Ejercicios de programación en J - Práctica 4

1. Para cada uno de los siguientes ítems defina una función que

i) aplicada a una matriz A calcule la suma de las filas de A
ii) aplicada a una matriz A calcule la suma de las columnas de A
iii) aplicada a una matriz A encasille las celdas de dimensión 1 de A
iv) aplicada a una matriz A de 3×3 calcule la matriz que resulta de multiplicar la fila 1 de A por 2, la fila 2 de A por -1 y la fila 3 de A por 0
v) aplicada a una matriz A calcule la suma de todos los elementos de A
vi) aplicada a una matriz A de 4×4 calcule el vector $2F_1 - F_2 + 5F_3 + F_4$, donde F_i denota la fila i de A

2. Genere la matriz identidad de 45×45

3. Defina una función que aplicada a un par de vectores de $\mathbb{R}^n$ calcule su producto escalar
4. Defina una función que calcule la cantidad de columnas de una matriz
5. Qué resultado obtendrá si tipea

```
A=: 3 10 10 $ >: i. 10
A (* " 1 0) 2 1 3
```

6. Defina una función que aplicada a una matriz A (cuyos coeficientes sean números naturales) obtenga la matriz que en el lugar ij contenga el factorial de a_{ij}

7. Sean a y b dos vectores de longitud n. Defina la función f(a,b)=$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$

8. Defina una función que aplicada a una matriz A de 5×5 obtenga la matriz que resulta de

i) sumar 2 a los elementos de la diagonal de A
ii) multiplicar por 3 cada elemento de la diagonal de A

9. Defina una función que, aplicada a un par de matrices A y B de las mismas dimensiones, calcule la matriz que en el lugar ij contenga el máximo entre a_{ij} y b_{ij}

10. Para cada uno de los siguientes ítems defina una función que aplicada a una matriz A (que tenga al menos 3 filas y al menos 3 columnas) obtenga la matriz que resulta de

i) sumar 1 a cada elemento de la segunda columna de A
ii) sumar 1 a cada elemento de la segunda fila de A
iii) intercambiar las filas 1 y 3 de A
iv) intercambiar las columnas 2 y 3 de A
iv) cambiar la fila 2 de A por $F_2 + 4F_3$

11. Calcule las tablas de suma y producto para $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_9$

12. Defina una función que aplicada a dos vectores x e y determine cuántas componentes de x son también componentes de y.

13. i) Defina una función que aplicada a N calcule todos los primos positivos menores o iguales que N
ii) Defina la función $\pi(N)$ = cantidad de primos positivos menores o iguales que N

Nota: $\pi(N)$ es asintóticamente igual a $\frac{N}{\ln N}$ (es decir, el cociente tiende a 1).

14. Defina una función $f : \mathbb{N}_{\geq 2} \longrightarrow \{0, 1\}$ que satisfaga: $f(N) = 1$ si todo número par entre 4 y $2N$ puede expresarse como la suma de dos primos y $f(N) = 0$ en otro caso. Calcule $f(N)$ para $N = 2005$ y verifique que el resultado es 1.

Conjetura de Goldbach: todo número par mayor o igual que 4 puede escribirse como suma de dos primos.

Esta conjetura ha sido verificada para todo entero par menor o igual que 100000, pero no ha sido demostrada aún.

15. Dos primos p y q ($p < q$) se dicen *mellizos* si $q = p + 2$ (es decir, si son dos primos impares consecutivos). Defina una función que calcule, para cada N, todos los primos p tales que $3 \leq p \leq N$ y $q = p + 2$ también sea primo.

Nota: Se conjetura que existen infinitos primos mellizos.

16. Un número n se dice *perfecto* si n es igual la suma de todos sus divisores positivos salvo n. Por ejemplo, 28 es perfecto porque $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Haga un programa que calcule, para cada N, todos los números perfectos entre 2 y N.

Nota: no se sabe si existe algún número perfecto impar. Los números perfectos pares están caracterizados: n es perfecto si y sólo si $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, donde p es un primo positivo tal que $2^p - 1$ también es primo.

17. Dos números naturales n y m se dicen *amigos* si la suma de todos los divisores positivos de n salvo n es igual a m y la suma de todos los divisores positivos de m salvo m es igual a n (por ejemplo, $n = 220$ y $m = 284$ son números amigos). Defina una función $f(n, K)$ que calcule todos los números amigos de n entre 1 y K. Usando esta función verifique que 284 es el único amigo de 220 entre 1 y 1000 y que 148 no tiene ningún amigo entre 1 y 500.

18. Haga un programa que demuestre que la ecuación diofántica $x^3 + y^3 = 1729$ tiene dos soluciones.

Nota: Ramanujan le dijo a Hardy que 1729 era el menor n tal que la ecuación diofántica $x^3 + y^3 = n$ tiene dos soluciones ($1^3 + 12^3 = 1729 = 9^3 + 10^3$)

19. Defina la función $f(x) = 3x + 7$ y calcule $f^{-1}(17)$

20. Defina las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ y $g(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ y calcule $f \circ g^{-1}(3)$

21. Defina una función que, para cada x, calcule el logaritmo en base 3 de x