



Sistemas de afinación y lógica borrosa

Vicente Liern Carrión
Facultad de Economía
Universitat de València



celfi
Centro
latinoamericano
de formación
interdisciplinaria

Buenos Aires, noviembre de 2016

Curso: Sistemas de afinación y lógica borrosa

Día 14. 9:30 – 11:00

Clase 1: Introducción - Sistemas de afinación clásicos

Día 16. 9:30 – 11:00

Clase 2: Métodos aproximados: temperamentos +
introducción a la lógica fuzzy

Día 18. 11:15 – 12:45

Clase 3: Sistemas de afinación fuzzy

Charla: Sistemas de afinación y lógica borrosa

Día 17. 14:45 – 15:45

¿Qué fue de la música cuando se desfiguraron las
esferas?



celfi
Centro
latinoamericano
de formación
interdisciplinaria

Buenos Aires, noviembre de 2016

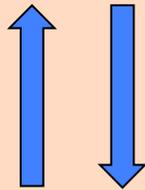
*“La música es un ejercicio matemático inconsciente
en el que la mente no sabe que está calculando”.*
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Día 14. 9:30 – 11:00

**Clase 1: Introducción – Sistemas de afinación
clásicos**

Antes de empezar

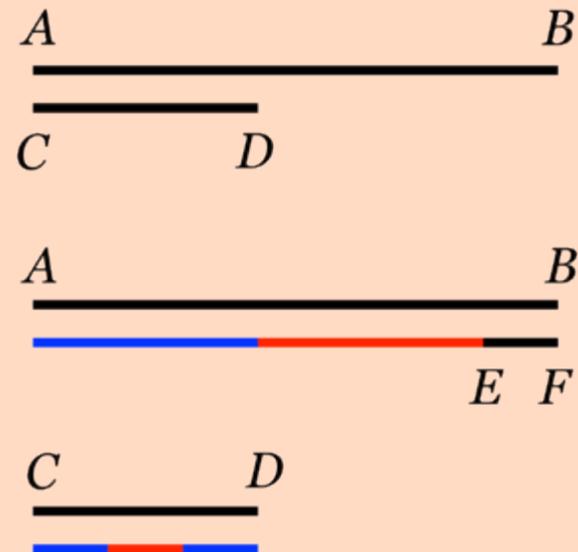
Música



Matemáticas

Hace aportaciones

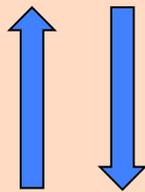
Algoritmo de Euclides



EF es la mayor medida común

Arpad Szabo, Historia de las Ciencias, M. Serres, Ed. Cátedra, 1989. (pág. 86)

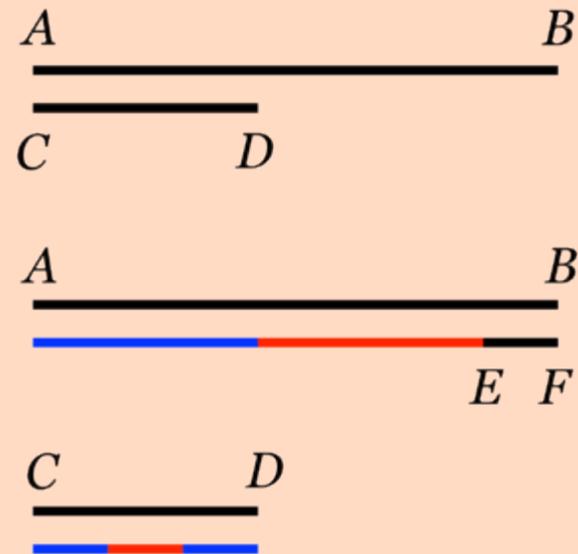
Música



Hace aportaciones

Matemáticas

Algoritmo de Euclides



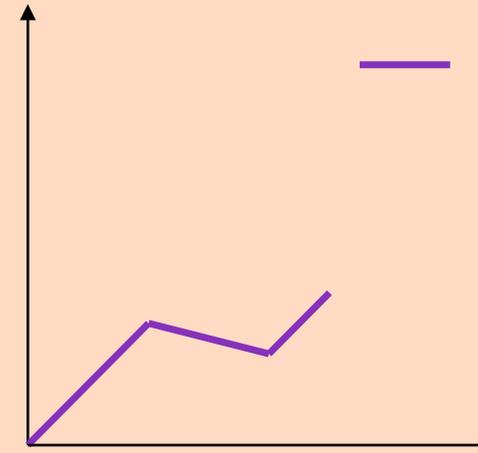
EF es la mayor medida común

Paso	Operación	Significado
1	r_0 dividido entre r_1 es q_1 y sobran r_2	$\text{mcd}(r_0, r_1) = \text{mcd}(r_1, r_2)$
2	r_1 dividido entre r_2 es q_2 y sobran r_3	$\text{mcd}(r_1, r_2) = \text{mcd}(r_2, r_3)$
3	r_2 dividido entre r_3 es q_3 y sobran r_4	$\text{mcd}(r_2, r_3) = \text{mcd}(r_3, r_4)$
\vdots	\vdots	\vdots
n	r_{n-1} dividido entre r_n es q_n y sobran r_{n+1}	$\text{mcd}(r_{n-1}, r_n) = \text{mcd}(r_n, r_{n+1})$
$n + 1$	r_n dividido entre r_{n+1} es q_{n+1} y sobra 0	$\text{mcd}(r_n, r_{n+1}) = \text{mcd}(r_{n+1}, 0)$



Canto Gregoriano
Gaudeamus omnes
en neumas de siglo XIV

Frecuencias
(notas)



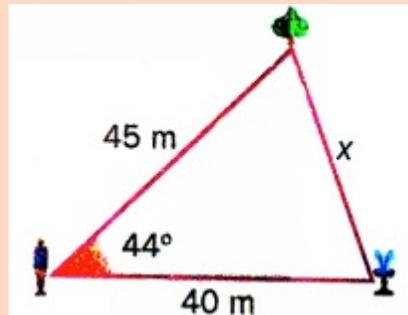
Tiempo



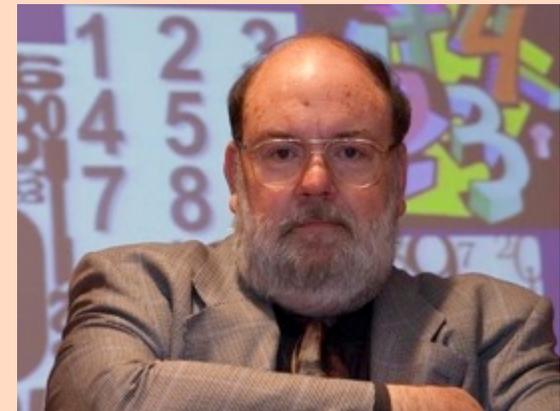
René Descartes (1596-1650)

Geometría analítica

38. Julia observa un árbol y una fuente. Con un telémetro toma las medidas que la separan de ellos y con un teodolito el ángulo que forman las visuales. Calcula la distancia entre el árbol y la fuente



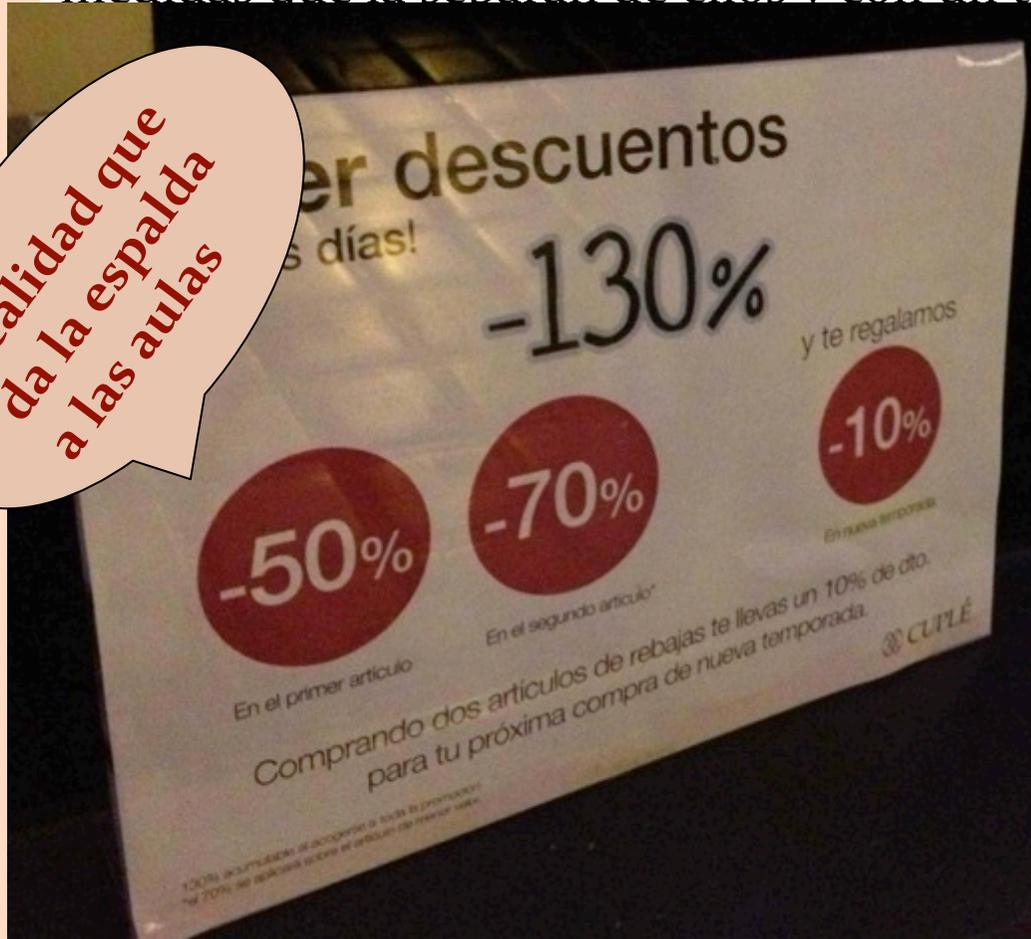
“Si has de dividir 3 patatas entre 7 niños mejor que hagas puré”.



