

ANÁLISIS DE MULTIRESOLUCIÓN, BASES DE HAAR Y RETICULADOS AUTOSIMILARES DE $\mathbb{R}^d$

ALEJANDRO QUINTERO, CRISTIAN SCAROLA

RESUMEN

Es bien conocido que $L^2(\mathbb{R}^d)$ es un espacio vectorial con producto interno de dimensión infinita, lo que dificulta encontrar bases para este espacio.

En este trabajo, presentamos una serie de resultados que nos permitan construir bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R}^d)$, a partir de traslaciones de conjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ que posean ciertas propiedades.

Luego, las traslaciones de conjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ se generalizan a la acción de un grupo cristalográfico sobre conjuntos compactos que tengan algunas propiedades específicas.

Por último, mostraremos bases de $L^2(\mathbb{R}^d)$ contruidas a partir de grupos cristalográficos.

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R})$ es la colección de funciones

$$\psi_{k,j}(x) = 2^{\frac{k}{2}}\psi(2^k x - j), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

donde

$$\psi(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}.$$

Es sabido que, es un sistema ortonormal completo del espacio $L^2(\mathbb{R})$.

El objetivo de este trabajo es construir sistemas análogos para $L^2(\mathbb{R}^d)$ con $d \geq 2$, donde la dilatación (multiplicar por 2), se cambia por una transformación lineal apropiada y las traslaciones en $\mathbb{Z}$ por traslaciones en un reticulado de $\mathbb{R}^d$.

2. ANÁLISIS DE MULTIRESOLUCIÓN Y BASES DE WAVELETS

En esta sección introduciremos las definiciones básicas y notación clásica del Análisis de multiresolución y de bases de wavelets. Además mostraremos algunos ejemplos de modo ilustrativo a partir del sistema de Haar definido en la sección anterior.

Notación 2.1. *Notaremos por Γ a un reticulado en $\mathbb{R}^d$, es decir, Γ es la imagen de $\mathbb{Z}^d$ por una transformación lineal no singular, $\Gamma = E\mathbb{Z}^d$, donde E es la matriz de la transformación lineal.*

Definición 2.2. *Dado un reticulado Γ y una transformación lineal M sobre $\mathbb{R}^d$, diremos que es una dilatación admisible para Γ si satisface:*

- Γ es invariante por M , es decir $M\Gamma \subset \Gamma$.
- Todos los autovalores, λ_i , de M satisfacen $|\lambda_i| > 1$.

Observación 2.3. *Sea M una dilatación admisible. Entonces $|\det M| = m$ implica $m \in \mathbb{Z}$ y $m \geq 2$ y además si $\Gamma = \mathbb{Z}^d$, entonces M es una matriz con coeficientes enteros.*

Observación 2.4. *Si M es una dilatación admisible diremos, por simplicidad, que M es una dilatación.*

Definición 2.5. *Sea M una dilatación e $y \in \mathbb{R}^d$. Entonces*

- Definimos el operador de dilatación

$$U_M : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

dado por

$$U_M(f)(x) = |\det M|^{-\frac{1}{2}} f(M^{-1}x).$$

- Si V es un subespacio de $L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$U_M(V) = \{f : f = U_M(g), g \in V\}.$$

- Definimos el operador traslación τ_y por $\tau_y f(x) = f(x - y)$.

Definición 2.6. Una base de Wavelet o multi Wavelet asociada a (Γ, M) es un conjunto de funciones $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ tales que el sistema

$$\{U_M^{-j} \tau_\gamma \psi_i : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma, i = 1, \dots, n\}$$

es un sistema ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R}^d)$, donde

$$U_M^{-j} \tau_\gamma \psi_i(x) = |\det M|^{\frac{j}{2}} \psi_i(M^j x - \gamma).$$

Las funciones ψ_i son llamadas wavelets básicas.

Observación 2.7. En el caso que el conjunto de funciones conste de una sola función ψ , decimos que ψ es una wavelet.

Ejemplo 2.8. El sistema de Haar es el ejemplo más sencillo, en este caso la dilatación es $M = 2$ y el reticulado es $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Definición 2.9. Dada una dilatación M y un reticulado Γ , un Análisis de multiresolución (AMR) $\mathcal{V}$ asociado a (Γ, M) es una familia de subespacios cerrados encajados $\dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$ con $j \in \mathbb{Z}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que se verifican las siguientes propiedades:

- $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- $f \in V_j \Leftrightarrow U_M f \in V_{j+1}$, es decir $V_j = U_M^{-j} V_0$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.
- V_0 es invariante por traslaciones en Γ , es decir $\tau_\gamma V_0 \subset V_0$ para todo $\gamma \in \Gamma$.
- Existe una función $\phi \in V_0$, llamada función de escala, tal que $\{\tau_\gamma \phi\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una base ortonormal de V_0 .

