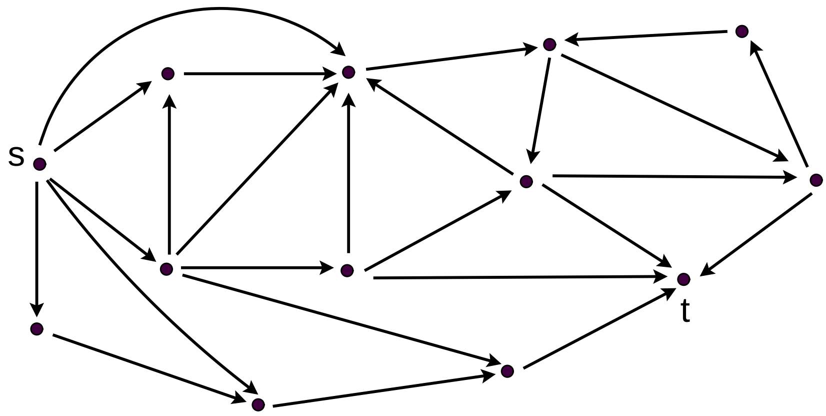
TEORIA DE GRAFOS

Práctica 5

1. Dado el grafo dirigido G



hallar un subconjunto L de ramas de mínimo cardinal tal que en $G - L$ no haya ningún camino de s a t.

2. Sea G un grafo y sean s, t dos vértices no adyacentes de G. Demostrar que el máximo número de caminos de s a t que son disjuntos por ramas es igual al mínimo número de ramas de G que hay que sacar para desconectar s de t.
Sugerencia: Transforme G en un grafo dirigido G' reemplazando cada rama (u, v) de G por dos flechas $u \longrightarrow v$ y $v \longrightarrow u$.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Decimos que $e \in E$ es una *rama de corte* si $G - \{e\}$ es disconexo. Mostrar que e es una rama de corte si y sólo si existen $v, w \in V$ tales que todo camino de v a w pasa por e.

4. Sean s y t dos vértices no adyacentes de un grafo G. Sea $\kappa(s, t)$ el mínimo número de vértices que desconectan s de t. Mostrar que

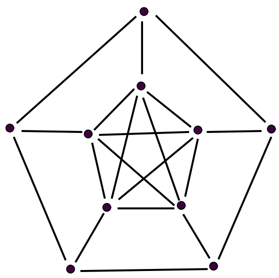
$$\kappa(G) = \min \{\kappa(s, t) \,/\, s \neq t \text{ y } s \text{ y } t \text{ no son adyacentes}\}$$

5. Dado un grafo G, ¿cómo calcularía $\lambda(G)$?

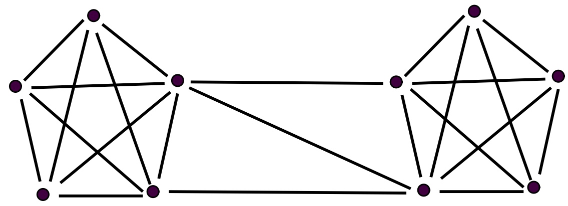
6. Hallar $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ y $\delta(G)$ para cada uno de los siguientes grafos

i) $K_{n,m}$

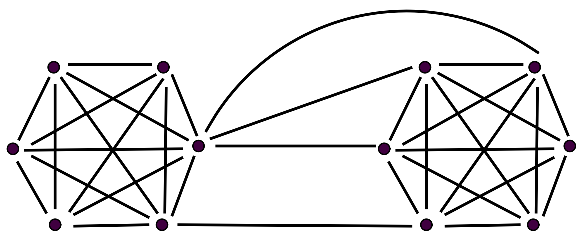
ii) el grafo de Petersen



iii)



iv)



7. Sean $n, m, r \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m \leq r$. Construír un grafo G tal que $\kappa(G) = n$, $\lambda(G) = m$ y $\delta(G) = r$

8. Sea G un grafo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) G es biconexo
ii) Dos vértices de G siempre están contenidos en un ciclo simple
iii) Un vértice y una rama de G siempre están contenidos en un ciclo simple
iv) Dos ramas de G siempre están contenidas en un ciclo simple

9. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y sea $s \in V$. Considere la siguiente versión del algoritmo depth-first search

1. **Inicializar:** $A = \{s\}$, $df(s) = 0$, $df(v) = -1 \, \forall v \neq s,\ k = 0$
2. **While** $A \neq \emptyset$ **do:** de todos los vértices que están en A sea u el último que ingresó.
   If $\nexists\, v$ adyacente a u tal que $df(v) < 0$ **then** $A = A - \{u\}$
   Else elegir un nodo v adyacente a u tal que $df(v) < 0$, poner $p(v) = u$ y actualizar
      $A = A \cup \{v\}$
      $k = k + 1$
      $df(v) = k$
3. **End**

i) Probar que al terminar el algoritmo $df(v) \geq 0$ para todo $v \in V$
ii) Probar que, al terminar el algoritmo, el grafo $T = (V, E')$ donde

$$E' = \{\, (p(v), v) \,/\, v \in V \}$$

es un árbol dirigido con raíz s (y un spanning tree de G) que satisface: si (v, w) es una rama de G que no pertenece a T entonces v es un descendiente de w en T o w es un descendiente de v en T.

10. Sea $G = (V, E)$ el grafo donde $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ y $e \in E$ sii alguno de sus extremos divide al otro.
Usando el algoritmo que detecta vértices de corte hallar todos los vértices de corte de G.

11. Probar que dos blocks de un grafo G tienen intersección vacía o tienen sólo un vértice en común que es un vértice de corte de G.

12. Hallar los blocks del grafo