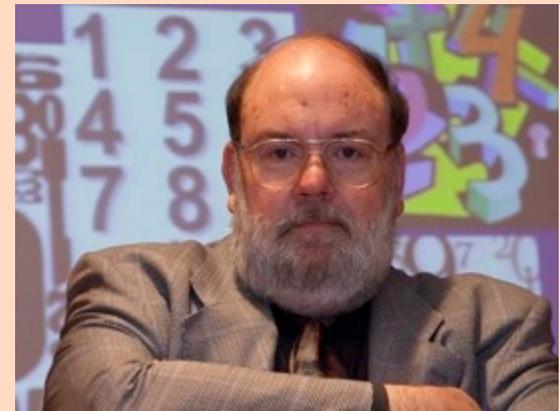
Claudi Alsina

38. Julia observa un árbol y una fuente. Con un teodolito mide la altura del árbol y la distancia entre ellos. Con un teodolito mide también la altura de la fuente y la distancia entre ellos. Con un teodolito mide también la altura de la fuente y la distancia entre ellos. Con un teodolito mide también la altura de la fuente y la distancia entre ellos.

Realidad que da la espalda a las aulas



Aulas que NO reflejan bien la realidad



Claudi Alsina



**Vampiros, monstruos, brujas,
profesores de matemáticas...**

Todo lo que te da miedo, hoy en Disney Channel.

Disney
CANAL DIGITAL

ESPECIAL HALLOWEEN EN DISNEY CHANNEL. No te pierdas nuestro terrorífico especial de Halloween, hoy 31 de Octubre. Además, entrando en www.disney.es/disneychannel descubriremos juegos, trucos y muchas sorpresas más relacionadas con Halloween.

Disney Channel

CUALIDADES DEL SONIDO

Societat

AVALUACIÓ DE MUSICOLOGIA

Cop al 'mite Strad

Deu instrumentistes de renom sotmesos a una prova del so dels violins nous de qualitat ≡ Set dels solistes

ANTONIO MADRIDEJOS
BARCELONA

Els violins fabricats per l'italià Antonio Stradivari i la seva família als segles XVII i XVIII, els famosos Stradivarius, estan acreditats com a instruments d'un so immillorable i prova d'això és que arriben a tenir preus milionaris. No obstant, un estudi dut a terme per investigadors de la Universitat Pierre i Marie Curie i del CNRS, a París, ha arribat a la conclusió que la seva fama té molt de simbòlic, més que de racional, ja que 10 concertistes de renom sotmesos a una prova a cegues van ser incapaces de diferenciar un Stradivarius d'altres violins de gran qualitat construïts en data recent. Encara més, la meitat dels especialistes van preferir el so dels instruments de nova factura. L'estudi es va publi-



car ahir a la revista *Proceedings of the National Academies of Sciences*.

Per determinar si els instruments clàssics eren realment superiors als actuals, creença molt estesa fins i tot entre els mateixos solistes de violí, la investigadora Claudia Fritz i el seu equip van reclutar els músics i els van embenar els ulls perquè no poguessin identificar-los. A continuació els van presentar 12 violins —sis de recents i sis de clàssics: cinc Stradivarius i un Guarnerius, igualment molt apreciat— i els van emplaçar perquè triessin quins serien els seus preferits per a un hipotètic concert. Els instrumentistes, set dels quals toquen habitualment amb violins clàssics, descomeixen la distribució numèrica.

Dues sessions
Els solistes van disposar de dues sessions d'as-



▶▶ Ilya Kaler

Els violins dels segles XVII i XVIII arriben a tenir preus milionaris.

DIMARTS 8 d'abril del 2014

el Periódico

Soloist evaluations of six Old Italian and six new violins

Claudia Fritz^{a,1}, Joseph Curtin^b, Jacques Poitevineau^a, Hugues Borsarello^a, Indiana Wollman^a, Fan-Chia Tao^d, and Thierry Ghasarossian^a

^aLaboratoire Acoustique-Musique, Institut Jean le Rond d'Alembert, Unité Mixte de Recherche 7190, Sorbonne Université - UPMC Univ Paris 06 / Centre National de la Recherche Scientifique, 75005 Paris, France; ^bJoseph Curtin Studios, Ann Arbor, MI 48103; ^cTheresa La Musica, 94300 Vinsonna, France; ^dAddress and Company, Farmingdale, NY 11735; and ^eÉcole Supérieure de Musique de la Sorbonne Université, 75005 Paris, France

Edited by Dale Purves, Duke University, Durham, NC, and approved March 11, 2014 (received for review December 16, 2013)

Many researchers have sought explanations for the purported tonal superiority of Old Italian violins by investigating varnish and wood properties, plate tuning systems, and the spectral balance of the radiated sound. Nevertheless, the fundamental premise of tonal superiority has been investigated scientifically only once very recently, and results showed a general preference for new violins and that players were unable to reliably distinguish new violins from old. The study was, however, relatively small in terms of the number of violins tested (six), the time allotted to each player (an hour), and the size of the test space (a hotel room). In this study, 10 renowned soloists each blind-tested six Old Italian violins (including five by Stradivari) and six new during two 75-min sessions—the first in a rehearsal room, the second in a 300-seat concert hall. When asked to choose a violin to replace their own for a hypothetical concert tour, 6 of the 10 soloists chose a new instrument. A single new violin was easily the most-preferred of the 12. On average, soloists rated their favorite new violins more highly than their favorite old for playability, articulation, and projection and at least equal to old in terms of timbre. Soloists failed to distinguish new from old at better than chance level. These results confirm and extend those of the earlier study and present a striking challenge to neo-conservative beliefs about Old Italian violins.

subjective evaluation | music | perception

The violins of Stradivari, Guarneri “del Gesù,” and other Italian makers of the 17th and 18th centuries are widely believed to possess playing qualities that are both immediately discernible to experienced players and not found in new instruments. Over the past two centuries, numerous playing and listening tests have challenged this belief by pitting new violins against old (1–3). Although results often favored new instruments, the tests typically lacked sufficient rigor for the results to stand as scientific evidence.

It is only recently that well-controlled studies of player preferences have appeared in the literature (4–6). In a 2010 double-blind test held in a hotel room at the International Violin Competition of Indianapolis (4), 21 experienced violinists compared three new violins with two by Stradivari and one by Guarneri del Gesù. Results showed that the most-preferred violin was new, the least-preferred was by Stradivari, and players seemed unable to tell whether their most-preferred instrument was new or old. However, the small number of violins and brief evaluation periods (less than an hour for each player) left many questions unanswered, the most obvious being whether results would hold with a larger set of test violins, a different group of players, longer evaluation periods, and more true-to-life test conditions.

Although the Indianapolis study focused on player preferences, violin quality can be judged from several other relevant points of view—including those of listeners, colleagues in an ensemble, recording engineers, and orchestral conductors. There is no a priori reason to assume that all should agree or that one party's preference is more “correct” than the other. For example, a violinist might prefer an instrument that is the easiest or most inspiring to play whereas listeners choose another because it

carries better in a hall.

That said, violinists have at least two advantages over their audiences when evaluating instruments. They are inside a feedback loop and so have their judgments upon interaction rather than passive listening. They are also very close to the instrument, where its sound is most intense and least colored by room modes. And, in the end, it is violinists who choose their first mounts and whose judgments are therefore most consequential.

The current study was designed to extend the Indianapolis findings with a larger number of violins and then explore how well judgments carry from a small venue to a larger one. Whereas the Indianapolis study relied on 21 players of various levels, this study concentrated on the judgments of 10 renowned soloists. Blind tests were conducted in both a small rehearsal room and a concert hall, with the option of piano accompaniment and listener feedback in the latter.

Materials and Methods

The Tests. Although it is unusual to describe the terms, given the nature of this experiment, we believe it important to provide some detail. Designing an ecologically valid experiment that answers questions relevant to the violin world requires a variety of aspects with differing interests. The team that included several conductors, a violin maker and researcher who builds and sells new violins, a violin soloist who owns and plays an Old Italian violin, a professional violin and instrument dealer who owns several Old Italian instruments, and a string engineer and amateur violinist who owns and plays an Old Italian violin.

General Design. The experiment was designed around the hypothetical premise that each soloist was testing for a violin to replace his or her own instrument for an upcoming solo tour. Tests were structured to emulate as far as possible the way a player might do this search in real life. Typically, a number of instruments are informally tested at a violin shop; then one

Significance

Some studies open new fields for investigation; this study attempts to close a potentially fruitful one—the search for the “secrets of Stradivari.” Great efforts have been made to explain why instruments by Stradivari and other Old Italian makers sound better than high-quality new violins, but without providing scientific evidence that this is in fact the case. Doing so requires that experienced violinists demonstrate (under double-blind conditions) both a general preference for Old Italian violins and the ability to reliably distinguish them from new ones. The current study, the second of its kind, again shows that first-rate soloists tend to prefer new instruments and are unable to distinguish old from new at better than chance level.

