Morris, R. (1982): *Combinatorialty without the aggregate*, Perspectives of new Music, USA.

Resumen de Oscar Pablo Di Liscia

Cadenas y CMs(Matrices Combinatorias)

Una **<u>secuencia</u>** de pcs es una organización sucesiva de estos en la que se agrupan uno o varios de ellos en **<u>posiciones</u>**. El orden en que aparece cada posición es significativo, pero el orden en que aparece cada pc dentro de una posición no lo es. Por ejemplo:

094 | 123 | 591 | 067

Es una secuencia formada por cuatro posiciones:

094
123
591
067

En las que el orden de los pcs que la integran es indistinto. Esto quiere decir que, por ejemplo, en la posicion 1, los ordenamientos: 094, 049, 409, 490, 940 y 904, son indistintos.

La unión de dos posiciones adyacentes se denomina **<u>norma</u>**. Por ejemplo, a continuación se señalan las normas de la secuencia anterior:

094 | 123 | 591 | 067 | (094)

Una **<u>cadena</u>** se diferencia de una **<u>secuencia</u>** de pcs en que en la cadena, todas las normas deben ser miembros de una Clase de Set(SC) o de dos Clases de sets. Esto es, **las normas de una cadena deben relacionarse por trasposición o trasposición invertida**.

Ejemplo 1a. de Morris(1983):

6-46 C   6-46 T5C
094 | 562 | 79B | A52
6-46 TBIC

Una cadena puede ser **<u>completa</u>** o **<u>incompleta</u>**. El ejemplo anterior muestra una cadena incompleta, porque la unión de su última posición (A52) con la primera (094) no pertenece a la SC 6-46. El ejemplo 1.b muestra una cadena completa formada por dos SC, el set denominado D = {0,1,5,7}(SC 4-16) y el denominado E {1,2,3,5,7,9}(SC 6-22):

D T6D

01| 57 | 1239 | 7B | 61 | 753B | (01)

E T8IE

TAE T4IE

Pueden obtenerse, además, normas secundarias que son de interés, pero las normas que definen a una cadena resultan siempre solapadas.

<u>Resumen de conceptos tratados hasta ahora:</u>

Secuencia
Posición
Norma
Cadena
Cadena completa
Cadena incompleta

Una **CM** es un conjunto bidimensional de posiciones dispuestass en I filas y J columnas. Una posición en la cadena Z se da por Z(I,J) y puede estar vacía o llena con un set de pcs desordenado. Hay I*J posiciones en una CM. **La unión de cualquiera de sus filas o columnas de posiciones de una CM es una norma.**

Hay tres tipos de CM:

Tipo I: todas sus normas son de la misma SC.

Tipo II: todas las normas verticales(columnas) pertenecen a la misma SC y todas sus normas horizontales(filas) pertenecen a la misma SC, distinta de la de la norma vertical.

Tipo III: se forma con dos normas(cada una perteneciente a una SC), pero cada una de ellas debe estar representada al menos una vez en las filas como en las columnas.

A su vez, las CM pueden ser:

Simples: se pueden contruir con cualquier SC como norma. Las normas se obtienen por simple trasposicion.

No-simples: no se pueden construir con cualquier SC como norma, dependen de las propiedades especiales de sus normas. Las normas no se obtienen por simple trasposición.

Ejemplos:

CM tipo I , simple				
	T6X	T7X	X	T2X
X	0	1	6	8
T2X	2	3	8	A
T6X	6	7	0	2
T7X	7	8	1	3
X={0,1,6,8}				

CM tipo II, simple			
	Y	T4Y	T9Y
X	5	9	2
T1X	6	A	3
T4X	9	1	6
T5X	A	2	7
X={2,5,9} Y={5,6,9,A}			

CM tipo II, no-simple				
	Y	T3Y	T6Y	T9Y
X:	0	6	1	4
T9X	1	3	9	A
T6X	3	A	6	0
T3X	7	4	7	9
X={0,1,4,6} Y={0,1,3,7 }				

Tipo I , no simple, con tricordios y posiciones vacías			
	T7IX	TAIX	T5IX
X		467	123
T9X	013		4AB
T2X	456	389	
X={1,2,3,4,6,7}			

Tipo III, no-simple(con posiciones vacías y 1 pcs por posición llena)						
	Y	T2IY	T4X	T1IY	T1Y	T5X
X	0		4	1		5
T9IY		2	8			9
T6Y	7			6	1	
T9X		1	9		2	A
T5Y			5	0		6
T8IY	1	7			8	
X={0,1,4,5} Y={0,1,7}						

Tipo II, no-simple con repeticiones de pc					
	Y	T7IY	T1IY	IY	T8IY
X	127	056		5	
T1X		123	678	678	12367
T4X	456		9	AB	4
T5X	57		06B	A	
X={0,1,2,5,6,7} Y={1,2,4,5,6,7}					

Cadenas y CM simples

Las CM de tipo I simples son posibles a través de la permutación circular de sus filas o columnas. Esto se denomina generalmente *cuadrado romano*.
Ejemplos:

1	4	6	8
4	6	8	1
6	8	1	4
8	1	4	6

01	5		289
5		289	01
	289	01	5
289	01	5	

Las CM de tipo I o II que son simples tienen sus posiciones ocupadas por un solo pc.