Observación 2.10. Es claro de la definición que el AMR está determinado por la función de escala ϕ . Además como $V_0 \subset V_1$ entonces

$$\phi(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma U_M^{-1} \tau_\gamma \phi(x)$$

entonces

$$\phi(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma |\det M|^{-\frac{1}{2}} \phi(Mx - \gamma).$$

Ejemplo 2.11. En $\mathbb{R}$ un ejemplo sencillo de un AMR asociado a $(\mathbb{Z}, 2.Id)$ está dado por la función de escala $\phi = \chi_{[0,1)}$. Entonces V_0 es el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$ que consta de las funciones constantes en los intervalos de la forma $[j, j+1)$, $j \in \mathbb{Z}$. Y con lo cual cada V_k consta de las funciones constantes en los intervalos $[2^{-k}j, 2^{-k}(j+1))$ $j \in \mathbb{Z}$. En este caso la función de escala verifica

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1).$$

Definición 2.12. Dado un AMR $\mathcal{V}$, definimos para cada $j \in \mathbb{Z}$ los subespacios W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} es decir

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Observación 2.13. De la definición anterior tenemos que:

- $W_j = U_M^{-j} W_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

$$\blacksquare L^2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

A continuación enunciaremos un teorema obtenido por Meyer

Teorema 2.14. [Me] *Sean M una dilatación, $m = |\det M|$ y Γ un reticulado. Entonces existen $m - 1$ funciones $\psi_1, \dots, \psi_{m-1}$ tales que el sistema*

$$\{\tau_\gamma \psi_i : \gamma \in \Gamma, i = 1, \dots, m - 1\}$$

es una base ortonormal de W_0 .

Corolario 2.15. *En las hipótesis del teorema anterior, el conjunto $\{\psi_1, \dots, \psi_{m-1}\}$ es una base de Wavelet de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Además como $W_0 \subset V_1$ para cada $i = 1, \dots, m - 1$*

$$\psi_i(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_{i,\gamma} m^{\frac{1}{2}} \phi(Mx - \gamma)$$

donde $\{a_{i,\gamma}\}_\gamma$ están en $\ell^2(\Gamma)$, para cada i .

Ejemplo 2.16. *En el caso del sistema de Haar y su AMR, la wavelet básica está dada por:*

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) = \chi_{[0, \frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}(x).$$

De ahora en adelante utilizaremos, sin pérdida de generalidad, que $\Gamma = \mathbb{Z}^d$, esto se debe a que cada $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ es de la forma $\Gamma = E\mathbb{Z}^d$ para alguna matriz inversible E , entonces las matrices M son enteras.

3. CONJUNTOS AUTOSIMILARES

En esta sección, estableceremos una conexión entre los conjuntos autosimilares y los AMR, cuya función de escala es una función característica de un conjunto medible.

Notación 3.1. La notación $S \simeq T$ significa que los conjuntos son iguales salvo en un conjunto de medida nula, es decir $|S \setminus T| = |T \setminus S| = 0$.

Lema 3.2. Sea un conjunto medible $Q \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (Q + k) = \mathbb{R}^d$. Entonces son equivalentes:

- i) $Q \cap (Q + k) \simeq \emptyset$ si $k \neq 0$.
- ii) $|Q| = 1$.

Demostración. Sea $f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \chi_Q(x - j)$.

i) $\Rightarrow$ ii) Como Q verifica i) entonces $f \equiv 1$ y por lo tanto

$$|Q| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_Q(x) dx = \int_{Q_0=[0,1]^d} f(x) dx = |Q_0| = 1.$$

ii) $\Rightarrow$ i) Sean f y Q_0 como antes, entonces $f(x) \geq 1$ pero

$$1 = |Q_0| = \int_{Q_0} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_Q(x) dx = |Q|.$$

Entonces $f \equiv 1$, y por lo tanto vale i). ■

Lema 3.3. Dada una dilatación M , el número de clases, no isomorfas, en el cociente $\mathbb{Z}^d / M\mathbb{Z}^d$ es $m = |\det M|$.

Demostración. Sea $Q_0 = [0, 1]^d$ y sean $k_1 + M\mathbb{Z}^d, \dots, k_q + M\mathbb{Z}^d$ las clases, no isomorfas, en el cociente. Entonces $\mathbb{R}^d$ se puede expresar como una unión esencialmente disjunta de la siguiente manera:

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (k + Q_0) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \left\{ \bigcup_{i=1}^q (k_i + Mk + Q_0) \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \left\{ Mk + \bigcup_{i=1}^q (k_i + Q_0) \right\}$$

Como $M^{-1}\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$ entonces aplicando M^{-1} a la última igualdad tenemos que

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \left\{ k + \bigcup_{i=1}^q M^{-1}(k_i + Q_0) \right\}$$

Si definimos $Q = \bigcup_{i=1}^q M^{-1}(k_i + Q_0)$ es claro que se satisfacen las hipótesis del Lema 3.2, y por lo tanto $|Q| = 1$. Como Q es la unión disjunta de los conjuntos $M^{-1}(k_1 + Q_0), \dots, M^{-1}(k_q + Q_0)$ y cada uno tiene medida $\frac{1}{m}$ entonces $m = q$. ■

Este resultado nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.4. *Dada una dilatación g ($g(x) = Mx$), con $m = |\det M|$, y Γ un reticulado de $\mathbb{R}^d$. Una familia $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq \Gamma$ es llamada sistemas de residuos para g o dígitos de g si $y_1 = 0$ y $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \{y_i + g(\Gamma)\}$.*

Observación 3.5. *Recordemos que la dilatación g preserva el reticulado ($g(\Gamma) \subset \Gamma$) y los dígitos son los representantes de las clases, no isomorfas, en el cociente $\Gamma/g(\Gamma)$.*

Definición 3.6. *Sean $f_1, \dots, f_n$ contracciones en un espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$, diremos que un conjunto compacto $\mathcal{A} \neq \emptyset$ es autosimilar respecto a $f_1, \dots, f_n$ si*

$$\mathcal{A} = f_1(\mathcal{A}) \cup \dots \cup f_n(\mathcal{A}).$$

Teorema 3.7. *(Hutchinson) Dadas $f_1, \dots, f_n$ contracciones, existe un único conjunto autosimilar $\mathcal{A}$ respecto a las f_i . Además, para cada conjunto compacto no vacío B_0 , la sucesión $B_k = F(B_{k-1})$, para cada $k \in \mathbb{N}$ converge a $\mathcal{A}$ con la métrica de Hausdorff, donde $F(B) = f_1(B) \cup \dots \cup f_n(B)$.*

Observación 3.8. *Si las f_i verifican la siguiente condición:*

$\exists c > 0$ y $r < 1$ tales que

$$(1) \quad d(f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_p}(x), f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_p}(y)) \leq cr^p d(x, y)$$

para cada $p \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, m\}$ y $x, y \in \mathbb{R}^d$. Entonces para algún p , F^p es una contracción y por lo tanto vale el teorema anterior. Esta condición resulta mas débil que pedir que las f_i sean contracciones.