Author contributions: C.F., J.C., J.P., and H.B. designed research; C.F., J.C., H.B., I.W., F.-C.T., and T.G. performed research; C.F., J.C., and J.P. analyzed data; and C.F., J.C., and J.P. wrote the paper.

The authors declare no conflict of interest.

This article is a PNAS Direct Submission.

See Commentary on page 7364.

To whom correspondence should be addressed: e-mail: claudia@fritzlab.org.

This article is a PNAS Direct Submission. Dale Purves is the editor-in-chief and the author of the accompanying article.

© 2014 the authors. 0027-8125/14/3104-0722\$15.00/0.

7224-7229 | PNAS | May 20, 2014 | vol. 111 | no. 20

www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1323207111

...cara que s'havien realitzat proves semblants amb anterioritat, Fritz i els nostres antecessors. Hem fer els nostres antecessors. Hem après d'ells». ≡

Soloist evaluations of six Old Italian and six new violins

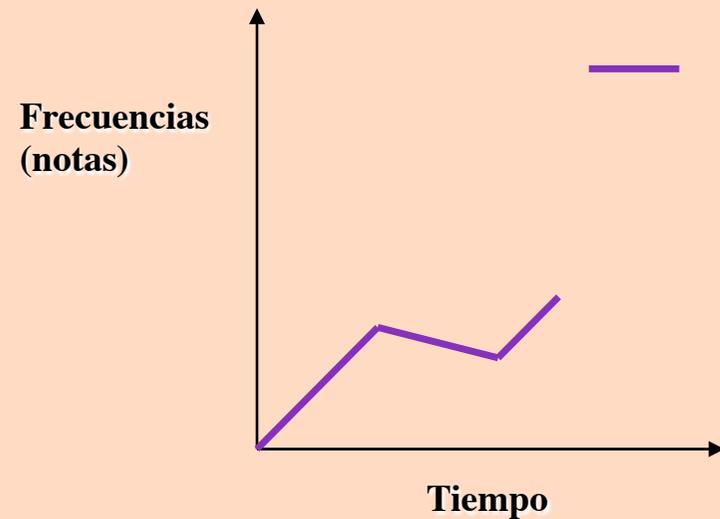
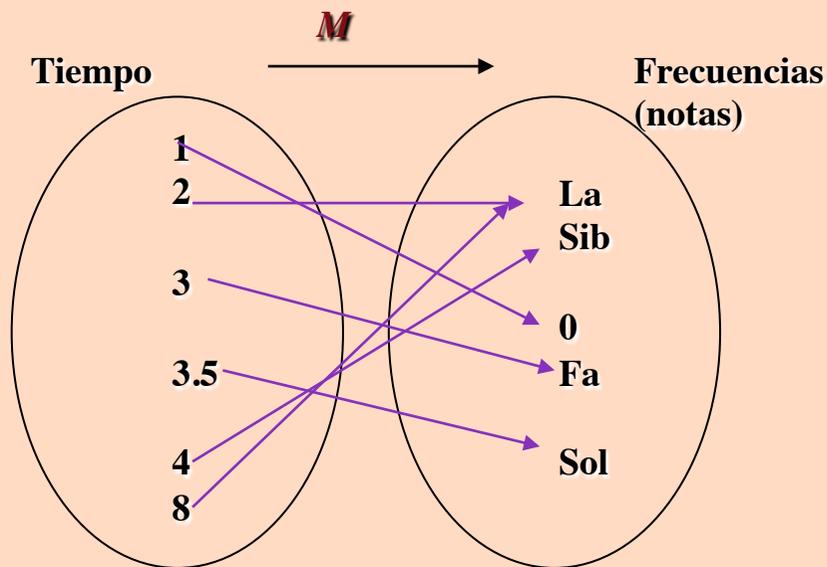
C. Fritz^a, J. Curtin^b, J. Poitevineau^a, Hugues Borsarello^a, I. Wollman^a, F.-C. Tao^d, T. Ghasarossian^a

Proceedings of the National Academy of Sciences

nien prou ext per la brevedat que va ser que eleccionar un instrument prefereix sempre el maltrès quatre unciar. Quantar numèricament, els elements, el ser regla genevades. Finalmentar als so in endevinar a majoria no rències subst, com escriafien la creengnada que els tenen qualipoden trobar

re de guitarres ques, considerats, i atribueixen violins italians factors ali la seva opitèixi un molt és inevitable de fusta peras del temps: n ser fins i tot el vi», però nés a més, se els temps can servir l'ordils, però més els tecnològels lutiens acem el que van

“Música es el arte de (bien) combinar los sonidos con el tiempo”



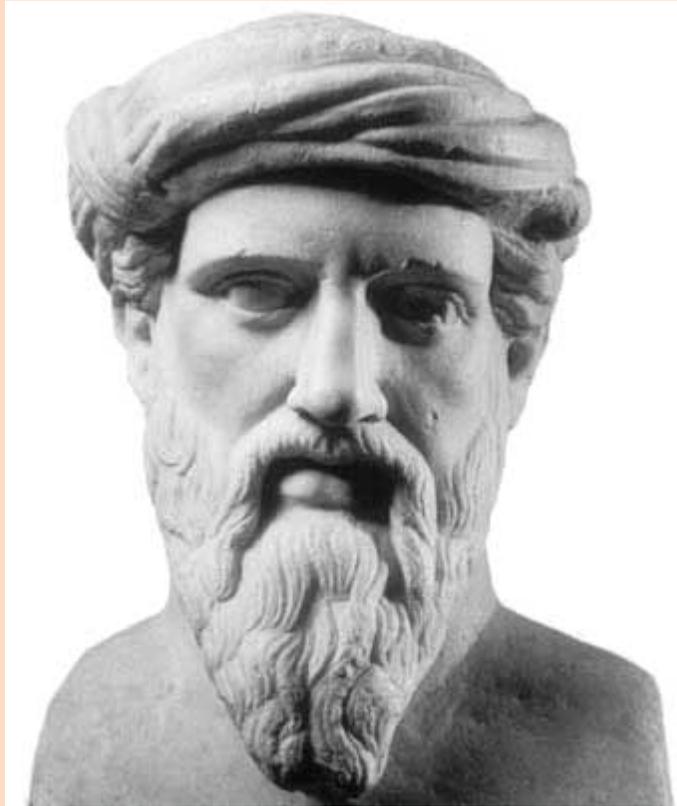
CUALIDADES DEL SONIDO

La altura o tono. Está determinado por la frecuencia de la onda. Medimos esta característica en ciclos por segundos o Hercios (Hz). Para que podamos percibir los humanos un sonido, éste debe estar comprendido en la franja de 20 y 20.000 Hz.

La intensidad. Nos permite distinguir si el sonido es fuerte o débil. Está determinado por la cantidad de energía de la onda. Los sonidos que percibimos deben superar el umbral auditivo (0 dB) y no llegar al umbral de dolor (140 dB).

La duración. Está relacionada con el tiempo de vibración del objeto. Por ejemplo, podemos escuchar sonidos largos, cortos, muy cortos, etc..

El timbre. Permite distinguir la fuente sonora. Cada material vibra de una forma diferente provocando ondas sonoras complejas que lo identifican.



Pitágoras de Samos
(580 – 495 a. C)

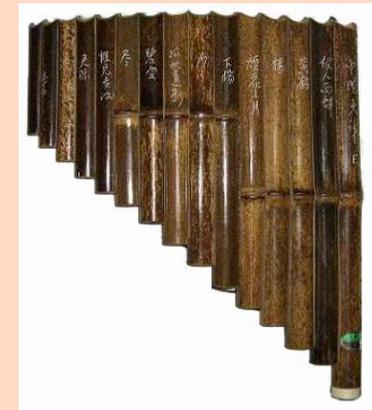


Confucio
(551 – 479 a. C.)

Confucio

“Hace miles de años, envió al matemático Ling Lun, el regente musical, a las fronteras occidentales del reino para acometer una empresa de vital importancia: en los bosques más vírgenes y remotos, debía encontrar un pedazo de bambú y fabricar con él una flauta cuyo sonido igualase la belleza del canto de los pájaros, el murmullo de las hojas mecidas por el viento, y el sonido de las aguas tañidas por la piedra. Del éxito de aquella misión, dependía la supervivencia y la paz de todo el Reino.

En un valle, Ling Lun cortó una caña de bambú por uno de los nudos, de manera que diese el tono anhelado: el de la voz del hombre cuando habla sin pasión. A partir de ese tono, ideó un método para obtener el resto. Si la música iba a ser la herramienta para que los hombres expresasen la armonía entre el cielo y la tierra, como 3 es el número del cielo y 2 el de la tierra, los sonidos que están en proporción 3 a 2 armonizan como cielo y tierra, por lo tanto los sonidos de la música deberían basarse en esos números.”



