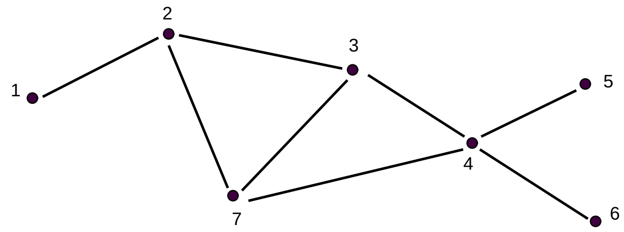
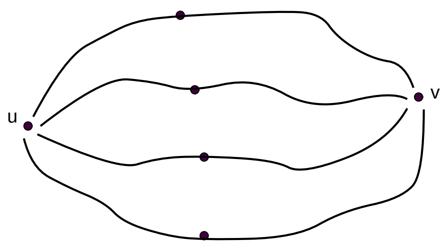
Teorema de Menger

Sean u y v dos vértices no adyacentes en un grafo (no dirigido) conexo $G = (V, E)$.
Definición. Sea S un subconjunto de V que no contiene a u ni a v. Diremos que S *separa u de v* (o también que sacando S se desconecta u de v) si en el grafo $G - S$ los vértices u y v pertenecen a distintas componentes conexas.
Definición. Diremos que dos caminos en G que unen u y v son *disjuntos por vértices* si no tienen ningún vértice en común salvo u y v.
De ahora en más diremos "disjuntos" en lugar de "disjuntos por vértices".

Ejemplo. En el grafo



el conjunto $S = \{7, 3\}$ separa 1 de 6. Observemos que este no es el conjunto de menor cardinal que separa 1 de 6. En efecto, $S = \{4\}$ también separa 1 de 6. Luego, el mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar 1 de 6 es uno. Notemos además que dos caminos de 1 a 6 nunca son disjuntos, es decir, la máxima cantidad de caminos disjuntos de 1 a 6 es también uno.
Veamos ahora qué pasa cuando $u = 2$ y $v = 4$. En este caso $S = \{3, 7\}$ separa 2 de 4 y no hay ningún conjunto de menor cardinal que separe 2 de 4. Es decir, el mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar 2 de 4 es dos. Por otra parte, el máximo número de caminos disjuntos que unen 2 y 4 también es dos.
En general, si hay k caminos disjuntos de u a v, cualquier conjunto que separe u de v debe contener al menos k vértices (uno de cada uno de estos caminos).



Esto muestra que si P es un conjunto de caminos disjuntos de u a v y S es un conjunto que separa u de v entonces $|P| \leq |S|$.

Corolario. El máximo número de caminos disjuntos de u a v es menor o igual que el mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar u de v.

El teorema de Menger muestra que vale la igualdad.

Teorema. (Menger, 1927) Sean u y v dos vértices no adyacentes en un grafo (no dirigido) conexo $G = (V, E)$. Entonces el máximo número de caminos disjuntos de u a v es igual al mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar u de v.

Demostración. Por inducción en $n = |E|$.
Si $n = 2$ el teorema es trivial ya que el grafo es de la forma

Supongamos ahora que el teorema es cierto para todo grafo conexo con a lo sumo $n - 1$ ramas ($n \geq 3$).

Sean u y v dos vértices no adyacentes en un grafo (no dirigido) conexo $G = (V, E)$ que tiene n ramas y sea k el mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar u de v. Por el corolario, para probar el teorema basta mostrar que existen al menos k caminos disjuntos de u a v. Como esto es trivial si $k = 1$ ya que G es conexo, supondremos que $k \geq 2$.

Primer caso: Todo conjunto S de cardinal k que separa u de v tiene todos sus elementos adyacentes a u o tiene todos sus elementos adyacentes a v.

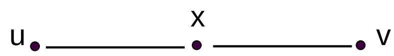
Sea $\mathcal{R}$ el camino más corto de u a v en G. Entonces $\mathcal{R}$ es un camino simple.
Si $\mathcal{R}$ tiene por lo menos tres ramas entonces es de la forma