Definición 3.9. Sea g una similaridad, un conjunto compacto $\mathcal{A}$ en $\mathbb{R}^d$ con interior no vacío es llamado un m -reptile si existen conjuntos $A_1, \dots, A_m$ congruentes con $\mathcal{A}$, tales que $\text{int}(A_i) \cap \text{int}(A_j) = \emptyset$ si $i \neq j$ y

$$g(\mathcal{A}) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$$

Vamos a mostrar que para cada dilatación $g(x) = Mx$, se puede construir un m -reptile asociado a g .

Teorema 3.10. Sea g una transformación lineal expansiva (todos sus autovalores λ_i verifican $|\lambda_i| > 1$) sobre $\mathbb{R}^d$ con matriz asociada M entera y $m = |\det M|$. Sean $y_1, \dots, y_m$ un conjunto de dígitos de g y un reticulado Γ . Entonces existe un único m -reptile $\mathcal{A}$ tal que

$$g(\mathcal{A}) = A_1 \cup \dots \cup A_m \text{ con } A_i = y_i + \mathcal{A}.$$

Demostración. Sea $r > 0$ tal que $\max \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \text{ es autovalor de } g \right\} < r < 1$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que $|g^{-p}(x)| \leq C.r^p \cdot |x|$ para $p \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^d$, esto ocurre pues al ser g expansiva, entonces los autovalores λ' de g^{-1} verifican que $|\lambda'| < 1$.

Definimos $f_i(x) = y_i + g^{-1}(x)$ para cada $i = 1, \dots, m$ entonces

$$|f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x) - f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(y)| = |g^{-p}(x - y)| \leq C.r^p \cdot |x - y|$$

Entonces las f_i verifican la condición (1) para la distancia euclídea. Por el Teorema 3.7, existe un único conjunto autosimilar A asociado a las f_i , entonces definimos $\mathcal{A} = g^{-1}(A)$ (y, en consecuencia $A = g(\mathcal{A})$).

Observemos que

$$f_i(A) = f_i(g(\mathcal{A})) = y_i + g^{-1}(g(\mathcal{A})) = y_i + \mathcal{A} = A_i,$$

y por lo tanto,

$$A = f_1(A) \cup \dots \cup f_m(A) \Leftrightarrow g(\mathcal{A}) = A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

Para construir A comencemos tomando $B_0 = \{0\}$ y definimos $B_n = F(B_{n-1})$ donde $F(B) = f_1(B) \cup \dots \cup f_m(B)$. Así tenemos que $B_1 = \{y_1, \dots, y_m\}$ y

$$(2) \quad B_k = \{y_{i_k} + g^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + g^{-k+1}(y_{i_1}) \mid i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Es claro que, los $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ forman una sucesión creciente y $A = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k}$.

Como A es compacto, existe $c > 0$ tal que $A \subset U_c = B(0, c)$. Luego si probamos que hay una cantidad finita de puntos $x_1, \dots, x_q \in \Gamma$ tales que

$$(3) \quad U_c \subset \{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + A$$

Entonces, por el Teorema de Categoría de Baire, esto implica que $\text{int}(A) \neq \emptyset$ y en consecuencia, la medida de Lebesgue $\lambda(A)$ es positiva. Además, como cada f_i tiene determinante $\frac{1}{m}$, entonces $\lambda(A_i) = \frac{\lambda(A)}{m}$ para cada $A_i = f_i(A)$.

Si $i \neq j$, como $A = \bigcup_i A_i$ resulta que:

$$\lambda(A) = \lambda(\bigcup_i A_i) = \sum_{i=1}^m \lambda(A_i) - \sum_{i \neq j} \lambda(A_i \cap A_j) + \dots$$

Por lo tanto,

$$\lambda(A) \leq \sum_{i=1}^m \lambda(A_i) - \lambda(A_i \cap A_j)$$

y en consecuencia

$$\lambda(A) + \lambda(A_i \cap A_j) \leq \sum_{i=1}^m \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda(A)}{m} = \lambda(A).$$

Entonces $\lambda(A_i \cap A_j) = 0$, lo que implica que $\text{int}(A_i) \cap \text{int}(A_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Luego A es un m -reptile.

Por último, veamos que se verifica la condición (3). Para ello, elegimos $\delta > 0$ tal que, para cada $u \in \mathbb{R}^d$, u está a una distancia menor que δ de Γ . Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que $\delta \cdot c \cdot r^{k-1} < \varepsilon$, entonces cada u está a una distancia menor o igual que ε de $g^{-k+1}(\Gamma)$.