La flauta de Pan se utilizó durante siglos para Determinar la afinación

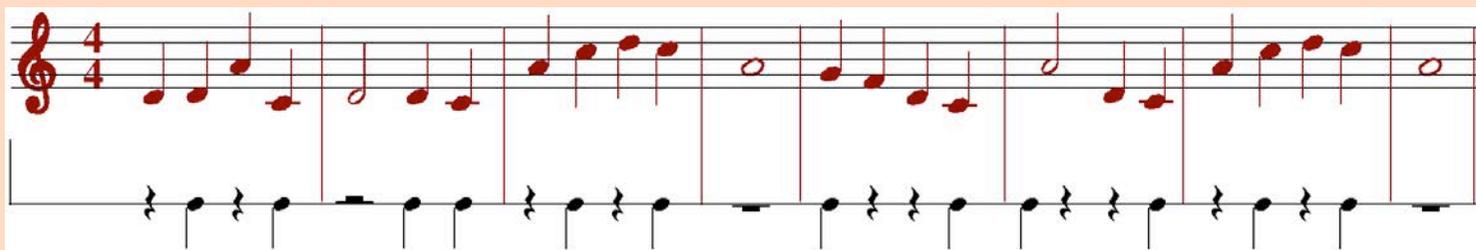
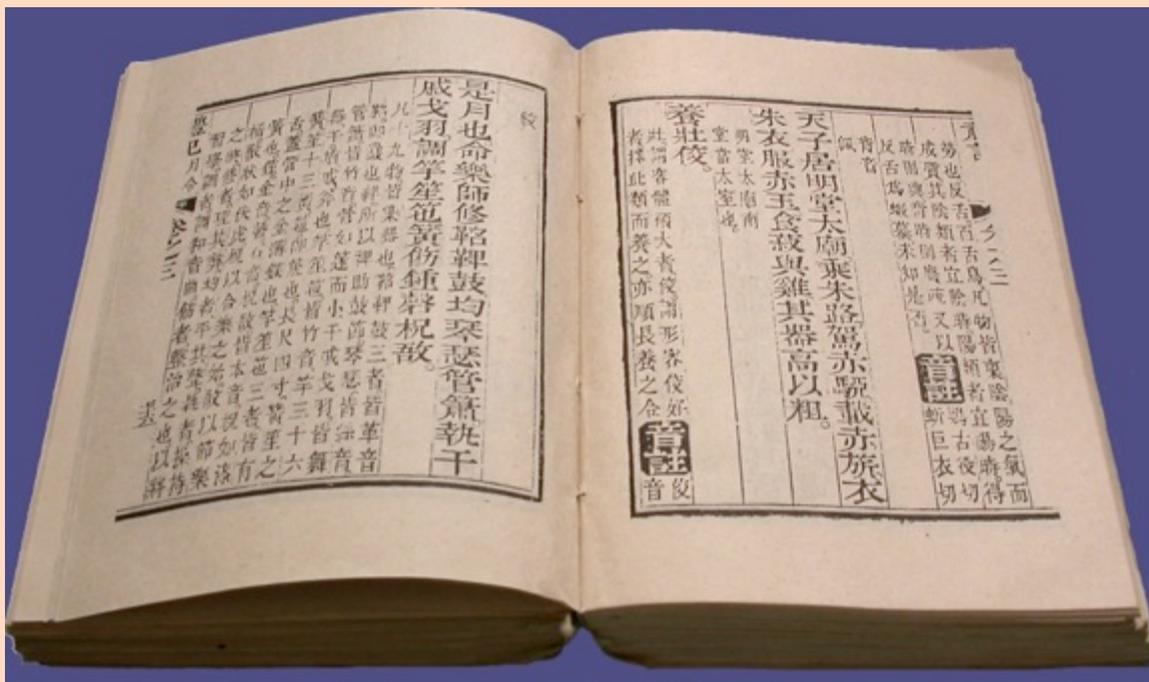
Pitágoras

“Cierta vez, mientras calculaba si sería posible idear algún tipo de ayuda instrumental para los oídos que fuera firme e inequívoca... se produjo una milagrosa casualidad. Al pasar cerca de una fragua, escuchó cómo los martillos golpeaban el hierro contra el yunque, produciendo los sonidos que son más armoniosos; si se combinan entre sí, excepto un par. Entre ellos, pudo reconocer la consonancia de la octava, la quinta y la cuarta. Pero notó que el intervalo entre la cuarta y la quinta era disonante en sí mismo, pero era complementario a la mayor de estas dos consonancias.

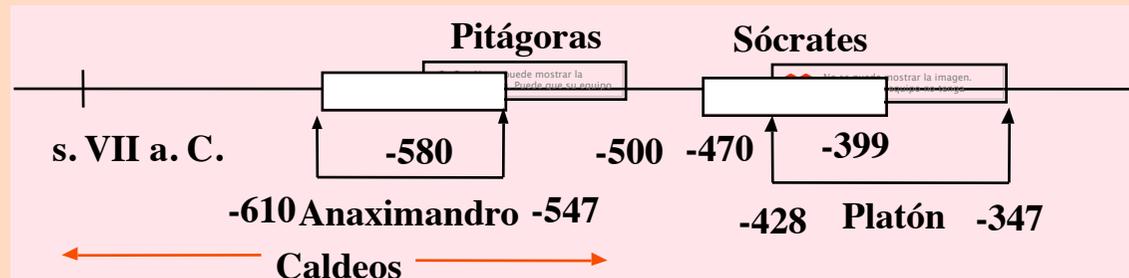
Contento, pues parecía que sus deseos habían sido satisfechos por un dios, corrió hacia el interior de la fragua y encontró tras realizar varios experimentos, que la diferencia de sonido era consistente con el peso de los martillos, pero no con la fuerza de los golpes, ni con las formas de los martillos, ni con la alteración del hierro al ser forjado. Tomó nota de los pesos de los martillos y de su momento de inclinación, que era idéntico, y se marchó.”



**En el *Harmonikón Enchiridion*
de Nicómaco
(alrededor del 100 a.C.)**



Marcha de Entrada del Emperador en el Templo,
dinastía Chou (1050 a. C. – 256 a. C)

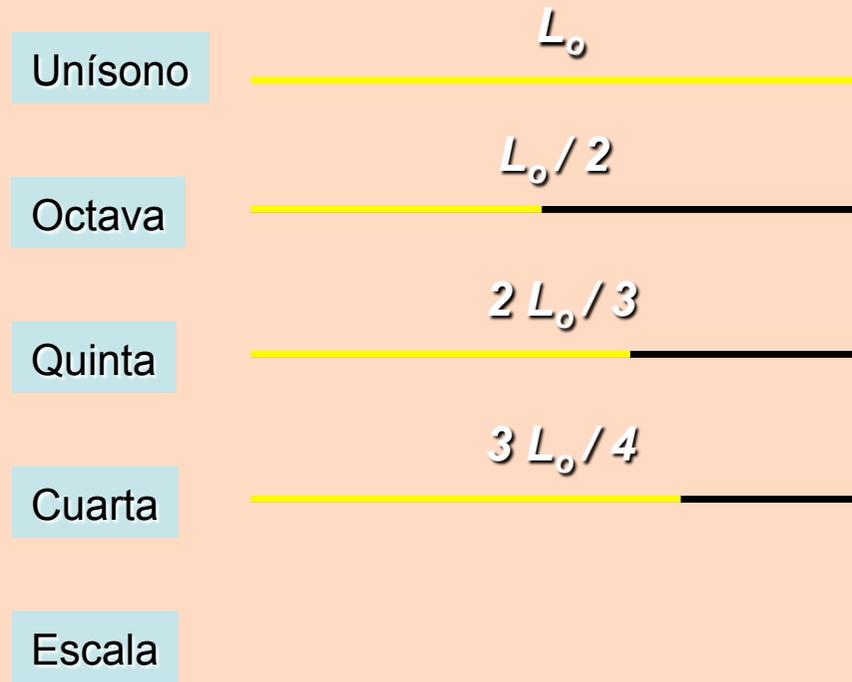


I. Stewart, *Matemáticas de la escala musical.* Investigación y Ciencia, 1996
De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy. Ed. Crítica, 1998

Astronomía

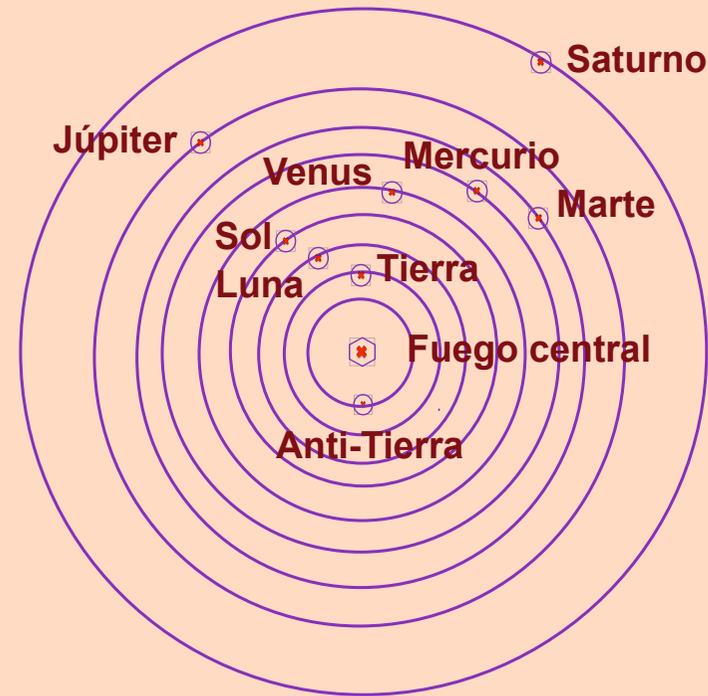
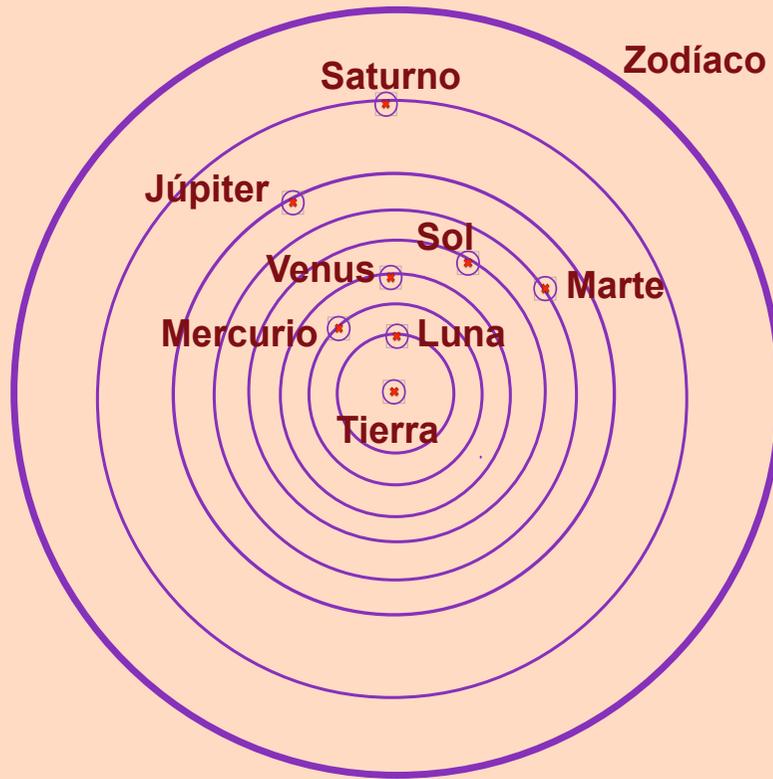