y, por ser el camino más corto, x_1 no es adyacente a v y x_2 no es adyacente a u. Notemos que como $\mathcal{R}$ es simple, entonces la parte de $\mathcal{R}$ que va de x_2 a v no contiene a la rama e_2. Además, como $k \geq 2$, debe existir al menos un camino de u a v en G que no contenga la rama e_2 (si todo camino contiene a e_2, sacando el vértice x_1 se desconecta u de v). Luego, existe un camino en $G - e_2$ de x_1 a x_2 pues lo hay de x_1 a u, de u a v y de v a x_2. Esto prueba que el grafo $G - e_2$ es conexo.
Sea T un conjunto de mínimo cardinal que separa u de v en $G - e_2$. Entonces $T \cup \{x_1\}$ separa u de v en G. Luego $|T \cup \{x_1\}| \geq k$ de donde $|T| \geq k - 1$.
Supongamos que $|T| = k - 1$. Entonces $T \cup \{x_1\}$ es un conjunto de cardinal k que separa u de v en G. Luego, todos sus elementos deben ser adyacentes a u o todos deben ser adyacentes a v y como x_1 no es adyacente a v entonces resulta que todo elemento de T debe ser adyacente a u.
Pero $T \cup \{x_2\}$ también separa u de v en G. Luego $|T \cup \{x_2\}| \geq k$ y como $|T| = k - 1$ entonces $T \cup \{x_2\}$ es un conjunto de cardinal k que separa u de v en G. Luego, todos sus elementos deben ser adyacentes a u o todos deben ser adyacentes a v y como x_2 no es adyacente a u entonces resulta que todo elemento de T también es adyacente a v. Pero entonces, tomando $x \in T$ (notar que T es no vacío pues $|T| = k - 1$ y $k \geq 2$) se tiene que x es adyacente a u y a v. Pero en ese caso habría un camino con dos ramas de u a v, lo

cual es una contradicción pues estamos suponiendo que el camino más corto de u a v tiene por lo menos tres ramas.

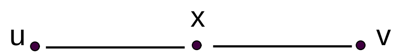
Luego debe ser $|T| \geq k$ y, aplicando la hipótesis inductiva a $G - e_2$ resulta que existen al menos k caminos disjuntos de u a v en $G - e_2$ y por lo tanto en G.

Ahora veamos qué ocurre si $\mathcal{R}$ es de la forma



Como $k \geq 2$ entonces existe un camino de u a v que no contiene a x. Luego, $G - x$ es conexo. Sea r el mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar u de v en $G - x$. Entonces, por hipótesis inductiva, existen al menos r caminos disjuntos de u a v en $G - x$.

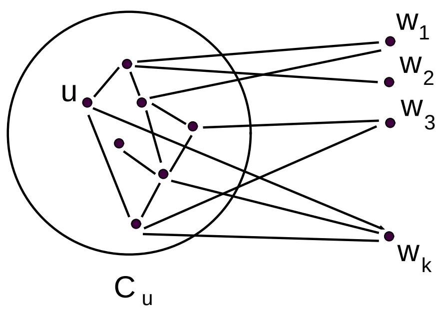
Como sacando r vértices y x se desconecta u de v en G entonces $r + 1 \geq k$, de donde $r \geq k - 1$ y por lo tanto existen al menos $k - 1$ caminos disjuntos de u a v en $G - x$. Luego, existen al menos k caminos disjuntos de u a v en G: los $k - 1$ caminos en $G - x$ y el camino



Segundo caso: Existe un conjunto W de cardinal k, $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$, que separa u de v y satisface: algún w_i no es adyacente a u y algún w_j no es adyacente a v (i y j no necesariamente distintos).

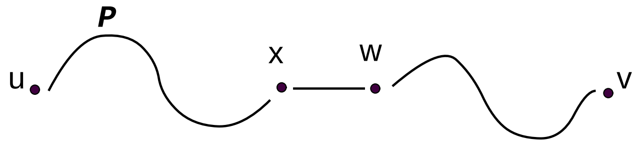
Como W separa u de v en G entonces u y v pertenecen a distintas componentes conexas de $G - W$. Sean C_u y C_v las componentes conexas de u y v en $G - W$. Luego, C_u y C_v no tienen vértices en común (y por lo tanto, tampoco ramas).

Sea G_u el grafo que se obtiene agregando a C_u los vértices $w_1, \ldots, w_k$ y todas las ramas de G que sean de la forma (x, w) con $x \in C_u$ y $w \in W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$.



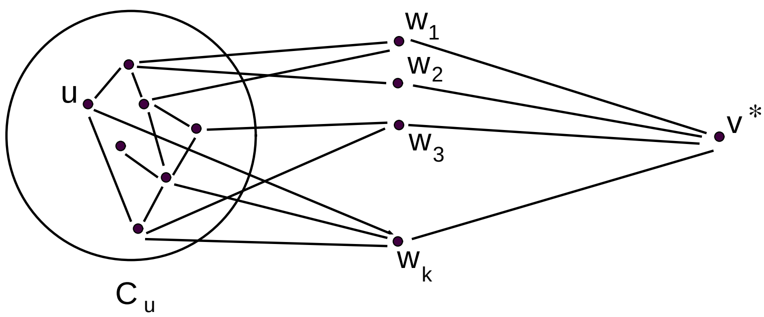
Afirmación 1. G_u es conexo y tiene por lo menos $k + 1$ ramas.