Como $\{y_1, \dots, y_m\}$ es un sistema de residuos, cada $z \in \Gamma$ se puede escribir, para cualquier k , de la siguiente manera:

$$z = g^k(x) + g^{k-1}(y_{i_k}) + \dots + g(y_{i_2}) + y_{i_1} = y_{i_1} + g(g^{k-1}(x) + \dots + y_{i_2})$$

para ciertos $y_{i_1}, \dots, y_{i_k}$ y $x \in \Gamma$. Entonces,

$$g^{-k+1}(z) = g(x) + y_{i_k} + g^{-1}(y_{i_{k-1}}) + \dots + g^{-k+1}(y_{i_1}),$$

lo que significa que

$$g^{-k+1}(\Gamma) = \bigcup \{g(x) : x \in \Gamma\} + B_k.$$

De la definición de U_c tenemos que

$$g^{-k+1}(\Gamma) \cap U_c \subseteq \{g(x_1), \dots, g(x_q)\} + B_K,$$

donde $x_1, \dots, x_q$ son puntos de Γ tales que $|g(x)| \leq 3c$. Tomando la clausura de la unión sobre todos los k obtenemos que la condición (3) es válida. ■

Ejemplo 3.11. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la transformación dada por $M = 2.Id$, entonces $\det M = m = 4$. Sean $y_1 = (0, 0)$, $y_2 = (1, 0)$, $y_3 = (0, 1)$, $y_4 = (1, 1)$, y el reticulado $\mathbb{Z}^2$. Entonces el 4-reptile asociado a $(\mathbb{Z}^2, M)$ es el cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Es fácil ver que $MQ = [0, 2]^2$ y además

$$MQ = Q \cup (Q + y_2) \cup (Q + y_3) \cup (Q + y_4).$$

Ahora estamos en condiciones de generalizar los sistemas de Haar a $L^2(\mathbb{R}^d)$. Para ello, veamos el siguiente resultado que proporciona información sobre un conjunto medible A tal que su función característica sea una función de escala para un análisis de multiresolución.

Teorema 3.12. *Supongamos que $\phi = c\chi_A$ es la función de escala de un AMR asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$, con $c = |A|^{-\frac{1}{2}}$. Entonces A satisface las siguientes propiedades:*

- i) $A \cap (A + k) \simeq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$.
- ii) A es un m -reptile, es decir existen $\{k_1, \dots, k_m\}$ un conjunto de dígitos tales que $AQ \simeq \bigcup_{i=1}^m (y_i + A)$.
- iii) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (A + k) \simeq \mathbb{R}^d$.
- iv) Existe un compacto K tal que $K \simeq A$.

Recíprocamente, la función característica de un conjunto medible y acotado A que satisface i), ii) y iii) es la función de escala de un análisis de multiresolución asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$.

Demostración.

- i) Como $\phi = \chi_A$ es la función de escala de un AMR sabemos que $\langle \phi, \tau_k \phi \rangle = \delta_{0,k}$. Por otro lado, también sabemos que

$$\langle \phi, \tau_k \phi \rangle = c^2 |A \cap (A + k)|$$

Por lo tanto, si $k \neq 0$ tenemos que $|A \cap (A + k)| = 0$.

- ii) De la relación de la función de escala resulta que:

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \sum_k a_k m^{\frac{1}{2}} \chi_A(Mx - k) \\ &= \sum_k a_k m^{\frac{1}{2}} \chi_{M^{-1}(A+k)}(x), \end{aligned}$$

donde $a_{k_i} m^{\frac{1}{2}} = 1$ para exactamente m puntos del reticulado k_i y $a_k = 0$ para el resto de los coeficientes. De este hecho, y junto a la propiedad *i*) y de la fórmula $|MA| = m|A|$ tenemos que $AQ \simeq \bigcup_{i=1}^m (y_i + A)$.

De la ortogonalidad de $\phi(M^{-1}x - k)$, $k \in \mathbb{Z}^d$ sigue que $\{k_1, \dots, k_m\}$ son un conjunto de dígitos.

En efecto, supongamos que k_1 y k_2 están en las mismas clases, entonces existe $k \in \mathbb{Z}^d$ tal que $k_1 = k_2 + Ak$. Esto implica que $MA = \bigcup_{i=1}^m (k_i + A)$ y $M(A + k) = \bigcup_{i=1}^m (k_i + Mk + A)$ no son disjuntos, lo que contradice la ortogonalidad de $\phi(M^{-1}x - k)$ y $\phi(M^{-1}x)$.

- iii) Es una consecuencia de la densidad de $\bigcup_j V_j$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y de la propiedad *ii*).
- iv) Primero veamos que si $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ es una colección finita de puntos del reticulado $\mathbb{Z}^d$ y A es el conjunto compacto definido por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=1}^{\infty} M^{-j} \epsilon_j, j \in K \right\},$$

entonces, si A_0 es cualquier conjunto compacto, la sucesión de conjuntos $A_1, A_2, \dots$ definida por:

$$A_{N+1} = \bigcup_{i=1}^m M^{-1} (k_i + A_N)$$

converge en la métrica ρ al conjunto A . Donde la métrica ρ está dada por

$$\rho(P, Q) = \max \{r(P, Q), r(Q, P)\}$$

con

$$r(P, Q) = \sup_{x \in P} \inf_{y \in Q} |x - y|.$$

Dado que valen i) y iii), y haciendo como en la demostración del Lema 3.3, podemos escribir:

$$(4) \quad A_{N+1} = \bigcup_{i=1}^m M^{-1} (k_i + A_N)$$

gracias a un argumento de inducción (esto último se puede encontrar en [GrMa]). Sabemos que $(\mathbb{R}^n, \rho)$ es un espacio métrico, y si la función $x \mapsto M^{-1}x$ es una contracción y A_0 un compacto, entonces usando repetidamente (4) obtentemos:

$$\begin{aligned} A_N &= \bigcup_{i=1}^m (M^{-1}k_i + M^{-1}A_{N-1}) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^m (M^{-1}k_i + M^{-2}k_j + M^{-2}A_{N-2}) \\ &\quad \vdots \\ &= \bigcup_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \in K^N} \left(\sum_{j=1}^N M^{-j} \epsilon_j + M^{-N} A_0 \right). \end{aligned}$$

