $z_i^2 = c$ . Notar que son 2 raíces distintas.
- $N_P(z) = z - \frac{z^2 - c}{2z} = \frac{z^2 + c}{2z}$ .

Queremos analizar el comportamiento de  $N_P^k(z)$ :

Notar que  $N_P(z) + z_i = \frac{z^2 + c + 2zz_i}{2z} = \frac{(z + z_i)^2}{2z}$ , de lo que se deduce  $\frac{N_P(z) + z_1}{N_P(z) + z_2} = \left(\frac{z + z_1}{z + z_2}\right)^2$

Si ahora reemplazamos  $z$  por  $N_P(z)$  obtenemos:  $\frac{N_P^2(z) + z_1}{N_P^2(z) + z_2} = \left(\frac{N_P(z) + z_1}{N_P(z) + z_2}\right)^2 = \left(\frac{z + z_1}{z + z_2}\right)^{2^2}$ .

Inductivamente obtenemos:

$$\frac{N_P^k(z) + z_1}{N_P^k(z) + z_2} = \left(\frac{z + z_1}{z + z_2}\right)^{2^k}.$$

Esta última expresión

- tiende a 0 si  $\left|\frac{z + z_1}{z + z_2}\right| < 1$ , por lo tanto  $N_P^k(z) \rightarrow z_2$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ ,
- tiende a  $+\infty$  si  $\left|\frac{z + z_1}{z + z_2}\right| > 1$ , por lo tanto  $N_P^k(z) \rightarrow z_1$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ .

Luego concluimos:

- $A(z_1) = \{z \in \mathbb{C} / N_P^k(z) \rightarrow z_1\} = \left\{z \in \mathbb{C} / \left|\frac{z + z_1}{z + z_2}\right| > 1\right\}$ ,
- $A(z_2) = \{z \in \mathbb{C} / N_P^k(z) \rightarrow z_2\} = \left\{z \in \mathbb{C} / \left|\frac{z + z_1}{z + z_2}\right| < 1\right\}$ .

Se deduce que  $J(N_P) = \partial A(z_i) = \{z \in \mathbb{C} / |z + z_1| = |z + z_2|\}$ , el cual describe una recta en  $\mathbb{C}$ .

En particular, este es un ejemplo de un conjunto de Julia que NO es acotado.

Recordemos que en clase mostramos que si  $g(z) = z^2$ ,  $J(g) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ , que es la circunferencia centrada en el origen de radio 1.

¿Qué relación tiene con la recta que obtuvimos antes?

Llamemos  $h(z) = \frac{z+z_1}{z+z_2}$ , luego tenemos que:

$h(N_P(z)) = g(h(z))$ , o equivalentemente,  $f(z) = h^{-1} \circ g \circ h(z)$ . Por la proposición 1,  $J(N_P) = h^{-1}(J(g))$ , de donde  $h$  se interpreta como la homografía que a la recta la manda a la circunferencia "pegando" los extremos.

Más en general, si  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  con raíces simples  $z_1, \dots, z_n$ , ya sabemos que todos los  $z_i$  serán puntos fijos superatractivos de  $N_P$ , y por lo tanto,  $J(N_P) = \partial A(z_1) = \dots = \partial A(z_n)$ . Esto dice que si un punto está en el conjunto de Julia de  $N_P$ , está en el borde de todos los  $A(z_i)$  y por lo tanto suficientemente cerca de todos estos conjuntos (que son todos disjuntos). Esto da una idea de que el conjunto de Julia puede ser muy complejo.

## 5. Polinomios de grado 3

Analicemos primero un caso muy particular:  $P(z) = z^3 - 1$ .

- Sus raíces son  $1, \exp \frac{2\pi i}{3}$  y  $\exp \frac{4\pi i}{3}$ ,
- $N_P(z) = z - \frac{z^3-1}{3z^2} = \frac{2z^3+1}{3z^2}$ .