Representación caldea



Ciencia = Ciencia de los números
Filosofía = Matemáticas de la Naturaleza

“la década es la fuente de todo, es el principio y la reina de la vida divina, celestial y humana”



Filolao (s. V - IV a. C)

Afinación pitagórica

Axiomas

La música se obtiene a partir de **7** notas

La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por **3** tantas veces como se quiera

La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por **2** tantas veces como se quiera

0 = Do 1 = Re 2 = Mi 3 = Fa 4 = Sol 5 = La 6 = Si

- ▼ ¿Qué es afinar?
- ▼ ¿Ha sido siempre así?
- ▼ ¿Por qué se utilizan **7** ó **12** notas y no **10** ó **31**...?
- ▼ ¿Qué papel juegan las matemáticas en la música?
- ▼ ¿Aún quedan problemas abiertos?

- ▼ ¿Se puede afinar una orquesta sinfónica?
- ▼ ¿Oímos música o matemáticas?

Afinación

Conjunto de sonidos $\mathbb{R}^+ \Rightarrow [16, 20000]$ Hz

Afinar es elegir una cantidad finita de sonidos \Rightarrow Notas Musicales

$$\{ s_i \in \mathbb{R}^+ : \text{verifican } C_j, \quad j = 1, \dots, m \}$$

Ejemplo: Dada $f_0 = 440$ Hz, multiplicamos por 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6

$$\{ 440, 220, 146.666, 110.88, 73.333 \}$$

**SISTEMAS
AFINACIÓN**

Afinaciones

S. Pitagórico $\Rightarrow \infty$ notas

Justa entonación

- Sistema de Ptolomeo
- Sistema de Zarlino
- Sistema de Delezenne
- ...

$\Rightarrow \infty$ notas

Temperamentos

Regulares

Mesotónicos

Mesotónicos

- 1/4 comma sint.
- 1/3 comma sint.
- 2/7 comma sint.
- ...

$\Rightarrow \infty$ notas

Cíclicos

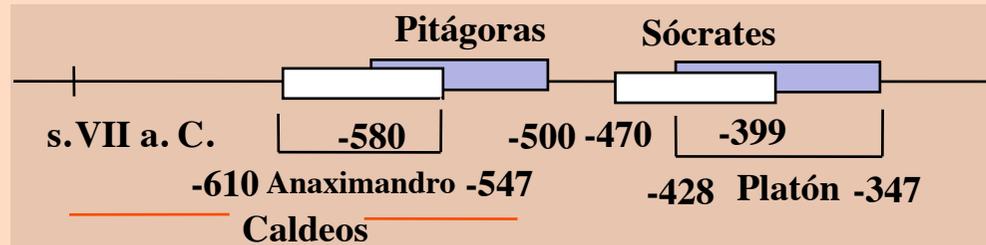
- 1/4 comma sint. \Rightarrow 31 notas
- 1/3 comma sint. \Rightarrow 19 notas
- 2/7 comma sint. \Rightarrow 50 notas
- Hölder \Rightarrow 53 notas

Iguales $\Rightarrow 12, 24, \dots, 12k$ notas

Irregulares

- Werckmeister, 1/4 de comma
- Werckmeister, 1/3 de comma
- Vallotti, 1/6 de comma
- ...

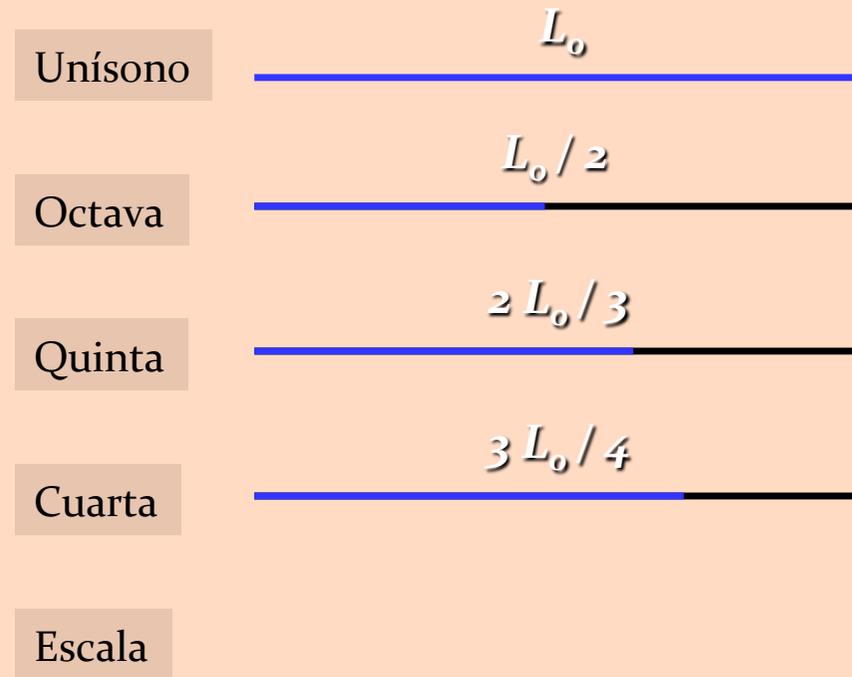
$\Rightarrow 12$ notas



Astronomía

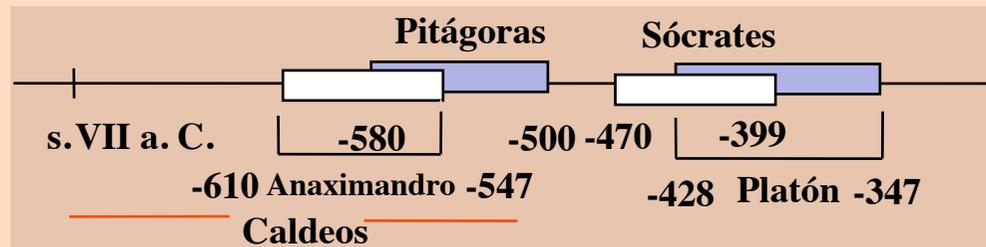


Representación caldea



Ciencia = Ciencia de los números

Filosofía = Matemáticas de la Naturaleza



Representación caldea



Ciencia = Ciencia de los números

Filosofía = Matemáticas de la Naturaleza

Axiomas

La música se obtiene a partir de **7** notas

La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por **3** tantas veces como se quiera

La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por **2** tantas veces como se quiera

0 = Do 1 = Re 2 = Mi 3 = Fa 4 = Sol 5 = La 6 = Si

0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6

→ naturales

0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6

→ naturales

0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6

→ 1 bemol

0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6

→ naturales

0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6

→ 1 sostenido

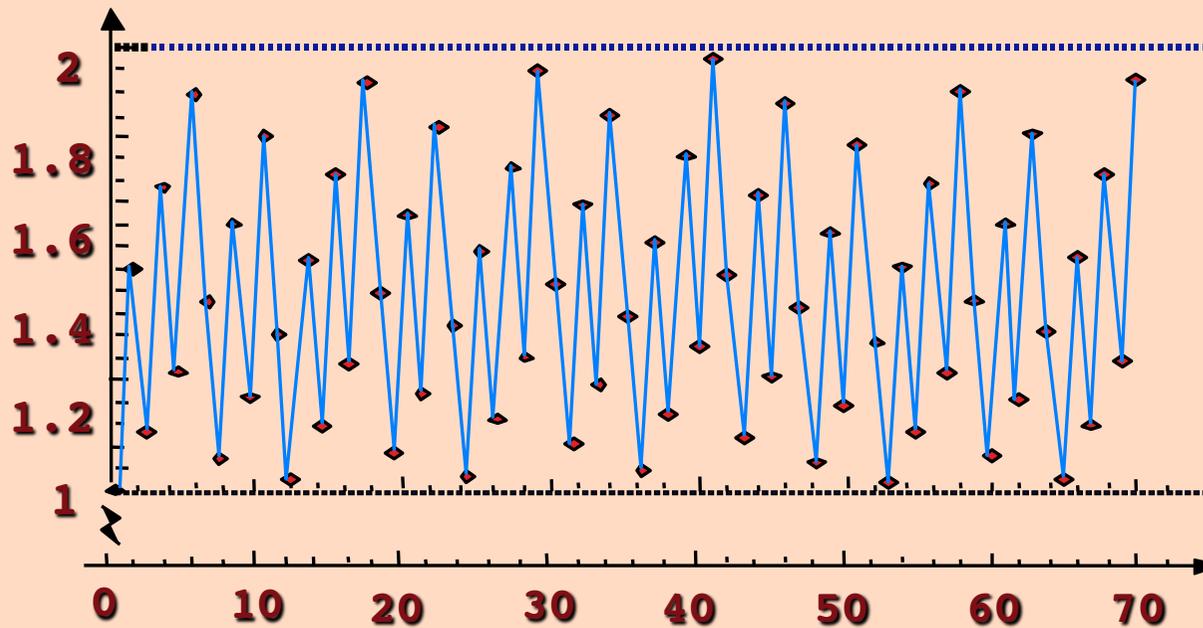
↑
Dividir la frecuencia
entre 3

↓
Multiplicar la
frecuencia
por 3

¿Es lo mismo un **La[#]** que un **Sib^b** ?

