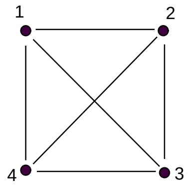
Spanning trees de K_n

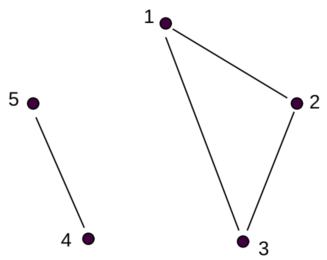
Queremos determinar cuántos spanning trees tiene el grafo K_n, es decir, el grafo completo con vértices $1, 2, \ldots n$. Notemos que un spanning tree de K_n debe tener $n-1$ ramas.

Por ejemplo, es claro que K_2 tiene un único spanning tree y que K_3 tiene 3. Para $n = 4$, K_4 es el grafo

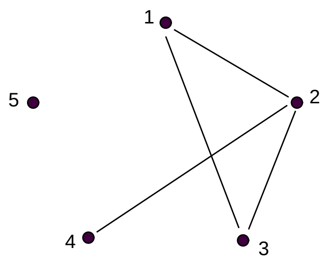


y tiene $\binom{6}{3} - 4 = 20 - 4 = 16$ spanning trees (todas las posibles maneras de elegir 3 ramas de las 6 de K_4 menos aquellas que forman un ciclo).
Pero para $n \geq 5$ esto se complica: para $n = 5$, a las posibles $\binom{10}{4}$ maneras de elegir 4 ramas de las 10 ramas de K_5 debemos restar aquellas elecciones de 4 ramas que producen un grafo que contiene un ciclo. Las posibles maneras de obtener un subgrafo de K_5 con 5 vértices y 4 ramas que tenga ciclos son:

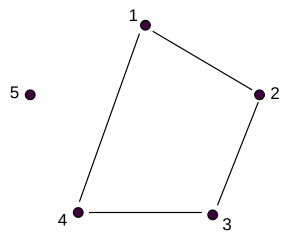
Las $\binom{5}{3} = 10$ del tipo



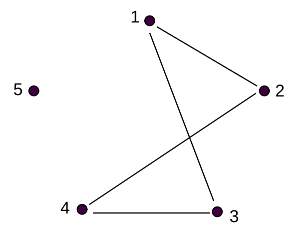
las $\binom{5}{3}.2.3 = 60$ del tipo



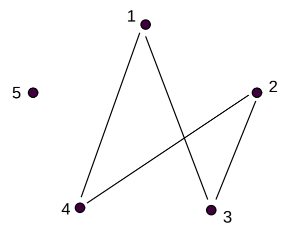
las $\binom{5}{4} = 5$ del tipo



las $\binom{5}{4} = 5$ del tipo



y las $\binom{5}{4} = 5$ del tipo



Luego, K_5 tiene $\binom{10}{4} - (10 + 60 + 5 + 5 + 5) = 210 - 85 = 125$ spanning trees.

Recordemos que si E es subconjunto de $n-1$ ramas de K_n y $V = \{1, 2, \ldots n\}$, entonces son equivalentes

i) (V, E) es un spanning tree de K_n
ii) (V, E) es acíclico
iii) (V, E) es conexo

Teorema: El grafo completo con vértices $1, 2, \ldots, n$ tiene n^{n-2} spanning trees.

Demostración: (Prüfer, 1918) El resultado es obvio para $n = 2$ de manera que supondremos $n \geq 3$. Mostraremos una biyección f del conjunto de spanning trees de K_n en el conjunto de todas las sucesiones de $n-2$ términos que se pueden formar con los números $1, 2, \ldots, n$. Dado un spanning tree T de K_n, definimos $f(T)$ de la siguiente manera:

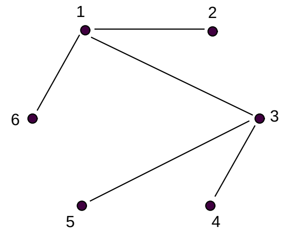
Sea $b_1 = \min\{j \,/\, j$ es una hoja de $T\}$ y sea a_1 el único vértice de T que es adyacente a b_1.