Sabemos que  $J(N_P) = \partial A(1) = \partial A(\exp \frac{2\pi i}{3}) = \partial A(\exp \frac{4\pi i}{3})$ .

Veamos que en este caso los conjuntos  $A(1)$ ,  $A(\exp \frac{2\pi i}{3})$  y  $A(\exp \frac{4\pi i}{3})$  están relacionados:

Consideremos la función  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\rho(z) = z \exp \frac{2\pi i}{3}$ . Observar que es la rotación de 120 grados en sentido antihorario.

Afirmamos que  $N_p(\rho(z)) = \rho(N_p(z))$ :

$$N_p(\rho(z)) = \frac{2(z \exp \frac{2\pi i}{3})^3 + 1}{3(z \exp \frac{2\pi i}{3})^2} = \frac{2z^3 \exp \frac{2\pi i}{3} + 1}{3z^2 \exp \frac{4\pi i}{3}} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2} \exp \frac{2\pi i}{3} = \rho(N_p(z)).$$

Luego  $N_p$  es conjugada de si misma vía la homografía  $\rho$ . De la proposición 1 se deduce que  $\rho(A(w)) = A(\rho(w))$ ,  $\forall w$  raíz de  $N_p$ .

Se obtiene entonces:

- $\rho(A(1)) = A(\rho(1)) = A(\exp \frac{2\pi i}{3})$ , ie que este último conjunto es rotar  $A(1)$  en 120 grados.
- $\rho(A(\exp \frac{2\pi i}{3})) = A(\rho(\exp \frac{2\pi i}{3})) = A(\exp \frac{4\pi i}{3})$ , ie que este último conjunto es rotar  $A(\exp \frac{2\pi i}{3})$  en 120 grados.

Para comprender mejor que está sucediendo, mirar los dibujos del conjunto de Julia de  $N_p$  y del dominio de atracción de la raíz 1 en la página 240 de [1].

Analicemos ahora qué pasa para un polinomio  $P$  de grado 3 con todas sus raíces simples.

Dado que vía un cambio de variables afín podemos reescribir a  $P$  de la forma

$$P_a(z) = z^3 + (a-1)z - a,$$

bastará analizar el comportamiento para cada valor de  $a \in \mathbb{C}$ .

- Raíces de  $P_a$ : 1,  $z_1$  y  $z_2$ . Vamos a suponer que  $a \neq -2, \frac{1}{4}$  para que todas sus raíces sean simples.
- $N_a(z) = N_{P_a}(z) = z - \frac{P_a(z)}{P'_a(z)}$ .
- Los puntos críticos de  $N_a$  son 0, 1,  $z_1$  y  $z_2$ , pues  $N'_a(z) = \frac{N_a(z)N''_a(z)}{(N'_a(z))^2} = 0$  implica que  $z$  es raíz de  $N_a$  o de  $N''_a$ .

Una observación que podemos hacer en este punto es la siguiente:

Por estar trabajando con polinomios y funciones racionales, los valores de  $z$  donde el método de Newton comenzando a iterar con  $z$  puede fallar, osea, donde la iteración puede no converger a una raíz son de 2 tipos:

- $z \in J(N_a)$  ó
- $z$  que esten en un dominio de periodo cíclico atractivo, ie  $\{N_a(z)\} \subseteq \{z, N_a(z), N_a^2(z), \dots, N_a^p(z)\}$  no puede converger si  $p \geq 2$ .

Luego, para el análisis del comportamiento de la sucesión de Newton, debemos tener en cuenta el conjunto de Julia y los ciclos periódicos atractivos.

A continuación, citamos sin demostración dos teoremas extraídos de [3] y [4] respectivamente:

**Proposición 2.** *Sea  $R(z)$  es una función racional con algún ciclo periódico atractivo. Entonces la órbita de al menos un punto crítico converge a ese ciclo.*

Entonces para evitar los ciclos periódicos hay que analizar las órbitas de los puntos críticos. ¿Cuántos hay?