Se pueden producir dos tipos de **CM simples de tipo I**:

1-Tipo IA: todas sus normas se relacionan por Tn y cada norma vertical tiene una norma horizontal idéntica correspondiente.

2-Tipo IB: todas sus normas se relacionan por Tn, pero para cada norma horizontal existe una norma vertical que se relaciona con ella por TnI y viceversa. "n" depende, en este caso, de las normas particulares involucradas.

Esquema para el tipo IA simple:

H(0) + H(0)	H(1) + H(0)	… H(n) + H(0)
H(0) + H(1)	H(1) + H(1)	… H(n) + H(1)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
H(0) + H(n)	H(1) + H(n)	… H(n) + H(n)

En donde el generador de norma es H. Ejemplo:

	T4H	T5H	T3H	T1H
T4H	8	9	7	5
T5H	9	A	8	6
T3H	7	8	6	4
T1H	5	6	4	2
H={4,5,3,1}				

Esquema para el tipo IB simple:

H(0) + IH(0)	H(1) + IH(0)	… H(n) + IH(0)
H(0) + IH(1)	H(1) + IH(1)	… H(n) + IH(1)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
H(0) + IH(n)	H(1) + IH(n)	… H(n) + IH(n)

En donde el generador de norma es H. Ejemplo:

	T4IH	T5IH	T3IH	T1IH
T8H	0	1	B	9
T7H	B	0	A	8
T9H	1	2	0	A
TBH	3	4	2	0
H={4,5,3,1}				

Las CM tipo II simple, se obtienen de dos sets, H y K, de cardinalidad n y p respectivamente:

H(0) + K(0)	H(1) + K(0)	… H(n) + K(0)
H(0) + K(1)	H(1) + K(1)	… H(n) + K(1)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
H(0) + K(p)	H(1) + K(p)	… H(n) + K(p)

En donde los generadores de norma son H y K. Ejemplo:

	T2K	T1K	T9K
T4H	6	5	1
T3H	5	4	0
T1H	3	2	A
T6H	8	7	3
H={2,1,9} K={4,3,1,6}			

Comparación de CM y cadenas.

1-**Fragmentación**:
FRAG(E) es la medida de la distribución de pcs en las posiciones de una cadena o una CM denominada E. La fragmentación varía desde 0 (indicando que todos los pcs están en una sola posición de E) hasta 1(indicando que cada posición está ocupada por solo 1 pcs o está vacía).
E(i,j) es la posición en la iesima fila jésima columna de la CM o cadena E.
#E(i,j) es el número de pcs en E(i,j).
PAIRS(k) es una función que indica el número de pares de pcs en un set de k pcs {X(1), X(2) …X(k)} y se evalúa como sigue:

$$PAIRS(k) = \sum_{n=1}^{k-1} n = (k^2 - k)/2$$

Por ejemplo, PAIRS(5) es igual a 1+2+3+4 o (25-5)/2 = 10.
T es el número de entradas de pc en la cadena o matriz completa. P indica el número de filas y Q el número de columnas. Entonces:

$$FRAG(E) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{Q} PAIRS(\#E[i,j])}{PAIRS(T)}$$

2-**Dispersión**:
Esta función es una medida de la proporción entre posiciones llenas y vacías, que complementa a la de fragmentación. Cuando SPAR(E)=0, todas las posiciones están ocupadas, y SPAR(E)=1 corresponde a una CM vacía. En esta función, F es el número de posiciones llenas y N es el número de posiciones de la CM o cadena E.

$$SPAR(E) = (N - F)/N$$

3-Fragmentación de PC y asociación

Las propiedades del set U, que es la unión de todos los pcs de una cadena o CM son un aspecto importante de la generación de ciertas cadenas o CM. Una cadena o CM se puede considerar como una parte de una cadena o CM más extensa.

PFA:

La PFA(Pitch-Class Frequency Array) es un vector que tiene 12 posiciones, cada una correspondiendo a un pc. Cada posición guarda el número de ocurrencias de cada pc dentro de una cadena o CM. La PFA muestra la distribución de los pc. Esta puede ser más o menos uniforme o despareja, llegando inclusive a omitir uno o varios pc y tener muchos de otros.