Demostración. Para cada $w \in W$ existe un camino de u a v en G que pasa por w y por ningún otro vértice de W, ya que de lo contrario $W - \{w\}$ separaría u de v en G. Sea x el vértice anterior a w en ese camino y sea $\mathcal{P}$ la parte de ese camino de u a x.



entonces $\mathcal{P}$ es un camino de u a x en $G - W$ y por lo tanto $x \in C_u$ y (x, w) es una rama de G_u.
Observemos que para algunos w podría ocurrir que fuese $x = u$ (en cuyo caso sigue valiendo que $x \in C_u$ y (x, w) es una rama de G_u) pero no para todos, ya que estamos suponiendo que algún w_i no es adyacente a u. Luego, alguno de los caminos $\mathcal{P}$ tiene una rama e y esa rama pertenece a C_u, de donde $e \in G_u$ y ningún extremo de e pertenece a W.
Esto muestra que G_u es conexo y tiene al menos $k+1$ ramas: una rama (x, w) para cada $w \in W$ (estas son todas distintas pues $x \notin W$) y la rama e. ▫

Sea ahora G_v el grafo que se obtiene agregando a C_v los vértices $w_1, \ldots, w_k$ y todas las ramas de G que sean de la forma (x, w) con $x \in C_v$ y $w \in W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$. Entonces G_v es conexo y tiene por lo menos $k+1$ ramas y, además, G_u y G_v no tienen ninguna rama en común.
Ahora creamos un nuevo grafo conexo $\overline{G}_u$ agregando a G_u un vértice artificial v^* y las k ramas (w_1, v^*), (w_2, v^*) , …, (w_k, v^*).



Análogamente creamos un grafo conexo $\overline{G}_v$ agregando a G_v otro vértice artificial u^* y las k ramas (u^*, w_1), (u^*, w_2) , …, (u^*, w_k).
Como G_u y G_v son subgrafos de G con al menos $k+1$ ramas cada uno y además no tienen ninguna rama en común, entonces

$$|E(G)| \geq |E(G_u)| + |E(G_v)| \geq |E(G_u)| + k + 1 = |E(\overline{G}_u)| + 1$$

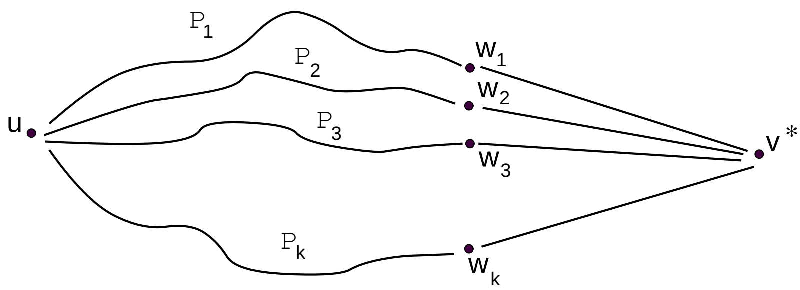
y

$$|E(G)| \geq |E(G_u)| + |E(G_v)| \geq k + 1 + |E(G_v)| = |E(\overline{G}_v)| + 1$$

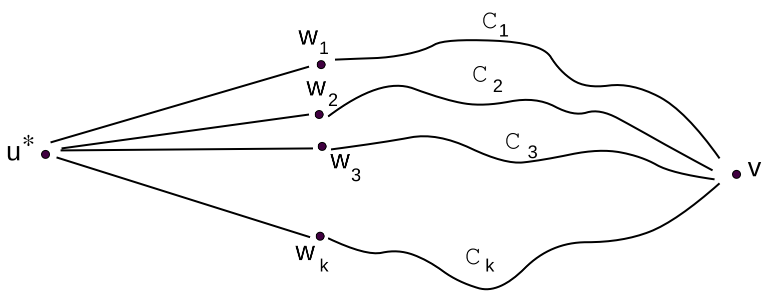
Luego, $|E(\overline{G}_u)| \leq |E(G)| - 1 = n - 1$ y $|E(\overline{G}_v)| \leq |E(G)| - 1 = n - 1$.