**Proposición 3.** *Sea  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , con  $P$  y  $Q$  polinomios. Sea  $d = \max\{gr(P), gr(Q)\}$ . Entonces  $R$  tiene a lo sumo  $2d - 2$  puntos críticos.*

En nuestro caso tenemos que  $d = 3$ , y por lo tanto a lo sumo 4 puntos críticos. Pero ya vimos que tenemos 4. Esto dice que la cota del teorema es óptima.

Por otro lado, solo tendremos que analizar el caso  $z = 0$ , pues los otros puntos críticos son raíces de  $P$ .

En [3], realizan un experimento numérico para analizar el comportamiento de  $\{N_a^k(0)\}$  para valores de  $a \in \mathbb{C}$  en una grilla de  $400 \times 400$ , volcando el resultado en interesantes dibujos.

¿Qué pasa cuando el polinomio tiene alguna raíz que no es simple?

En este caso, se modifica la función que iteramos:

Si  $P \in \mathbb{C}[z]$  es un polinomio con una raíz de multiplicidad  $m$ , aplicamos el método de Newton a la función  $(P(z))^{\frac{1}{m}}$ . Luego resulta que la función a iterar es:

$$N_m(z) = z - \frac{(P(z))^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}(P(z))^{\frac{1}{m}-1}P'(z)} = z - \frac{mP(z)}{P'(z)}.$$

Este método se conoce con el nombre de **Método de Newton relajado**.

Observar que si bien  $(P(z))^{\frac{1}{m}}$  no es necesariamente una función racional,  $N_m(z)$  sí lo es.

A continuación citamos un resultado de [2] que nos relaciona el conjunto de Julia de  $N_m$  con otro, que es conocido:

**Proposición 4.** Si  $m = 2$ , sea  $P$  un polinomio de grado 3 con una raíz doble. Entonces  $N_2$  y  $z^2 - \frac{3}{4}$  son conjugados. En particular, sus conjuntos de Julia se relacionan según la proposición 1.

Más generalmente:

**Proposición 5.** Sea  $P$  un polinomio de grado  $m+1$  con una raíz de multiplicidad  $m$ . Entonces  $N_m$  y  $z^2 + \frac{1-m^2}{4}$  son conjugados. En particular, sus conjuntos de Julia se relacionan según la proposición 1.

## 6. ¿Cuándo podemos decir que el método de Newton es “bueno”?

En esta sección seguiremos de cerca a [4]

**Definición 2.**  $N_p$  se dice generalmente convergente sii para casi todo  $z \in \mathbb{C}$   $\mathcal{O}^+(z) \rightarrow a$  una raíz de  $p$

¿Es  $N_p$  generalmente convergente siempre?

Si  $\deg(p) = 2$  vimos que si (porque  $N_p$  fallaba en una recta y una recta tiene medida cero)

Si  $\deg(p) \geq 3$  puede ocurrir que el método falle en un abierto, tratemos de construir un ejemplo.

Podríamos buscar un polinomio de la forma  $p(z) = z^n + az + b$  que tenga a cero como un punto periódico superatractivo de período 2. Pidamos entonces

$$N_p(0) = 1 \quad N_p(1) = 0 \quad N'_p(0) = 0 \quad N'_p(1) \neq \infty$$

Así, habría un abierto (la cuenca del ciclo atractivo) sobre el cual  $N_p$  no convergería. Hallemos  $p$ ,

$$N_p(z) = z - \frac{z^n + az + b}{nz^{n-1} + a}$$

$$\text{Luego, } N_p(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-b}{a} \Rightarrow a = -b$$

$$N_p(1) = 0 \Rightarrow 0 = 1 - \frac{1+a+b}{n+a} \Rightarrow 0 = 1 - \frac{1}{n+a} \Rightarrow a = 1 - n \text{ y } b = n - 1.$$

$$\text{Entonces, } p(z) = z^n - (n-1)z + (n-1)$$

$$\text{Recordemos que } N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}. \text{ Luego, } N'_p(z) = \frac{(z^n + az + b)(n(n-1)z^{n-2})}{(nz^{n-1} - (n-1))^2}$$

$$\text{Y es inmediato ver que } N'_p(0) = 0 \quad N'_p(1) \neq \infty.$$

Intentemos ahora conseguir alguna definición equivalente. Para esto será útil la siguiente proposición.

