TEORIA DE GRAFOS

Práctica 4

1. Mostrar que, en el problema de máximo flujo, el flujo que sale de la fuente es igual al flujo que entra en la terminal.

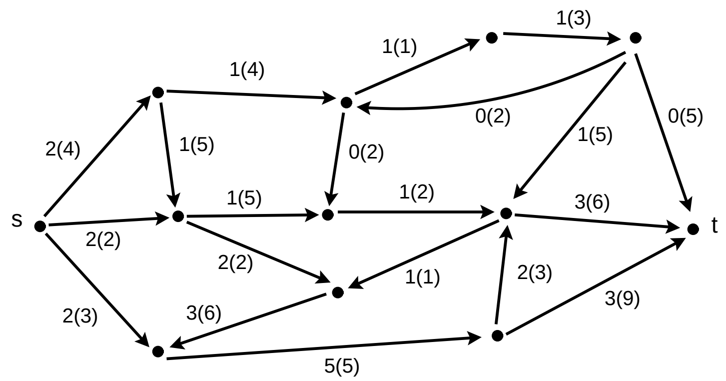
2. Mostrar que si alteramos un flujo factible x en las flechas de un camino aumentativo $\mathcal{P}$ de s a t sumando δ si la flecha es directa y restando δ si la flecha es inversa, donde $\delta > 0$ tal que

$$\delta = \min\{\min\{u_e - x_e \,/\, e \in \mathcal{P} \text{ directa}\}, \min\{x_e \,/\, e \in \mathcal{P} \text{ inversa}\}\}$$

entonces obtenemos otro flujo factible cuyo valor se incrementa en δ

3. Describa cómo se puede aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson para hallar un máximo matching en un grafo bipartito.

4. Considere el grafo



en el que para cada rama e se ha indicado un flujo x_e y, entre paréntiesis, su capacidad.

Utilizando el flujo dado como flujo factible inicial, hallar un flujo óptimo en G y su correspondiente mínimo corte.

5. Sea G un grafo dirigido y sean s y t dos vértices distintos tales que existe al menos un camino dirigido de s a t. Probar que el máximo número de caminos dirigidos de s a t que son disjuntos por ramas (es decir, tales que toda rama pertenezca a lo sumo a uno de ellos) es igual al mínimo número de ramas que hay que sacar a G para que en el grafo resultante (que tiene los mismos vértices que G pero menos ramas) no exista ningún camino dirigido de s a t.

6. Considere el siguiente problema:

Se tienen m familias y n mesas. Para cada i entre 1 y m se conoce la cantidad a_i de personas que son miembros de la familia i y para cada j entre 1 y n se conoce la cantidad

b_j de personas que caben en la mesa j. Se desea sentar a todos los miembros de las m familias en las mesas de manera tal que en cada mesa haya a lo sumo un miembro de cada familia.

Probar que puede determinarse si este problema es factible resolviendo un problema de máximo flujo en un grafo conveniente.

7. Un pueblo tiene r residentes, q clubes y n partidos políticos $P_1, \ldots P_n$. Cada residente es socio de por lo menos un club, y está afiliado a un único partido político. Se quiere formar un consejo de representantes de los clubes que no contenga más de u_k miembros del partido P_k $(1 \leq k \leq n)$, para lo cual cada club debe seleccionar uno de sus socios para integrar el consejo, pero dos clubes distintos no pueden seleccionar a la misma persona. Suponiendo que para cada residente se conociera los clubes de los que es socio y a cuál partido político está afiliado, ¿cómo haría para determinar si el problema es factible?

8. Considere una matríz cuadrada de $n \times n$. Suponga que hay posiciones (i, j) de la matríz que están "prohibidas". El resto de las posiciones deben ser llenadas con unos y ceros, de forma que haya un solo uno en cada fila y un solo uno en cada columna. Plantear el problema de llenar las posiciones con un máximo número de unos como un problema de máximo flujo.

9. Considere el siguiente problema:

Supongamos que se desea realizar m tareas en n días. Sea p_u el número de horas necesarias para realizar la tarea u $(1 \leq u \leq m)$ y sea q_v el número de horas disponibles en el día v $(1 \leq v \leq n)$. Supongamos además que cada tarea u no puede iniciarse antes del día s_u ni terminarse después del día t_u. Las tareas no necesariamente deben realizarse en un mismo día, pero una parte de la tarea u (que podría ser toda) puede asignarse al día v sii $s_u \leq v \leq t_u$. El problema consiste en determinar si la asignación de tareas es factible y, en tal caso, hallar una solución factible del problema.

Probar que puede resolverse este problema usando el algoritmo de Ford-Fulkerson.