Ahora cosideremos el árbol T_1 que resulta de quitarle a T el vértice b_1 y la rama (a_1, b_1). Este árbol tiene $n-1$ vértices y $n-2$ ramas. Sea $b_2 = \min\{j \,/\, j$ es una hoja de $T_1\}$ y sea a_2 el único vértice de T_1 que es adyacente a b_2.

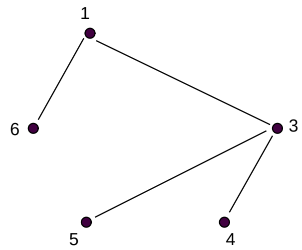
Ahora consideremos el árbol T_2 que resulta de quitarle a T_1 el vértice b_2 y la rama (a_2, b_2). Este árbol tiene $n-2$ vértices y $n-3$ ramas. Sea $b_3 = \min\{j \,/\, j$ es una hoja de $T_2\}$ y sea a_3 el único vértice de T_2 que es adyacente a b_3.

Continuamos de esta manera hasta tener el árbol T_{n-3} que resulta de quitarle a T_{n-4} el vértice b_{n-3} y la rama (a_{n-3}, b_{n-3}) y que tiene 3 vértices y 2 ramas.
Sean $b_{n-2} = \min\{j \,/\, j$ es una hoja de $T_{n-3}\}$ y sea a_{n-2} el único vértice de T_{n-3} que es adyacente a b_{n-2}.
Ahora definimos $f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$.

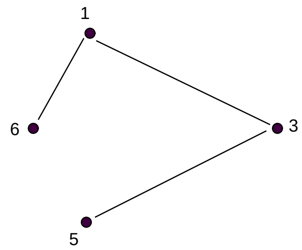
Notemos que el árbol que resulta de eliminar en T_{n-3} el vértice b_{n-2} y la rama (a_{n-2}, b_{n-2}) tiene una sola rama (u, v). Luego, por la forma en que hemos elegido los a_i y los b_i se ve que las ramas de T son (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... , (a_{n-2}, b_{n-2}) y (u, v) y que $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, u$ y v son n vértices distintos de K_n, de donde resulta que $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, u, v\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Por ejemplo, dado el spanning tree T de K_6



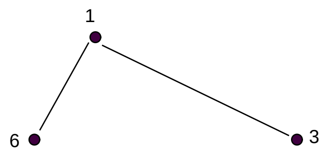
calculemos $f(T)$:
Se tiene que $b_1 = 2$, $a_1 = 1$. Como el árbol T_1 que resulta de quitarle a T el vértice b_1 y la rama (a_1, b_1) es



entonces, $b_2 = 4$, $a_2 = 3$. Ahora el árbol T_2 que resulta de quitarle a T_1 el vértice b_2 y la rama (a_2, b_2) es



Luego, $b_3 = 5$, $a_3 = 3$. Finalmente, el árbol T_3 que resulta de quitarle a T_2 el vértice b_3 y la rama (a_3, b_3) es



Luego, $b_4 = 3$, $a_4 = 1$. Por lo tanto, $f(T) = (1, 3, 3, 1)$. Notemos que el árbol que resulta de eliminar en T_3 el vértice b_4 y la rama (a_4, b_4) tiene una sola rama $(u, v) = (1, 6)$, las ramas de T son $(a_1, b_1) = (1, 2)$, $(a_2, b_2) = (3, 4)$, $(a_3, b_3) = (3, 5)$, $(a_4, b_4) = (1, 3)$, $(u, v) = (1, 6)$ y $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 5, b_4 = 3, u = 1$ y $v = 6$ son los 6 vértices distintos de K_6.