Si f_0 es un do, tenemos \Rightarrow **La[#]** = $3^{10} / 2^{15} f_0 = 1.80203 f_0$

\Rightarrow **Sib^b** = $2^4 / 3^2 f_0 = 1.77777 f_0$



$$a_n = 3^n / 2^{E[n \log_2 3]}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Traducción:

$$a_n = \frac{3^n}{2^{E(\log_2 3^n)}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$N(n) = 4n + 3 - 7E\left(\frac{4n + 3}{7}\right) = \text{número de la nota}$$

$$A(n) = E\left(\frac{n}{7}\right) = \text{número de alteraciones}$$

¿Qué notas son los términos a_5 y a_{-8} ?

$$1) N(5) = 4 \cdot 5 + 3 - 7E\left(\frac{4 \cdot 5 + 3}{7}\right) = 2.$$

$$A(5) = E\left(\frac{5}{7}\right) = 0$$

Por tanto es la nota 2 sin ninguna alteración, es decir

$$a_5 = mi$$

$$2) N(-8) = 4(-8) + 3 - 7E\left[\frac{4(-8) + 3}{7}\right] = 6.$$

$$A(-8) = E\left[\frac{-8}{7}\right] = -2$$

Por tanto es la nota 6 con dos alteraciones que, por ser negativas, se trata de bemoles. Entonces,

$$a_{-8} = si^{bb}.$$

Traducción:

fa^A	$= 0 + 7 \cdot A$	$A \in \mathbb{Z}$ es el número de alteraciones de la nota
do^A	$= 1 + 7 \cdot A$	
sol^A	$= 2 + 7 \cdot A$	
re^A	$= 3 + 7 \cdot A$	
la^A	$= 4 + 7 \cdot A$	
mi^A	$= 5 + 7 \cdot A$	
si^A	$= 6 + 7 \cdot A$	

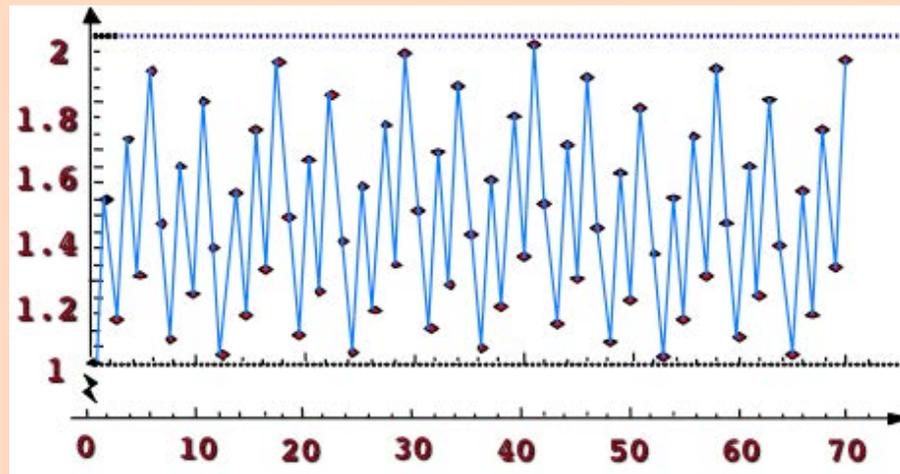
¿Qué términos son las notas sol^{bbb} y $fa^{##}$?

- 1) sol^{bbb} tiene tres alteraciones negativas (por ser bemoles), entonces $A = -3$. Sustituyendo en el cuadro anterior, sol^{bbb} ocupa el lugar $2 + 7 \cdot (-3) = -19$. Es decir,

$$sol^{bbb} = a_{-19}.$$

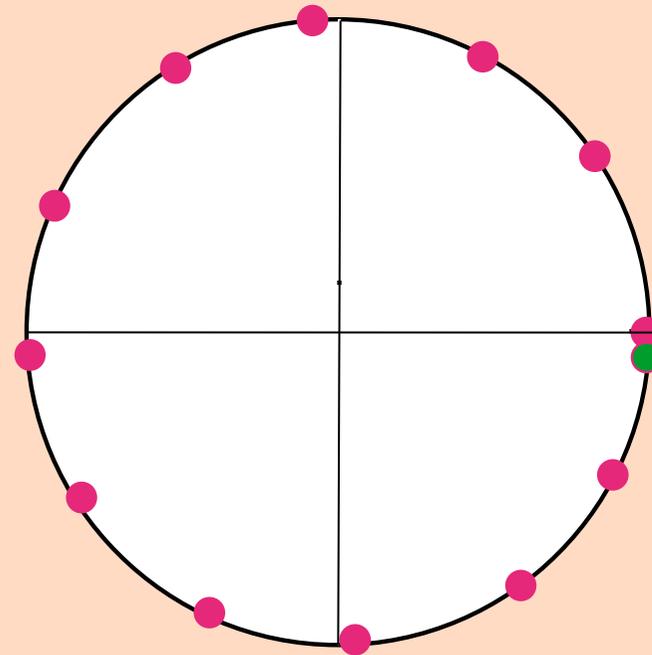
- 2) $fa^{##}$ tiene dos alteraciones positivas (por ser sostenidos), entonces $A = 2$. Sustituyendo en el cuadro anterior, $fa^{##}$ ocupa el lugar $2 + 7 \cdot 2 = 16$. Es decir,

