TEORIA DE GRAFOS

Práctica 1

1. Sea G un multigrafo conexo que tiene exactamente dos vértices u y v de grado impar. Probar que existe un camino euleriano en G de u a v (es decir, un camino de u a v que pasa por cada rama exactamente una vez).

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un paseo en G es una sucesión de vértices y ramas (no necesariamente distintos) $u_1, e_1, u_2, e_2, u_3, \ldots, u_n, e_n, u_{n+1}$, donde $u_1, \ldots, u_{n+1} \in V$, $e_1, \ldots, e_n \in E$ y $e_i = (u_i, u_{i+1})$ $(1 \leq i \leq n)$. Un paseo cerrado es un paseo en G tal que $u_{n+1} = u_1$. Probar que si G es un grafo conexo entonces existe un paseo cerrado en G que pasa por cada rama exactamente dos veces.

3.Determinar cuántas ramas tiene

i) K_n

ii) $K_{n,m}$

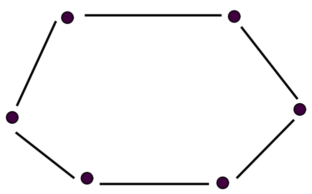
iii) Un grafo 3-regular con 6 vértices

4. Dado un grupo de 9 personas, ¿es posible que cada una de ellas estreche las manos de exactamente otras 3 personas?

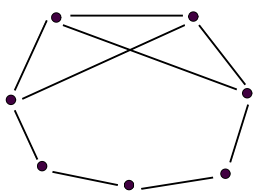
5. Hallar un grafo bipartito que sea 3-regular pero que no sea $K_{3,3}$

6. Determinar cuáles de los siguientes grafos son bipartitos

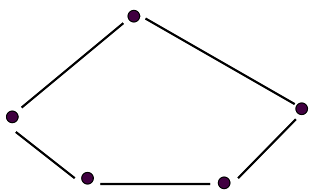
i)



ii)



iii)



7. Hallar un grafo conexo con 5 vértices que siga siendo conexo si se le sacan dos vértices cualesquiera.

8. Sean u y v dos vértices de un grafo conexo G. Probar que el paseo más corto de u a v no puede repetir un vértice o una rama.

9. i) Sean u y v dos vértices adyacentes de un grafo bipartito G.
Probar que si $u, e_1, u_2, e_2, u_3, \ldots, u_n, e_n, v$ es un paseo en G entonces n es impar.

ii) Sea G un grafo. Probar que G es bipartito si y sólo si todo paseo cerrado en G tiene un número par de ramas.

10. Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices tal que $\deg(u) \geq \frac{n-1}{2}$ para todo $u \in V$. Probar que G es conexo.

11. Probar que en un grafo conexo dos caminos simples de máxima longitud tienen al menos un vértice en común.

12. i) ¿Cuántos circuitos hamiltonianos hay en K_n?
ii) ¿Cuántos circuitos hamiltonianos hay en $K_{n,n}$?