Para mostrar que f es biyectiva, exhibiremos su inversa. Sea

$$g : \{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \,/\, a_i = 1, 2, \ldots \text{ ó } n\} \longrightarrow \{\text{spanning trees de } K_n\}$$

la función definida de la siguiente manera:

Dada una sucesión $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, donde cada a_i es un número natural menor o igual que n, sean

$$\begin{aligned}
b_1 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}\\
b_2 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}\\
b_3 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, b_2, a_3 \ldots, a_{n-2}\}\\
&\vdots\\
b_{n-2} &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}, a_{n-2}\}\\
b_{n-1} &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}\}
\end{aligned}$$

y sea a_{n-1} el único $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq n$ y $j \neq b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}$ ($b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ son $n-1$ números naturales distintos entre 1 y n).

Definimos $g(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ como el subgrafo T de K_n cuyos vértices son $1, 2, \ldots, n$ y cuyas ramas son (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_{n-2}, b_{n-2}), (a_{n-1}, b_{n-1}) (Notar que esto tiene sentido pues $a_i \neq b_i$ para todo i entre 1 y $n-1$).

Observemos además que, por construcción, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ y a_{n-1} son n números naturales distintos entre 1 y n, de donde resulta que $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, a_{n-1}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Veamos un ejemplo: para $n = 7$ calculemos $g(3, 1, 6, 1, 4)$.

En este caso, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 6$, $a_4 = 1$ y $a_5 = 4$. Luego,

$b_1 = \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq 7 \text{ y } j \neq 3, 1, 6, 4\} = 2$,

$b_2 = \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq 7 \text{ y } j \neq 2, 1, 6, 4\} = 3$,

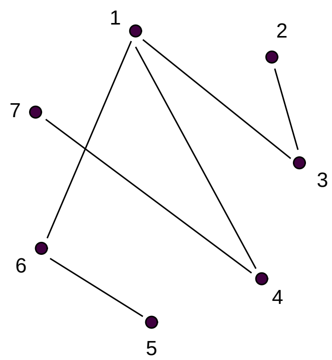
$b_3 = \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq 7 \text{ y } j \neq 2, 3, 6, 1, 4\} = 5$,

$b_4 = \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq 7 \text{ y } j \neq 2, 3, 5, 1, 4\} = 6$,

$b_5 = \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq 7 \text{ y } j \neq 2, 3, 5, 6, 4\} = 1$,

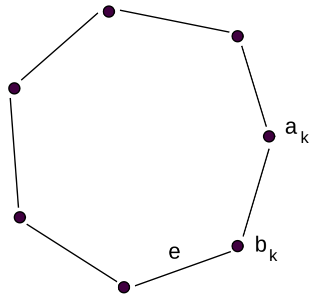
$b_6 = \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq 7 \text{ y } j \neq 2, 3, 5, 6, 1\} = 4$ y

$a_6 = 7$. Luego, $g(3, 1, 6, 1, 4)$ es el spanning tree de K_7 cuyas ramas son $(3, 2)$, $(1, 3)$, $(6, 5)$, $(1, 6)$, $(4, 1)$ y $(7, 4)$



Veamos primero que g está bien definida, es decir, que $T = g(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ es un spanning tree de K_n.

Dejamos como tarea verificar que por la forma en que hemos elegido $b_1, \ldots, b_{n-1}$ y a_{n-1} se tiene que (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... , (a_{n-2}, b_{n-2}), (a_{n-1}, b_{n-1}) son todas ramas distintas de K_n, por lo tanto T tiene n vértices y $n - 1$ ramas. Luego, para ver que es un spanning tree de K_n basta verificar que es acíclico.
Supongamos que T contiene un ciclo $\mathcal{C}$. Sea $k = \min\{j \,/\, (a_j, b_j) \in \mathcal{C}\}$ y sea e la otra rama del ciclo $\mathcal{C}$ que incide en b_k



Luego, $e = (a_j, b_j)$ para algún $j > k$ donde $b_k = a_j$ o $b_k = b_j$.
Como $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, a_{n-1}$ son todos distintos entonces debe ser $b_k = a_j$, lo cual es absurdo pues por construcción $b_k \neq a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$, es decir, $b_k \neq a_j$ para todo $j > k$.
Por lo tanto, T es acíclico como queríamos probar.