**Proposición 6.** Sea  $R$  una función racional, y sea  $U$  una componente conexa de  $F(R)$ . Luego,  $R(U)$  es una componente conexa de  $F(R)$

*Demostración.* Como  $F(R)$  es invariante por  $R$ , se sigue que  $R(U) \subseteq F(R)$ , y claramente  $R(U) \subseteq W$  con  $W$  una componente conexa de  $F(R)$ . Debemos ver que efectivamente  $R(U) = W$ .

Supongamos que  $R(U) \subset W$ . Luego como  $W$  es un conexo que interseca a  $R(U)$  y a  $R(U)^c$ , se sigue que existe  $v \in W \cap \partial R(U)$ . Sea entonces  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  en  $R(U)$  que converja a  $v$ , y sea  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$  en  $U$  las correspondientes preimágenes. Como estamos pensando todo en la esfera de Riemann, que es compacta, sea  $w$  un punto límite de  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Como  $R$  es continua,  $R(w)=v$ . Además, como  $R$  es abierta, debe ser que  $w \in \partial U \subseteq J(R)$ . Como  $J(R)$  es  $R$  invariante,  $R(w)=v$  esta en  $J(R)$ , absurdo, pues  $v \in W \subseteq F(R)$

□

Observación: Por la proposición anterior, es natural dar definiciones analogas a las de punto fijo o periódico, pero para componentes conexas del conjunto de Fatou.

Para la siguiente proposición será util conocer las siguientes definiciones.

**Definición 3.** *Un dominio parabólico es una componente conexa de  $F(N_p)$  que tiene en su frontera a un punto periódico racional*

*Un Disco de Siegel es una componente conexa  $q$ -periódica de  $F(N_p)$  sobre la que  $N_p$  es analíticamente conjugado a una rotación irracional sobre el disco unitario (abierto).*

*Un Anillo de Herman es una componente conexa  $q$ -periódica de  $F(N_p)$  sobre la que  $N_p$  es analíticamente conjugado a una rotación racional sobre el disco unitario (abierto).*

La noción de “analíticamente conjugado” es análoga a la que vimos previamente, lo único a tener en cuenta es que en vez de conjugar mediante homografías, conjugamos por funciones analíticas. Aclaremos también que una rotación racional es aquella cuyo ángulo de rotación es múltiplo racional de  $2\pi i$ , y las rotaciones irracionales son las que no son racionales.

**Proposición 7.**  *$N_p$  es generalmente convergente sii se cumplen todas las siguientes condiciones*

1. *La medida de  $J(N_p)$  es cero*
2. *No hay ciclos atractivos de período  $> 1$*
3. *No hay dominios parabólicos*
4. *No hay discos de Siegel*
5. *No hay anillos de Herman*

Detras de esta proposición hay dos resultados importantes, que no demostraremos. El primero nos dice que toda componente conexa del conjunto de Fatou es eventualmente periodica, y el segundo clasifica a las componentes periódicas.