K^N es la colección de todas las N -uplas $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ cuyas componentes están en K . Entonces, si x es un elemento en A_0 tal que: $x = \sum_{j=1}^N M^{-j} \epsilon_j + M^{-N} A_0$, entonces eligiendo un elemento $y \in A$ de la forma $y = \sum_{j=1}^N M^{-j} \epsilon_j + M^{-N} y_0$ con $y_0 \in A$, podemos poner:

$$\begin{aligned} \inf_{y \in A} |x - y| &\leq \inf_{y_0 \in A} |M^{-N} (x_0 - y_0)| \leq \\ &\leq C \lambda^N N^s \inf_{y_0 \in A} |x_0 - y_0| \leq \\ &\leq C \lambda^N N^s r(A_0, A), \end{aligned}$$

donde las desigualdades vienen de que $\|M^{-j}x\| \leq C \lambda^N j^s \|x\|$, y de la definición de $r(A_0, A)$. Tomando supremo sobre $x \in A_N$ muestra que

$r(A_N, A)$ puede hacerse arbitrariamente pequeño eligiendo N suficientemente grande. Análogamente $r(A, A_N)$ también se puede hacer arbitrariamente pequeño eligiendo N suficientemente grande. Entonces la sucesión de conjuntos compactos $\{A_N\} \rightarrow A$ en el sentido de la métrica ρ y, como consecuencia, A es compacto.

Finalmente, aplicando el Lema 3.13 tenemos el resultado buscado.

Supongamos ahora que la función característica de un conjunto medible y acotado A satisface *i*), *ii*) y *iii*), y veamos que es la función de escala de un análisis de multiresolución asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$.

Definimos

$$V_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \chi_A(x - k) \right\}$$

y $V_j = U_M^{-j} V_0$, para cada entero j . Entonces $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es una familia de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Usando las propiedades de A es fácil ver que esta familia satisface:

- $\mathcal{V}$ es una familia creciente, es decir $V_j \subset V_{j+1}$ para todo entero j .
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- $V_j = U_M^{-j} V_0$, para cada j .
- V_0 es invariante bajo translaciones enteras.
- $\{\tau_k \chi_A : k \in \mathbb{Z}^d\}$ es un sistema ortonormal completo para V_0 .

Para ver que $\mathcal{V}$ es un AMR asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$ con función de escala χ_A es suficiente mostrar que $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es densa en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Para ello, definimos $\phi_j(x) = m^j \chi_A(-M^j x)$ y puede verse en [GrMa, Teorema 1] que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_j(\cdot - y) f(y) dy - f \longrightarrow 0$$

en $L^2(\mathbb{R}^d)$ cuando $j \rightarrow \infty$. ■

Si $\phi = c\chi_A$ es la función de escala para un AMR asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$, entonces ya hemos visto que $c = |A| = 1$ y que

$$(5) \quad \phi(x) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \phi(Mx - k)$$

donde $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_m\}$ es un conjunto de dígitos del cociente $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$.

Nosotros estamos interesados en construir un AMR cuya función de escala ϕ sea una función característica, entonces una aproximación apropiada es encontrar ciertos puntos en el reticulado tales que ϕ sea una solución de la ecuación funcional (5).

Lema 3.13. *Sea $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_m\}$ un conjunto de dígitos de $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$. Entonces cualquier solución integrable de*

$$(6) \quad \phi(x) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \phi(Mx - k).$$

es única salvo multiplicación por constantes, además ϕ está soportada en el m -reptile A asociado a M y a $f_i(x) = k_i + M^{-1}x$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $k_1 = 0$. Supongamos que ϕ es una solución integrable de (6). Definimos

$$\phi_n(x) = m^n \phi(A^n x)$$

y dos sucesiones de medidas

$$\mu_n(x) = \frac{1}{m} \sum_{k \in \mathcal{K}} \delta(x - M^n k)$$

donde δ es la delta de Dirac en el origen y

$$\nu_{n+1} = \mu_{n+1} * \nu_n$$

con $\nu_1 = \mu_1$ y la convolución usual de funciones. Además las ν_n están soportadas en B_n definidos en (2) en la demostración del Teorema 3.10.

Entonces (6) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \mu_1 * \phi_1(x) = \int \phi_1(x - y) d\mu_1(y).$$

Por inducción se obtiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(x) = \nu_n * \phi_n(x).$$

Si $\psi \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $\phi_n * \psi$ converge a $c\psi$ en $L^p(\mathbb{R}^d)$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde $c = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx$. Dado que para cada n , la ν_n tiene variación total igual a 1, entonces

$$\nu_n * \phi_n * \psi - c\nu_n * \psi \rightarrow 0$$

en $L^p(\mathbb{R}^d)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi = \nu_n * \phi_n = c\nu_n + (\nu_n * \phi_n - c\nu_n)$$

y $\nu_n * \phi_n - c\nu_n$ converge débilmente a 0, entonces se puede concluir que $c\nu_n$ converge débilmente a ϕ . Por lo tanto, el soporte de ϕ está contenido en A . Del hecho que la sucesión μ_n está definida únicamente por la ecuación funcional (6) y converge débilmente a un múltiplo de ϕ , se obtiene que ϕ es única salvo multiplicación por escalares. ■

Teorema 3.14. *Sea $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_m\}$ un conjunto de dígitos, y sea $\mathcal{A}$ el m -reptile asociado a $(M, \mathcal{K})$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:*

i) *Si A_0 es un compacto no vacío, entonces la sucesión*

$$\left\{ A_n = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} M^{-1}(A_{n-1} + k) \right\}$$

converge en la métrica de Hausdorff a $\mathcal{A}$.