Veamos ahora que $f \circ g$ es la identidad.

Dada una sucesión $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, donde cada a_i es un número natural menor o igual que n, consideremos el spanning tree $T = g(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ de K_n cuyas ramas son

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_{n-2}, b_{n-2}),\ (a_{n-1}, b_{n-1})$$

donde

$$\begin{aligned}
b_1 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\} \\
b_2 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\} \\
b_3 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, b_2, a_3 \ldots, a_{n-2}\} \\
&\vdots \\
b_{n-2} &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}, a_{n-2}\} \\
b_{n-1} &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}\}
\end{aligned}$$

y a_{n-1} es el único $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq n$ y $j \neq b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}$. Probaremos que $f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$.

Como $b_1 \neq a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1}$ entonces la única rama de T que incide en b_1 es (a_1, b_1). Luego, b_1 es una hoja de T.
Supongamos ahora que $v \in \{1, 2, \ldots, n\}$ es una hoja de T.

Como $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, a_{n-1}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces $v = a_{n-1}$ o $v = b_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Veamos que $v \neq a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$:
Como v es una hoja entonces hay una única rama que incide en v. Si $v = a_{n-1}$ o $v = b_{n-1}$ entonces esa rama es (a_{n-1}, b_{n-1}) y por lo tanto $v \neq a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$. Y si $v = b_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n-2$ entonces esa rama es (a_i, b_i). Luego, $v \neq a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}$ y también $v \neq a_i$ pues $b_i \neq a_i$ para todo i.
Luego, como $b_1 = \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$ debe ser $b_1 \leq v$.
Esto muestra que $b_1 = \min\{j \,/\, j \text{ es una hoja de } T\}$ y por lo tanto el primer elemento de la sucesión $f(T)$, que por definición es el único vértice en T que es adyacente a b_1, es a_1.

Ahora consideremos el árbol T_1 que se obtiene eliminando en T el vértice b_1 y la rama (a_1, b_1). Las ramas de T_1 son (a_2, b_2), ... , (a_{n-2}, b_{n-2}), (a_{n-1}, b_{n-1}) y sus vértices son $b_2, \ldots, b_{n-1}, a_{n-1}$.
Como $b_2 \neq a_3, \ldots, a_{n-1}, b_3, \ldots, b_{n-1}$, entonces la única rama de T_1 que incide en b_2 es (a_2, b_2) y por lo tanto b_2 es una hoja de T_1.
Supongamos ahora que v es una hoja de T_1. Entonces $v \neq b_1$ y $v \in \{b_2, \ldots, b_{n-1}, a_{n-1}\}$. Luego, como hay una única rama de T_1 que incide en v, debe ser $v \neq a_2, \ldots, a_{n-2}$ y como $b_2 = \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \leq n \text{ y } j \neq b_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$ entonces debe ser $b_2 \leq v$.
Esto muestra que $b_2 = \min\{j \,/\, j \text{ es una hoja de } T_1\}$ y por lo tanto el segundo elemento de la sucesión $f(T)$, que por definición es el único vértice en T_1 que es adyacente a b_2, es a_2.
Continuando de esta manera se ve que $f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ y por lo tanto $f \circ g$ es la identidad.

Finalmente, probemos que $g \circ f$ es la identidad. Sea T un spanning tree de K_n. Si $f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ entonces las ramas de T son (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... , (a_{n-2}, b_{n-2}) y (u, v) , donde
$b_1 = \min\{j \,/\, j \text{ es una hoja de } T\}$ y a_1 es el único vértice de T que es adyacente a b_1.
$b_2 = \min\{j \,/\, j \text{ es una hoja de } T_1\}$ y sea a_2 el único vértice de T_1 que es adyacente a b_2, siendo T_1 el árbol que resulta de quitarle a T el vértice b_1 y la rama (a_1, b_1).
$b_3 = \min\{j \,/\, j \text{ es una hoja de } T_2\}$ y sea a_3 el único vértice de T_2 que es adyacente a b_3, siendo T_2 el árbol que resulta de quitarle a T_1 el vértice b_2 y la rama (a_2, b_2).