$$fa^{##} = a_{16}.$$



$$a_n = 3^n / 2^{E[n \log_2 3]}, \quad n \in \mathbb{N}$$

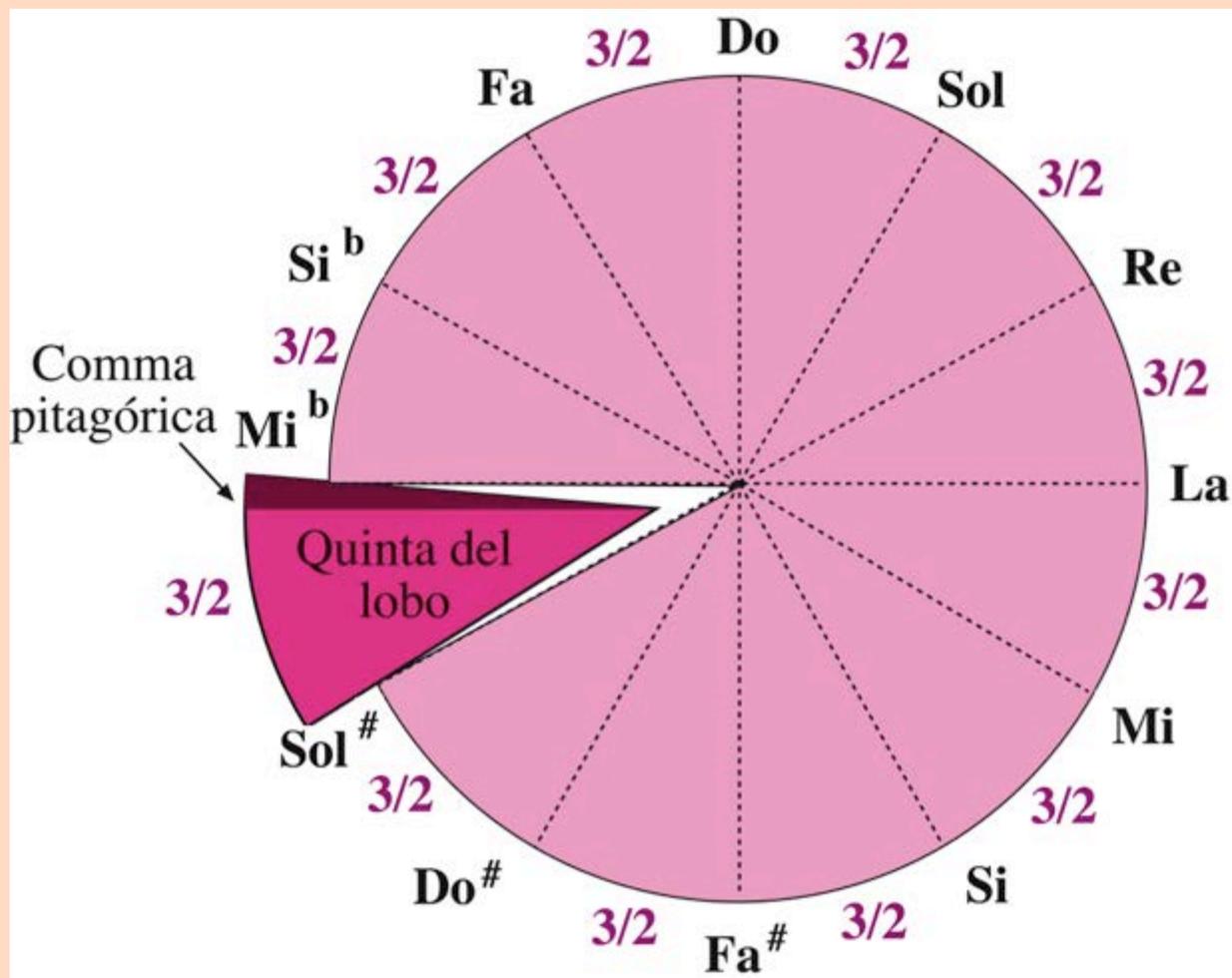
“Círculo” de quintas



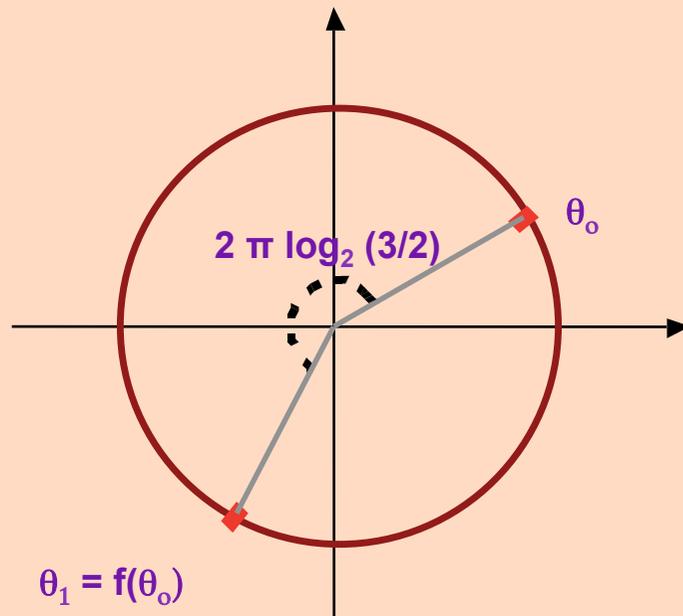
Do-Sol-Do

Do-“Sol”-Do

Sol - “Sol”



$$2 \pi \log_2 (3/2) \approx 210^\circ 35' 11''$$



$$f(\theta_0) = \theta_0 + 2 \pi \log_2 (3/2)$$



$$f^n(\theta_0) = \theta_0 + 2 \pi n \log_2 (3/2)$$

Proposición : La órbita

$\text{Or}(\theta_0) = \{ x \in S^1 : x = f^n(\theta_0) \}$
es densa en S^1

Proposición: Si aceptamos

$2 \pi \log_2 (3/2) \approx 210^\circ$,
entonces $f^{12}(\theta_0) = \theta_0$

Fracciones continuas simples

Una fracción continua (simple) es una expresión de la forma siguiente:

$$c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 \dots}}$$

En realidad, las fracciones continuas son una sucesión de números racionales, llamados convergentes, que se obtienen de la forma siguiente:

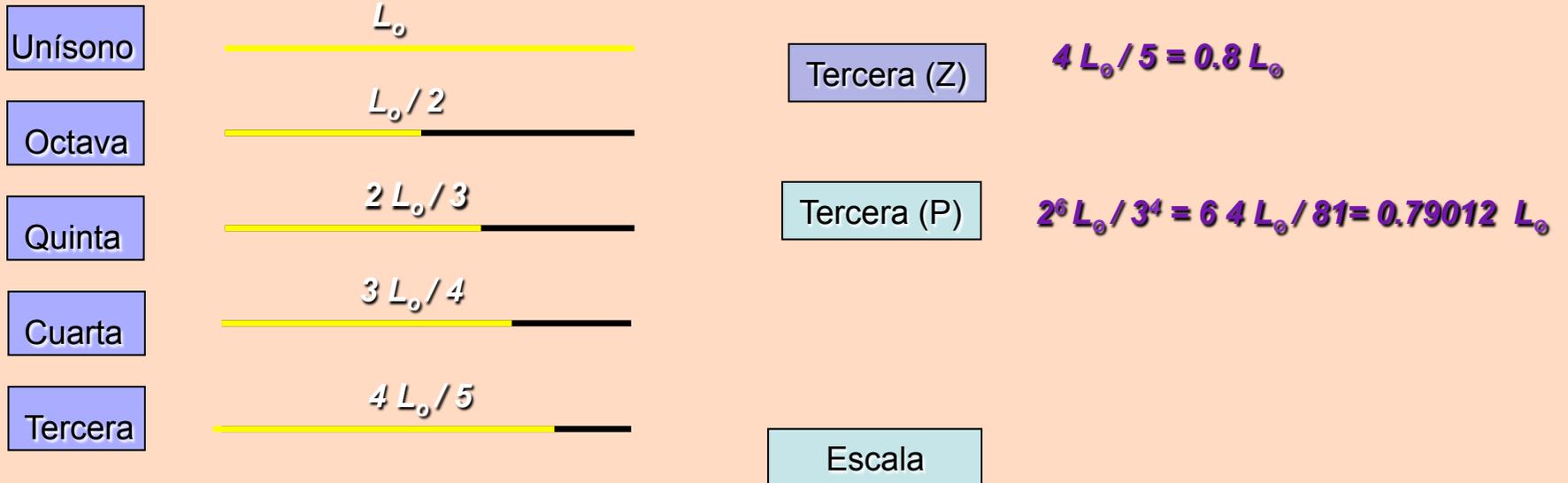
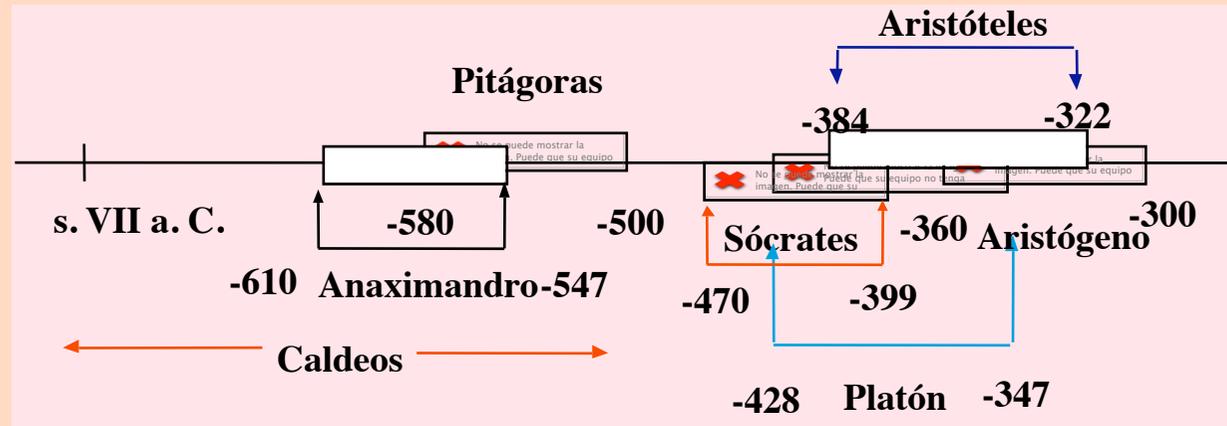
$$\frac{n_1}{d_1} = c_1, \quad \frac{n_2}{d_2} = c_1 + \frac{1}{c_2}, \quad \frac{n_3}{d_3} = c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3}}, \dots$$

Esta sucesión converge a un número real α que queda determinado por la fracción continua,

$$\frac{n_1}{d_1} < \frac{n_3}{d_3} < \dots \leq \alpha \leq \dots < \frac{n_4}{d_4} < \frac{n_2}{d_2}$$

Justa entonación

Escala de los Físicos
de Aristógeno
de Zarlino



1. Modificaciones de Arquitas (430 - 360 a. C.)

$2/1$ $3/2$ $4/3$ son del tipo $(n+1) / n$

$$9/8 \cdot 10/9 \cdot 16/15 \Rightarrow 9/8 \cdot 10/9 \cdot 16/15 = 4/3$$

2. Modificaciones de Aristóxeno (360 - 300 a. C.)**3. Modificaciones de Ptolomeo (100 - 170)****4. Modificaciones de Zarlino (1517 - 1590)**