Association-set(set de asociación)

La associación de determinados pcs en más de una posición de una CM o cadena es otro de sus rasgos distintivos. El Set-Asociación es un conjunto de pc que aparece al menos una vez en cada una de las normas de una cadena o CM. El Set-Asociación puede ser incluso un solo pc. Aun cuando no exista en todas las normas, puede haber un grado de asociación mensurable.

Se podrían definir vectores más extensos que incluyan cada uno de las SC como entrada y así medir su frecuencia en cada una de las CM o cadenas.

Transformaciones de Cm y cadenas

-Transposición y/o inversión de la cadena o CM completa: aquí son de especial importancia las propiedades de invariancia bajo T o IT del set formado por todos los sets de la cadena o CM. De esta manera se pueden cambiar partes de una CM o cadena y dejar invariantes a otras, redistribuir los mismos pc, o cambiarlos a todos.

Por ejemplo, si se transforma por TAI a la siguiente CM:

Original				TAI		
	467	123			346	789
013		4AB		79A		06B

456	389			**456**	127	

Se preserva el contenido de la posición inferior izquierda(grisada)

Si a la siguiente CM se la transforma por T9I:

Original | T9I

0		**4**	**1**		**5**		9		**5**	8		4
	2	8			9			**7**	**1**			**0**
7			6	1			2			3	8	
	1	9		2	A			8	**0**		7	B
		5	0		6				**4**	9		3
1	7			8			8	2			1	

Se intercambian la primera fila con la tercera columna y la primera columna con la segunda fila.

En el siguiente ejemplo, algunas díadas están intercambiadas mientras otras no y la CM resultante intercambia las columnas 1ª y 3ª y la 2ª y 3ª filas. Esto resulta de la transformación del original por T4M[1], que, sin embargo, deja invariante al set de toda la CM.

Original | TM4

34	58	07		07	58	34
01	9A	58		49	16	58
58	61	49		58	9A	01

2-Reestructuraciones por:

- -Permutación cíclica
- -Retrogradación
- -Intercambio de columnas o filas.
- -Rotación de 90 grados.

Ejemplos de los tres primeros

089		13B		16A	79B				089	13B		049		12A
	12A	049		089		13B		12A		049		13B	089	
16A	79B				12A	049		79B	16A				16A	79B

Ejemplo de rotación por 90°

027	345		9AB	027
9AB	168		168	345

3-Intercambio de pc de una posición a otra:

Permite transformar la estructura de una CM completa.

[1] A M también se lo llama el operador del ciclo de cuartas ascendentes o M5 y multiplica a cada pc por 5 mod. 12.

Si dos posiciones de una CM E contienen el mismo set, estos sets se pueden intercambiar de la siguiente manera: sean las dos posiciones E(i,j) y E(k,m). El set en E(i,j) se puede mover a E(i,m) si el set en E(k,m) se mueve a E(k,j). Si m=j o i=k, el intercambio no tiene efecto y no se cambia la estructura de las cadenas.

	Col. j	Col. m
Fila i	set x ⟶	
Fila k		⟵ set x

O bien:

	Col. j	Col. m
Fila i	set x	↑
Fila k	↓	set x

El intercambio no necesita ser horizontal y entre columnas adyacentes porque el contenido de las posiciones de las CM y las filas no está ordenado.

El siguiente ejemplo muestra como se puede cambiar la **fragmentación** y la **escasez** de una CM por intercambio de sus pc:

089		13B
	12A	049
16A	79B	

89		013B
0	129A	4
16A	7B	9

89	1B	03
0A	29	14
16	7A	9B

La PFA puede usarse para estimar el potencial de intercambio de una CM. Cuanto más alta sea la entrada de un pc, más posibilidades tiene de ser intercambiado.

4-Agregado de pc:

Si hay dos posiciones E(i,j) y E(k,m) que comparten el set K, K o sus subsets pueden agregarse en E(i,j) o E(k,m) sin cambiar la norma de la CM. En el ejemplo que sigue se muestran los pc agregados en las posiciones grisadas:

46	3A		
	19	67	
04		0A	34
07			19

46	3A	A	4
6	19	67	9
04	3	0A	34
07	9	0	19

Combinando CMs

Si dos o más CM tienen normas compatibles, pueden combinarse para formar CM más extensas. Los tipos I y II pueden resultar solo cuando las CMs más pequeñas a combinar son del mismo tipo. Cuando se combinan CMs de tipo II para formar otra CM de tipo II, sus normas verticales deben relacionarse por Tn, lo que asegura que sus normas horizontales se relacionen de la misma manera. La combinación arbitraria de CMs genera una CM de tipo III.

Generación de CMs a partir de cadenas

La generación de CM no-simples se realiza a partir de cadenas completas con un número par de posiciones. Si la cadena tiene un número impar de posiciones, se puede transformar a par duplicandola o bien intercalando una posición que sea la intersección de las dos posiciones entre las que se ubica.