**Proposición 8. No Wandering Domains, Sullivan(1985)**

*Sea  $R$  una función racional con  $\deg(F) \geq 2$  (esto es  $F = \frac{P}{Q}$ , con  $P, Q$  polinomios, y  $\max(\deg(P), \deg(Q)) \geq 2$ ), entonces toda componente conexa  $W$  de  $F(R)$  es eventualmente periódica (es decir, existe  $q$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $R^q(W) = W$ )*

Para una prueba se puede consultar [5]

**Proposición 9. Clasificación de Componentes periódicas**

$R$  racional, toda componente conexa  $W$  de  $F(R)$  q periódica es una de las siguientes:

1. *Atractiva*: es decir, existe  $z$  en  $W$  tal que  $R^q(z) = z$  y  $0 < |(R^q)'(z)| < 1$
2. *Superatractiva*: es decir, existe  $z$  en  $W$  tal que  $R^q(z) = z$  y  $(R^q)'(z) = 0$
3. *Dominio Parabólico*
4. *Disco de Siegel*
5. *Anillo de Herman*

Así, la proposición 1 resulta clara, estamos descartando los casos que nos molestan. De todos modos, estas condiciones siguen siendo “feas”. Veamos ahora un resultado que nos da condiciones suficientes para que  $N_p$  sea generalmente convergente.

Antes recordemos que,

**Definición 4.** Decimos que  $z$  es un punto critico de  $R$  si  $R$  deja de ser localmente inyectiva en  $z$ . Llamamos *Criticos*( $R$ ) al conjunto de estos puntos

Observación: Un punto critico puede ser un cero de  $R'$ , o un polo de orden mayor o igual a 2, o posiblemente  $\infty$

**Proposición 10.**  $N_p$  es generalmente convergente si,  $\forall z \in \text{Críticos}(R)$ , se cumple alguna de las siguientes:

1.  $z$  es preperiódico y el período no es un ciclo atractivo o superatractivo
2.  $\mathcal{O}^+(z) \rightarrow a$  una raíz de  $p$

Aplicemos ahora esta proposición a  $N_p$

**Proposición 11.**  $N_p$  es generalmente convergente si cada raíz de  $p''$  cumple alguna de las siguientes condiciones:

1.  $z$  es preperiódico y el período no es un ciclo atractivo o superatractivo
2.  $\mathcal{O}^+(z) \rightarrow a$  una raíz de  $p$

*Demostración.* Recordemos que  $N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$ , y  $N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}$ . Luego los puntos criticos de  $N_p$  podrían ser, los ceros de  $p$  (que cumplen las condición 2), eventualmente  $\infty$  podría ser crítico, pero como es un punto fijo repelente, sabemos que cumple la condición 1. La otra posibilidad son los ceros de  $p''$ , pues estos pueden anular a  $N'_p$ , o pueden ser los polos de orden dos de  $N_p$  (pues estos polos deben ser ceros dobles de  $p'$ ). Luego basta que los ceros de  $p'$  cumplan las condiciones de la proposición anterior para asegurar que  $N_p$  sea generalmente convergente.

□

Veamos un ejemplo:  $p(z) = z^n - 1$ . Luego,  $p''(z) = n(n-1)z^{n-2}$ , y la única raíz de  $p''$  es cero. Veamos si cero cumple la condición de la proposición anterior. Claramente,  $N_p(z) = z - \frac{z^n - 1}{nz^{n-1}}$ , luego  $N_p(0) = \infty$  que es un punto fijo repelente, así tenemos que  $N_p$  es generalmente convergente.

## Referencias

- [1] K. Falconer  
*Fractal Geometry* Mathematical Foundations and Applications.  
Capítulo 14- Willey-2003
- [2] W. Gilbert  
*The complex dynamics of Mewton's method for a double root.*  
Waterloo, Ontario, Canada- 1991
- [3] J. Curry-L. Garnett-D. Sullivan.  
*On the iteration of a Rational Function: Computer Experiments with Newton's Method.*  
Springer-Verlag 1983.
- [4] B. Kalantari.  
*Polynomial Root-Finding and Polynomiography.*  
World Scientific- 2009.
- [5] Beardon, Alan F.  
*Iteration of rational functions*  
Springer, 2000
- [6] McMullen, Curtis T.  
*Algebra and Dynamics*  
2004