- ii) $(\mathcal{A} + k_i) \cap (\mathcal{A} + k_j) \simeq \emptyset$ si $i \neq j$ donde $k_i, k_j \in \mathcal{K}$.
- iii) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (\mathcal{A} + k) \simeq \mathbb{R}^d$.
- iv) $\phi = |A|^{-\frac{1}{2}} \chi_A$ es la única solución, en $L^1(\mathbb{R}^d)$, de la ecuación

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \phi(Mx - k)$$

tal que $\|\phi\|_2 = 1$.

Demostración. *i)* y *ii)* son inmediatas a partir de la demostración de que $\mathcal{A}$ es un m-reptile.

iii) Sea $A_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, los A_n verifican $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (A_n + k) \simeq \mathbb{R}^d$. En efecto, como $\mathbb{Z}^d = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} (k + M\mathbb{Z}^d)$, se tiene que $\mathcal{K}$ es un conjunto completo de representantes de $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$. Esto implica que, para cada $x \in \mathbb{R}^d$, hay una sucesión de puntos del reticulado $\{m_n\}$ tal que $x - m_n \in A_n$. Dado que todos los A_n están contenidos en una bola fija, la sucesión $\{m_n\}$ es acotada. Entonces $\{m_n\}$ contiene una subsucesión constante $m_{n_j} = m$. Finalmente, como $x - m \in A_{n_j}$ para infinitos j , tenemos que $x - m$ está en $\mathcal{A}$, ya que $\{A_n\}$ converge a $\mathcal{A}$ en la métrica de Hausdorff.

iv) Que χ_A es solución de la ecuación es inmediato de *ii)* y la unicidad se obtiene a partir del Lema 3.13, ya que $\mathcal{A}$ es un m-reptile. ■

A continuación, vamos a describir un método para construir funciones de escalas ϕ para un AMR asociados a $(\mathbb{Z}^d, M)$ que sea una función característica.

Procedimiento 3.15.

Paso 1: Elegimos un compacto Q_0 y un conjunto de dígitos $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_m\}$ de $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$.

Paso 2: *Encontramos Q como*

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \bigcup_{k \in \mathcal{K}} M^{-1}(Q_{n-1} + k) \right\}.$$

Paso 3: *Si $|Q| = 1$, entonces tenemos lo buscado y $\phi = \chi_Q$ es la función de escala de un AMR. En el caso en que $|Q| \neq 1$, el método falla.*

Una de las razones por las que puede fallar este método es por que la elección de los representantes de las clases es una condición necesaria pero no suficiente.

El siguiente teorema da algunas condiciones equivalentes para poder asegurar que el algoritmo anterior funciona.

Teorema 3.16. *Sea $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_m\}$ un conjunto de dígitos para $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$ y sea $\mathcal{A}$ el m -reptile asociado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- 1) $\chi_{\mathcal{A}}$ es la función de escala para un AMR asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$.
- 2) $|\mathcal{A}| = 1$.
- 3) $\mathcal{A} \cap (\mathcal{A} + k) \simeq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$.

Demostración. Es esencialmente el contenido del Teorema 3.12 y del Lema 3.2. ■

4. BASES DE WAVELET DEL TIPO HAAR

En esta sección la idea es construir bases de wavelets asociadas a $(\mathbb{Z}^d, M)$ y para ello utilizaremos los resultados vistos en las secciones previas.

Primero consideremos un conjunto $\mathcal{A}$ tal que satisface las condiciones *i), ii), iii)* y *iv)* del Teorema 3.12. Entonces, $\chi_{\mathcal{A}}$ es la función de escala de un

análisis de multiresolución $\mathcal{V} = \{\dots, V_0, V_1, \dots\}$ asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$. Recordemos que W_0 es el complemento ortogonal de V_0 en V_1 . Como V_0 es la colección de todas las funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \chi_{\mathcal{A}}(x - k),$$

no es difícil ver que vale el siguiente resultado.

Lema 4.1. *W_0 es el conjunto de todas las funciones de la forma*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k m^{\frac{1}{2}} \chi_{\mathcal{A}}(Mx - k)$$

donde la sucesión de los coeficientes $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ está en $\ell^2(\mathbb{R}^d)$ y satisface

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} c_{k+Ml} = 0, \quad \forall l \in \mathbb{Z}^d,$$

con $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_m\}$ un conjunto de dígitos como en el Teorema 3.12.

Con este resultado podemos entonces construir las wavelets básicas cuya existencia está garantizada por el Teorema 2.14.

Lema 4.2. *Sea $U = (u_{ij})$ una matriz unitaria de $m \times m$ cuya primer fila es $u_{1j} = m^{-\frac{1}{2}}$ para $j = 1, \dots, m$. Sea $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_m\}$ un conjunto de dígitos como en el lema anterior. Entonces las wavelets básicas correspondiente al AMR asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$ cuya función de escala es $\chi_{\mathcal{A}}$ son:*

$$(7) \quad \psi_{i-1}(x) = \sum_{j=1}^m u_{ij} m^{\frac{1}{2}} \chi_{\mathcal{A}}(Mx - k_j) \quad i = 2, \dots, m.$$

En otras palabras, el soporte de las ψ_i está contenido en $\mathcal{A}$ y $\{\tau_k \psi_i, k \in \mathbb{Z}^d, i = 1, \dots, m\}$ es un sistema ortonormal completo de W_0 .