Para contruir una CM E desde una cadena C de z posiciones(z es par), existen las siguientes restricciones:

1-La asignación de posiciones de la cadena a posiciones de la CM es de una en una.
2-Una columna o fila de la CM no puede estar ocupada por más de dos posiciones de C.
3-Si asignamos C(n)→E(i,j)
y n es impar
    C(n -1(mod z))→E(i,m) y
    C(n+1(mod z))→E(k,j)
De otra manera, si n es par
    C(n -1(mod z))→E(k,j) y
    C(n+1(mod z))→E(i,m)

Dos de las muchas asignaciones posibles de una cadena a | b | c | d | e | f | son:

1) a→E(0,0)
   d→E(0,1)
   c→E(1,1)
   d→E(1,2)
   e→E(2,2)
   f→E(2,0)

2) a→E(0,0)
   b→E(1,0)
   c→E(1,2)
   d→E(2,2)
   e→E(2,1)
   f→E(0,1)

Se muestran las CM resultantes:

1)				2)		
a	b			a	f	
	c	d		b		c
f		e			e	d

Esquema básico de generación de CMs a partir de cadenas:

C(0) | C(1) | C(2) | …..| C(n) |

C(0)	C(1)	…..	___
___	C(2)	…..	___
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
C(n)	___	…..	C(n-1)

Generando cadenas

Inicialmente se tratará la generación de cadenas que pueden producir CM de tipo I(con una sola SC como norma) ya que las otros tipos son fácilmente derivables de este.

EN este caso, una cadena depende de los subsets comunes de una SC que es la norma. Para comenzar, se deben listar todas las formas en que una SC se puede dividir en dos partes.

La ecuación:

$$Z = K! / (P!(K-P)!)$$

Indica el número Z de sets distintos y no-ordenados de P elementos pueden obtenerse de un set K. Para cada uno de estos sets, existe otro set denominado complemento de K-P elementos, excepto para el caso en que K sea par y P=K/2. En ese caso, la lista de Z sets se vincula con ella misma para obtener los pares complementarios.

En el ejemplo que sigue, se muestran las particiones del set {0,1,2,6,8}, que pertenece a la SC 5-15. Hay cinco particiones 1/4 y diez particiones 2/3 y se detallan además las SC de cada subset. La característica especial de la partición se detalla en la última columna y será explicada luego

5-15 {0,1,2,6,8}				
Particiones1/4				
A	0|1268	1-1	4-16	1
B	1|0268	1-1	4-25	2
C	2|0168	1-1	4-16	*
D	6|0128	1-1	4-5	1
E	8|0126	1-1	4-5	*
Particiones 2/3				
F	01|268	2-1	3-8	1
G	02|168	2-2	3-9	
H	06|128	2-6	3-5	1
I	08|126	2-4	3-4	1
J	12|068	2-1	3-8	*
K	16|028	2-5	3-8	1
L	18|026	2-5	3-8	*
M	26|018	2-4	3-4	*
N	28|016	2-6	3-5	*
O	68|012	2-2	3-1	

La tabla anterior contiene toda la información necesaria para generar una cadena completa o incompleta cuyas normas son todas miembros de la SC 5-15. Se puede elegir cualquier partición para elegir. Por ejemplo, si se toma la F, {0,1} se ubica en la primera posición de la cadena y {2,6,8} se ubica en la segunda posición. Para continuar la cadena se necesita otra partición que, cuando se invierta y/o trasponga de cómo resultado {2,6,8}. Para encontrarla, hay que buscar en la tabla otra partición que contenga a la SC de {2,6,8}, que es el 3-8. En este caso son posibles cuatro particiones (F, J, K y L). Supongamos que se elija K. Con T6 K se transforma en 07|268. Luego, {0,7} será la tercera posición de la cadena y a continuación habrá que buscar otra partición que tenga a la SC de {0,7}como miembro. Se sigue así hasta que se desee o bien, si se quiere una cadena completa, hasta que se obtenga una partición transformada que termine o comience con {0,1}. Se muestra el proceso, la cadena(completa) resultante y dos CM derivadas de la misma:

F 01|268
RT6K 268|07
T1IK 07|15B
RT7IF 15B|67
T6F 67|028
RK 028|16
T7IK 16|57B
RT1IF 57B|01

01|268|07|15B|67|028|16|57B

01	268		
	07	15B	
		67	028
57B			16

01	268		
	07	15B	
		67	028
57B			16

1	02	6	8
B	7	15	0
0	8	7	26
57	6	B	1

Quedan ciertas preguntas todavía:

1-Cuantas cadenas distintas pueden generarse y de qué largo.
2-Cual es el rol de la invariancia en el proceso?
3-Qué modo de notación grafica mejor y resume todas las cadenas posibles?

Invariancia en la partición