Afinidad entre los sonidos cuyas frecuencias son proporcionales a

$1, 2, 3, 4, 5, 6$

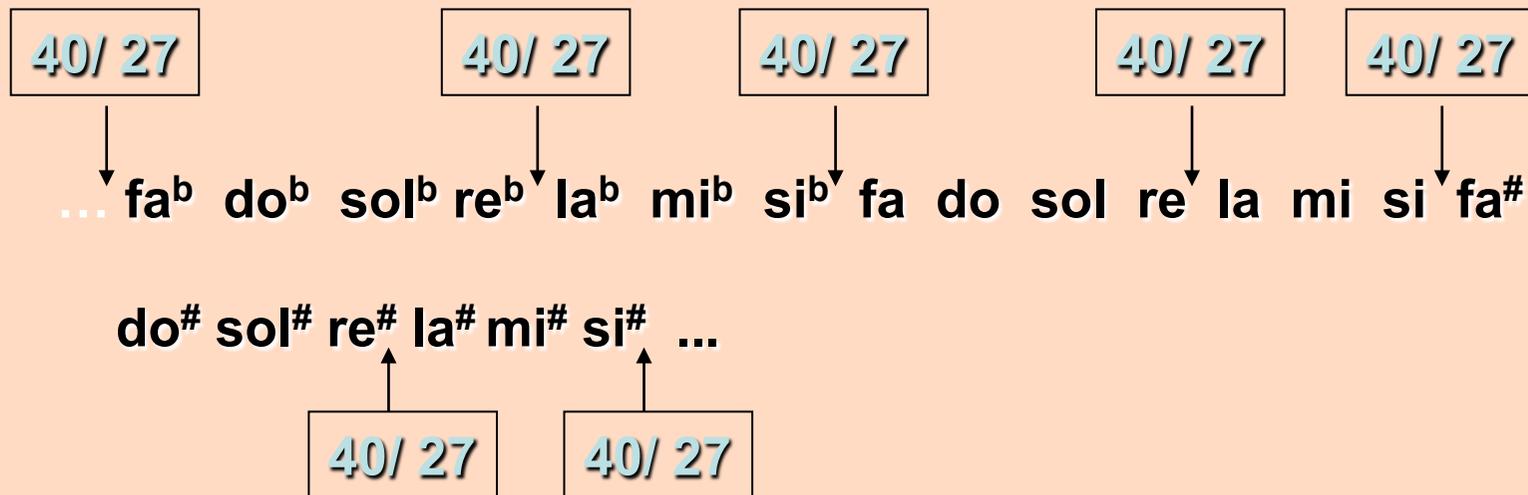
La longitud de las cuerdas que los producen son

$1/1$ $1/2$ $1/3$ $1/4$ $1/5$ $1/6$

5. Modificaciones de Kepler (1571 - 1630)**6. Modificaciones de Delezenne (1776 - 1866)**

Una forma de presentarlo es

$$3 / 2 \approx 40 / 27 \Rightarrow 80 \approx 81$$

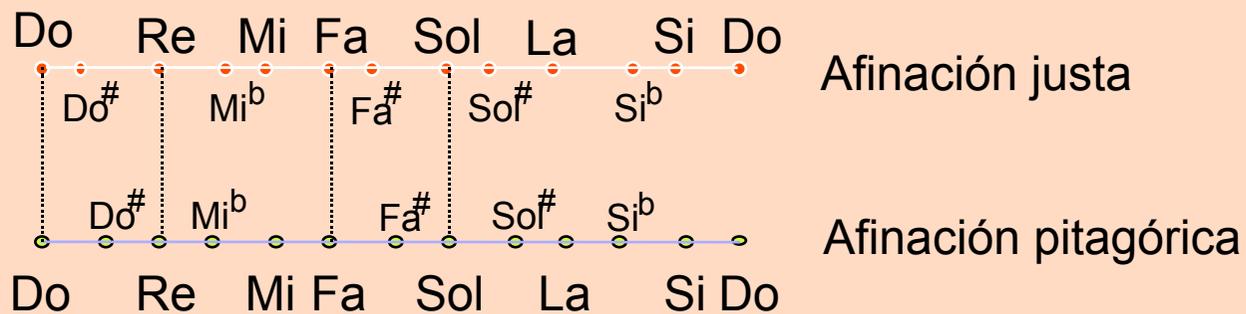


$$a_n = \frac{3^{n-1-4(E[n/7] + E[(n+3)/7])} 5^{E[n/7] + E[(n+3)/7]}}{2^{E\{\log_2 3^{n-1-4(E[n/7] + E[(n+3)/7])} 5^{E[n/7] + E[(n+3)/7]}\}}}$$

Inconvenientes

Cantidad óptima de notas?

Transposición



- Dados dos sonidos de frecuencias f_1 y f_2 , decimos que f_2 es una **octava más alto** que f_1 si f_2 es el doble de f_1 .
- Dos notas que distan una octava reciben el mismo nombre.
- En \mathbb{R}^+ (conjunto de las frecuencias de todos los sonidos) definimos la siguiente relación binaria de equivalencia:

$$f_1 \mathcal{R} f_2 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f_1 = 2^n f_2$$

- En lugar de trabajar con \mathbb{R}^+ , estudiamos el conjunto cociente \mathbb{R}^+/\mathcal{R} . Una vez fijada una nota f_0 (diapasón),

$$\mathbb{R}^+/\mathcal{R} = [f_0, 2f_0[.$$

- Hacemos $f_0 = 1$ y trabajamos en el intervalo $[1, 2[$.

Sea f_1/f_2 un intervalo y $\lambda = |\log_2(f_1/f_2)|$. Llamamos *sistema de afinación generado por λ* al conjunto

$$S := \{2^{cn} \mid c_n = \lambda n - [\lambda n], n \in \mathbb{Z}\} \subset [1, 2[$$

donde $[x]$ es la parte entera por defecto de x .

Algunos sistemas están generados por más de un intervalo, y en este caso es necesario especificar cuándo y cuántas veces aparece cada intervalo:

Sean $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset [0,1[$ y $F = \{h_i : Z \rightarrow Z\}_{i=1}^k$ una familia de funciones, llamamos **sistema de afinación generado por los intervalos Λ y F** al conjunto

$$S_{\Lambda}^F = \left\{ 2^{c_n} : c_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(n) - \left\lfloor \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(n) \right\rfloor, n \in Z \right\}$$

Sensación de altura

Tuning system	Generators	Functions
• Pythagorean	$\alpha = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$	$f(n) = n - 1$
• Equal temp. 12	$\alpha = \frac{7}{12}$	$f(n) = n - 1$
• Hölder-Mercator	$\alpha = \frac{31}{53}$	$f(n) = n - 1$
• Regular meantone $\frac{a}{b}$ commas, T(a/b)	$\alpha = \frac{1}{b} \log_2\left(\frac{2^{4a-b} 5^a}{3^{4a-b}}\right)$	$f(n) = n - 1$
• Zarlinean (Just Intonation)	$\alpha_1 = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ $\alpha_2 = \log_2\left(\frac{5}{4}\right)$	$f_1(n) = n - 1 - 4f_2(n)$ $f_2(n) = \lfloor \frac{n}{7} \rfloor + \lfloor \frac{n+3}{7} \rfloor$
• Delezenne (Just Intonation)	$\alpha_1 = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ $\alpha_2 = \log_2\left(\frac{5}{4}\right)$	$f_1(n) = n - 1 - 4f_2(n)$ $f_2(n) = \lfloor \frac{n+1}{5} \rfloor$
• Neidhart's circ. temp, No. 1 ($\frac{1}{12}$ cp & $\frac{1}{6}$ cp)	$\alpha_1 = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ $\alpha_2 = \frac{1}{6} \log_2\left(\frac{2^{13}}{3^6}\right)$ $\alpha_3 = \frac{7}{12}$	$f_1(n) = -1 + \lfloor \frac{n}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+3}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+4}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+11}{12} \rfloor$ $f_2(n) = \lfloor \frac{n+7}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+8}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+9}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+10}{12} \rfloor$ $f_3(n) = \lfloor \frac{n+1}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+2}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+5}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+6}{12} \rfloor$
• Neidhart, No. 3 ($\frac{1}{12}$ cp & $\frac{1}{6}$ cp)	$\alpha_1 = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ $\alpha_2 = \frac{1}{6} \log_2\left(\frac{2^{13}}{3^6}\right)$ $\alpha_3 = \frac{7}{12}$	$f_1(n) = -1 + \lfloor \frac{n+11}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+6}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+2}{12} \rfloor$ $f_2(n) = \lfloor \frac{n+8}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+9}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+10}{12} \rfloor$ $f_3(n) = \lfloor \frac{n}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+1}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+3}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+4}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+5}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+7}{12} \rfloor$
• Temp. Ganassi (Six intervals)	$\alpha_1 = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ $\alpha_2 = \log_2\left(\frac{40}{27}\right)$ $\alpha_3 = \log_2\left(\frac{128}{85}\right)$ $\alpha_4 = \log_2\left(\frac{85}{57}\right)$ $\alpha_5 = \log_2\left(\frac{76}{51}\right)$ $\alpha_6 = \log_2\left(\frac{68}{45}\right)$	$f_1(n) = -1 + \lfloor \frac{n+1}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+3}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+6}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+7}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+8}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+10}{12} \rfloor + \lfloor \frac{n+11}{12} \rfloor$ $f_2(n) = \lfloor \frac{n+9}{12} \rfloor$ $f_3(n) = \lfloor \frac{n+5}{12} \rfloor$ $f_4(n) = \lfloor \frac{n+4}{12} \rfloor$ $f_5(n) = \lfloor \frac{n+2}{12} \rfloor$ $f_6(n) = \lfloor \frac{n}{12} \rfloor$

	Sistema de afinación			
	Pitagórico	de Zarlino	Temperado (12)	Hölder
Do	260,7407	264	261,6256	260,7716
Re^b	274,6898	275		274,7764
Do[#]	278,4375	285,12		278,3936
Re	293,3333	297		293,3449
Mi^b	309,0261	309,375		309,0991
Re[#]	313,2422	316,8		313,1681
Mi	330	330		329,9870
Fa	347,6543	352		349,2282
Sol^b	366,2531	366,6667		366,3830
Fa[#]	371,25	380,16		369,9944
Sol	391,1111	396		391,9954
La^b	412,0347	412,5		412,1484
Sol[#]	417,6562	422,4		417,5739
La	440	440		440
Si^b	463,5391	458,3		463,6304
La[#]	469,8633	475, 2		469,7337
Si	495	495		494,9610