Recíprocamente, toda colección de wavelets básicas que provienen de un AMR asociado a $(\mathbb{Z}^d, M)$ cuya función de escala es $\chi_{\mathcal{A}}$ es de la forma (7).

Como consecuencia inmediata de este resultado, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Si $\psi_1, \dots, \psi_{m-1}$ es una colección de funciones definidas como en el lema anterior. Entonces el sistema*

$$\left\{ U_M^{-j} \tau_k \psi_i, \ j \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{Z}^d, \ i = 1, \dots, m-1 \right\}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Ejemplo 4.4. *Consideremos la dilatación*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\det M = 2$. Elegimos $k_1 = (0, -1)$, $k_2 = (1, -1)$. Entonces $Q = [0, 1]^2$ y es fácil ver que

$$MQ = [0, 2] \times [-1, 0] = (Q + (0, -1)) \cup (Q + (1, -1)).$$

La wavelet básica ψ está definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \times [0, 1/2] \\ -1 & \text{si } x \in [0, 1] \times [1/2, 1] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Luego, $\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \psi(M^j \cdot -k), \ j \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{Z}^d \right\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

5. GRUPOS CRISTALOGRAFICOS Y ANÁLISIS DE MULTIRESOLUCIÓN

Una pregunta natural que surge de este estudio es: Se puede extender la idea del análisis de multiresolución y la de las bases de Haar a un contexto más general? En esta última sección del trabajo, vamos a comentar algunos resultados que responden dicha pregunta.

Lo que se utilizó fuertemente hasta ahora, es el hecho de que existe un conjunto Q tal la unión de sus traslados cubren el espacio, entonces comenzaremos extendiendo (en cierto sentido) esta noción.

5.1. Introducción a los grupos cristalográficos.

Definición 5.1. *Un Grupo Cristalográfico es un subgrupo discreto $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^d)$ que posee un dominio fundamental (acotado), i.e., un conjunto cerrado y acotado P tal que*

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(P) = \mathbb{R}^d \quad \text{y} \quad \gamma(P^\circ) \cap \gamma'(P^\circ) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

donde P° es el interior de P .

Notación 5.2. *Sea Λ el subgrupo de Γ que consta de todas las traslaciones en un reticulado L y sea G el grupo de todas las partes lineales de las transformaciones de Γ . Entonces G es llamado Point Group o Grupo Puntual.*

Observación 5.3. *El grupo puntual G es un subgrupo del grupo ortogonal de $\mathbb{R}^d$ que preserva el reticulado de las traslaciones. Es decir, relativo a una base del reticulado, las transformaciones de G son matrices con coeficientes enteros. Además el subgrupo G es finito.*

Ejemplo 5.4. *Sean $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$. Sea S la simetría respecto al eje X , es decir $S(x, y) = (x, -y)$. Consideremos Γ el grupo generado por $\{\tau_u, \tau_v, S\}$. En este caso el conjunto de traslaciones es $\Lambda = \{\alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$ y G es el generado por $\{Id, S\}$. El dominio fundamental P es el rectángulo de vértices $\{(0, 0); (1, 0); (0, \frac{1}{2}); (1, \frac{1}{2})\}$.*

Observación 5.5. *H. Hiller en [H] mostró que un grupo cristalográfico Γ no queda unívocamente determinado a partir del reticulado L y del grupo*

puntual G . Además demostró que una condición necesaria y suficiente para determinar un grupo cristalográfico a partir de L y G es determinar para cada $g \in G$ un vector $\alpha(g)$ tal que $\gamma(x) = g(x + \alpha(g)) \in \Gamma$.

De esta manera el grupo queda caracterizado de la siguiente manera:

$$\Gamma = \{\gamma = \tau_k \tau_{\alpha(g)} g : k \in L, g \in G\}$$

El vector $\alpha(g)$ está definido, salvo un vector en el reticulado L , y debe verificar:

$$\alpha(Id) \in L$$

y

$$g_1(\alpha(g_2)) + \alpha(g_1) - \alpha(g_1 g_2) \in L$$

Ejemplo 5.6. Sean los vectores $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$, $\Lambda = \{\alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$. Sean ρ la rotación de ángulo π con centro en el origen y σ_l la simetría respecto a la recta $l : y = \frac{1}{4}$. Entonces $\sigma_l = \tau_{\frac{1}{2}v} S$, donde S es la simetría respecto del eje X .

Consideremos Γ el grupo generado por $\{\tau_u, \tau_v, \rho, \sigma_l\}$. Ahora G es el generado por $\{Id, S, \rho\}$, además $\alpha(\sigma_l) = \frac{1}{2}v \neq 0$. Luego, P es el rectángulo de vértices $\{(0, 0); (1, 0); (0, \frac{1}{4}); (1, \frac{1}{4})\}$.

5.2. Wavelets cristalográficos y Γ -reptiles.

Las siguientes definiciones generalizan a los conceptos de dilatación y de wavelet dados en la Sección 2. En el caso en que el grupo está compuesto sólo por traslaciones son equivalentes a las dadas anteriormente.