Afirmación 2. El mínimo número de vértices que hay que sacar para desconectar u de v^* en $\overline{G}_u$ es igual a k.

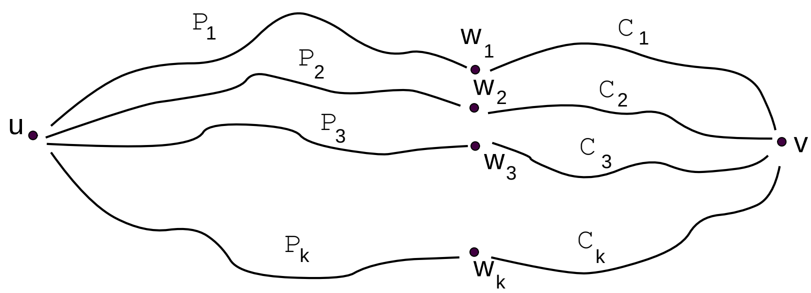
Supongamos por un momento que hemos probado la afirmación 2. Entonces, aplicando la hipótesis inductiva a $\overline{G}_u$ resutla que existen k caminos disjuntos de u a v^* en $\overline{G}_u$. Notemos que como las únicas ramas de $\overline{G}_u$ que inciden en v^* son de la forma (w_i, v^*), el nodo anterior a v^* en cada uno de estos caminos debe ser un elemento de W y como son k caminos disjuntos y W tiene k elementos, entonces estos caminos deben ser de la forma $\mathcal{P}_1$ seguido de la rama (w_1, v^*), ... , $\mathcal{P}_k$ seguido de la rama (w_k, v^*), donde $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ son k caminos disjuntos en G de u a $w_1, \ldots, w_k$ respectivamente.



De manera análoga se tiene que existen k caminos disjuntos de u^* a v en $\overline{G}_v$ y como las únicas ramas de $\overline{G}_v$ que inciden en u^* son de la forma (u^*, w_i), el nodo siguiente a u^* en cada uno de estos caminos debe ser un elemento de W. Entonces estos caminos deben ser la rama (u^*, w_1) seguida de $\mathcal{C}_1$,... , la rama (u^*, w_k) seguida de $\mathcal{C}_k$, donde $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ son k caminos disjuntos en G de $w_1, \ldots, w_k$ a v respectivamente.

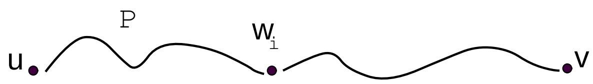


Ahora construimos k caminos disjuntos de u a v en G "pegando" $\mathcal{P}_i$ con $\mathcal{C}_i$ $(1 \leq i \leq k)$.



Luego, para concluír la demostración del teorema basta probar la afirmación 2.

Demostración de la afirmación 2. Es claro que $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ separa u de v^* en $\overline{G}_u$ ya que las únicas ramas que inciden en v^* son de la forma (w_i, v^*).
Luego, para completar la demostración basta probar que si S es un conjunto que separa u de v^* en $\overline{G}_u$ entonces S separa u de v en G.
Sea S un conjunto que separa u de v^* en $\overline{G}_u$. Si S no separa u de v en G entonces, u y v pertenen a la misma componente conexa de $G - S$ y por lo tanto existe un camino $\mathcal{C}$ en $G - S$ de u a v. Como u y v pertenecen a distintas componentes conexas en $G - W$ (pues W separa u de v en G) entonces no existe ningún camino de u a v en $G - W$. Luego, todo camino de u a v en G pasa por algún $w \in W$. En particular, $\mathcal{C}$ pasa por algún elemento de W. Sea w_i el primer elemento de W que se encuentra en $\mathcal{C}$ y sea $\mathcal{P}$ la parte de ese camino de u a w_i



camino $\mathcal{C}$ en $G - S$

Notemos que $\mathcal{P}$ es un camino de u a w_i en G_u. En efecto, si x es un vértice de $\mathcal{P}$ distinto de w_i entonces la parte de $\mathcal{P}$ de u a x es un camino en $G - W$ (pues w_i es el primer elemento de W que se encuentra en $\mathcal{C}$) y por lo tanto $x \in C_u$.
Entonces agregando a $\mathcal{P}$ la rama (w_i, v^*) obtenemos un camino de u a v^* en $\overline{G}_u$ que no contiene ningún vértice de S, es decir, un camino en $\overline{G}_u - S$ lo que es una contradicción pues S separa u de v^* en $\overline{G}_u$. $\square$