$$\vdots$$

$b_{n-2} = \min\{j \,/\, j \text{ es una hoja de } T_{n-3}\}$ y a_{n-2} el único vértice de T_{n-3} adyacente a b_{n-2}, siendo T_{n-3} el árbol que resulta de quitarle a T_{n-4} el vértice b_{n-3} y la rama (a_{n-3}, b_{n-3}) y (u, v) es la única rama del árbol que resulta de eliminar en T_{n-3} el vértice b_{n-2} y la rama (a_{n-2}, b_{n-2}). Recordemos además que

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, u, v\} = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad (1)$$

Sea $T' = g(f(T)) = g(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$.
Entonces las ramas de T' son (a_1, b'_1), (a_2, b'_2), ..., (a_{n-2}, b'_{n-2}), (a_{n-1}, b'_{n-1}), donde

$$
\begin{aligned}
b'_1 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \le n \text{ y } j \ne a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}\\
b'_2 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \le n \text{ y } j \ne b'_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}\\
b'_3 &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \le n \text{ y } j \ne b'_1, b'_2, a_3 \ldots, a_{n-2}\}\\
&\vdots\\
b'_{n-2} &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \le n \text{ y } j \ne b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-3}, a_{n-2}\}\\
b'_{n-1} &= \min\{j \in \mathbb{N} \,/\, j \le n \text{ y } j \ne b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-2}\}
\end{aligned}
$$

y a_{n-1} es el único $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \le n$ y $j \ne b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-2}, b'_{n-1}$. Recordemos además que

$$\{b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-1}, a_{n-1}\} = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad (2)$$

Probaremos que $b_i = b'_i$ para $i = 1, 2, \ldots n-2$ y que $(a_{n-1}, b'_{n-1}) = (u, v)$, de donde $T = T' = g(f(T))$.

Notemos que, por (1) y (2),

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, u, v\} = \{1, 2, \ldots, n\} = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-1}, a_{n-1}\} \qquad (3)$$

Como b_1 es una hoja de T entonces $b_1 \ne a_1, \ldots, a_{n-2}$. Luego, $b'_1 \le b_1$. Por otra parte, $b'_1 \ne a_1, \ldots, a_{n-2}$ y b'_1 es igual a uno y sólo uno de los elementos de $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, u, v\}$ (ya que pertenece al conjunto por (3) y $b_1, \ldots, b_{n-2}, u, v$ son todos distintos).
Luego, b'_1 es una hoja de T. Por lo tanto $b_1 \le b'_1$, de donde $b_1 = b'_1$.
Como b_2 es una hoja del árbol T_1 que se obtiene eliminando en T el vértice $b_1 = b'_1$ y la rama (a_1, b_1), entonces $b_2 \ne b_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ y por lo tanto $b'_2 \le b_2$.
Por otra parte, por (3), $b'_2 \in \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, u, v\}$ y, por definición, $b'_2 \ne b'_1 = b_1$. Luego, $b'_2 \in \{b_2, \ldots, b_{n-2}, u, v\}$ y como $b_2, \ldots, b_{n-2}, u, v$ son todos distintos entonces b'_2 es igual a uno y sólo uno de los elementos de $\{b_2, \ldots, b_{n-2}, u, v\}$. Luego, b'_2 es una hoja de T_1 de donde resulta que $b_2 \le b'_2$. Por lo tanto, $b_2 = b'_2$. Continuamos de esta manera hasta probar que $b_{n-2} = b'_{n-2}$.

Supongamos ahora que hemos probado que $b_i = b'_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-2$.
Por (3), dado que $b_1 = b'_1$, …, $b_{n-2} = b'_{n-2}$, resulta que $\{u, v\} = \{b'_{n-1}, a_{n-1}\}$. Luego $(a_{n-1}, b'_{n-1}) = (u, v)$. Esto muestra que $T = T'$ y por lo tanto $g \circ f$ es la identidad.