Definición 5.7. Dado un grupo cristalográfico Γ , diremos que una matriz M es una dilatación Γ -admisibile si verifica:

- M es expansiva (i.e. todos sus autovalores satisfacen $|\lambda_j(M)| > 1$).

$$\blacksquare M\Gamma M^{-1} \subset \Gamma.$$

Definición 5.8. Una familia $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es una (Γ, M) -multi Wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ si el sistema

$$\{U_M^{-j} D_\gamma \psi_i : j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Gamma, i = 1, \dots, n\}$$

es un sistema ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R}^d)$, donde

$$D_\gamma \psi = |\det \text{ad}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}} \psi \gamma^{-1}$$

con $\text{ad}(\gamma)$ la parte lineal de g .

El siguiente resultado caracteriza el cociente $\Gamma/M\Gamma M^{-1}$

Teorema 5.9. Sean Γ un grupo cristalográfico y M una dilatación. Si denotamos por $m = |\det M|$ entonces

- a) El cociente $\Gamma/M\Gamma M^{-1}$ tiene exactamente m clases a izquierda no isomorfas.
- b) $M\Gamma M^{-1} = \Gamma$ y $M\Lambda M^{-1} = M\Lambda$.
- c) Las clases a izquierda del cociente $\Gamma/M\Gamma M^{-1}$ son de la forma:

$$\Gamma_i = \{(g, Ml + g^{-1}(l_i)) : g \in \Gamma, l \in \Lambda\}$$

donde l_i es un representante de las clases del cociente $\Lambda/M\Lambda$.

Definición 5.10. Un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$ es un m -reptile cristalográfico con respecto a Γ , si verifica las siguientes propiedades:

- i) La familia $\{\gamma(K) : \gamma \in \Gamma\}$ es un teselado de $\mathbb{R}^d$.
- ii) Existe una dilatación Γ -admisibile M , con $m = |\det M|$ tal que existen $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Gamma$ tales que

$$M(K) = \bigcup_{i=1}^m \gamma_i(K)$$

Diremos que K es un (Γ, M) -reptile.

Definición 5.11. Sean Γ un grupo cristalográfico y M una matriz Γ -admisibile. Una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un (Γ, M) -Análisis de multiresolución $((\Gamma, M)$ -AMR) de multiplicidad n , si verifica las siguientes propiedades:

- i) $V_j \subset V_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$.
- ii) $V_{j+1} = U_M^{-1}V_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}$.
- iii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ y $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d)$.
- iv) Existe una n -upla de funciones $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, llamada vector función de escala, tal que $\phi_i \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Y $\{D_\gamma \phi_i : \gamma \in \Gamma, i = 1, \dots, n\}$ es una base ortonormal de V_0 , donde $D_\gamma f(x) = |\det ad(\gamma)|^{-\frac{1}{2}} f(\gamma^{-1}x)$.

Observemos que, de ii) y iv), se tiene que, para cada $j \in \mathbb{Z}$, los subespacios V_j son invariantes por Γ , en el sentido de que $D_\gamma V_j = V_j$.

Teorema 5.12. Sea un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$, la función $\phi = |K|^{-\frac{1}{2}} \chi_K$ es una función de escala para un (Γ, M) -AMR ortogonal si y sólo si K es un (Γ, M) -reptile.

Para finalizar vamos a extender la definición de reptile y del resultado previo.

Definición 5.13. Dado un grupo cristalográfico Γ . Un multireptile cristalográfico respecto a Γ es una n -upla $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n)$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ que satisfacen las siguientes propiedades:

- a) La familia $\{\gamma(K_i) : \gamma \in \Gamma, i = 1, \dots, n\}$ tesela $\mathbb{R}^d$.

- b) *Existe una dilatación Γ -admisble, M , y existe una familia $\{\Gamma_j^i\}_{i,j=1}^m$ de subconjuntos finitos de Γ que verifican*

$$M(K_i) = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{\gamma \in \Gamma_j^i} \gamma(K_j), \quad i = 1, \dots, n$$

Diremos que $\mathbf{K}$ es un (Γ, M) -multireptile.

Teorema 5.14. *Sean Γ un grupo cristalográfico y M una dilatación Γ -admisble. Dados $K_1, \dots, K_n$ compactos de $\mathbb{R}^d$, el vector $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ con*

$$\phi_i = |K_i|^{-\frac{1}{2}} \chi_{K_i} \quad : i = 1, \dots, n$$

es un vector función de escala para un (Γ, M) -AMR ortogonal de multiplicidad n si y sólo si $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n)$ es un (Γ, M) -multireptile.

REFERENCIAS

- [B] C. Bandt. *Self-Similar sets 5. Integer matrices and fractal tilings of $\mathbb{R}^n$* . Proc. Amer. Math. Soc. Vol.112, n 2, (1991), 549-562.
- [FW] T. Flaherty, Y. Wang. *Haar-type multiwavelet bases and self-affine multi-tiles*. Asian J. Math. Vol 3, n 2, (1999), 387-400.
- [GM] A.L. González, M.C. Moure. *Crystallographic Haar Wavelets*. J. Fourier Anal. Appl, online first doi:10.1007/s00041-011-9175-4,(2011), 1-19.
- [GrMa] K. Gröchening, W.R. Madych. *Multiresolution Analysis, Haar Bases, and Self-Similar tilings of $\mathbb{R}^n$* . IEEE Trans. Informa. Theory. Vol 38, n 2, (1992), 556-568.
- [H] H. Hiller, *Crystallography and cohomology of groups*, The Amer. Math. Montly Vol. 93, n 10, (1986), 765-779.
- [M] S. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* . Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 315, (1989), 69-88.
- [Me] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs*. París: Hermann 1990.