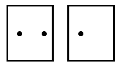
C A P I T U L O 15

LIMITES, DERIVADAS E INTEGRALES

Límites:

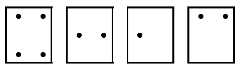
La notación de los límites guarda, en cuanto a la posición relativa de los símbolos, gran similitud con las sumatorias y productorias.

Para indicar que una variable x tiende a un valor c, se emplea una flecha horizontal.

$\rightarrow$  (25, 2)

Como puede verse, la transcripción de esta flecha coincide con la vista al estudiar las semirrectas en el capítulo correspondiente a la geometría.

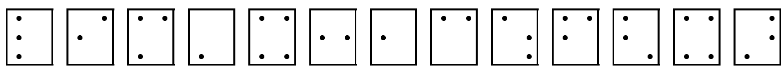
Escribimos entonces:

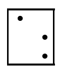
$x \rightarrow c$ 

Y leemos: "x tiende a c".

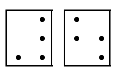
En caracteres visuales, la indicación de a qué tiende la variable independiente se ubica "debajo" del símbolo $\lim$.

En Braille, para indicar el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a c se aplica el criterio con el cual se representaron las sumatorias:

$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ 

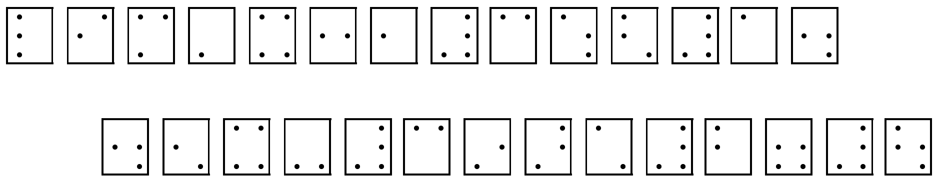
Como puede verse, nuevamente hemos usado el signo  (156) para simbolizar la vuelta al renglón.

Es sabido que la variable independiente puede tender a infinito o puede ser que el límite sea infinito. Para ello:

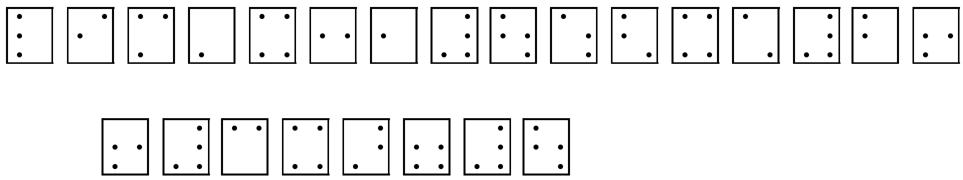
Infinito : ∞  (3456, 1256)

Ejemplos:

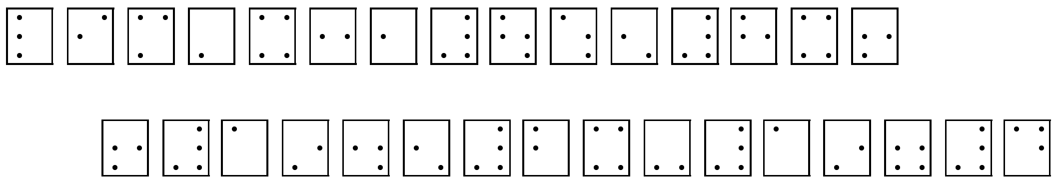
$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} \right)^2 = \infty$$



$$\lim_{x \to \infty} (x^2 + 3\,x) = \infty$$

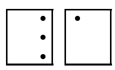


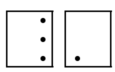
$$\lim_{x \to \infty} \frac{8\,x+1}{2\,x-1} = 4$$



Límites laterales:

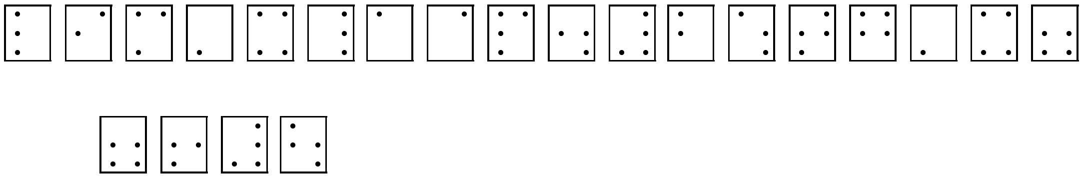
Las flechas verticales con punta hacia arriba o hacia abajo que se utilizan para señalar cómo tiende la variable independiente a un valor determinado, se representan en Braille así:

$\uparrow$  (456, 1)

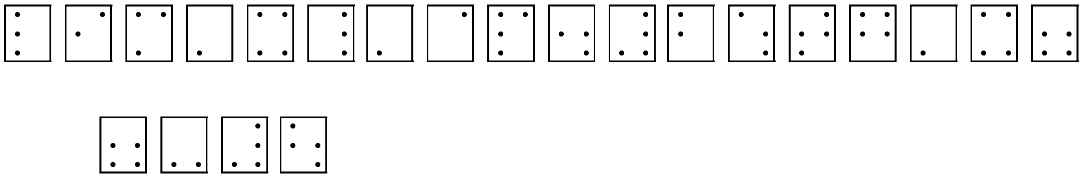
$\downarrow$  (456, 3)

Ejemplos:

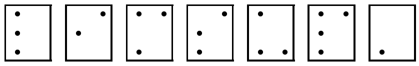
$$\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} tg\, x = +\infty$$

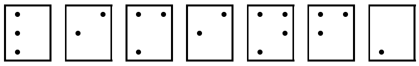


$$\lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} tg\, x = -\infty$$



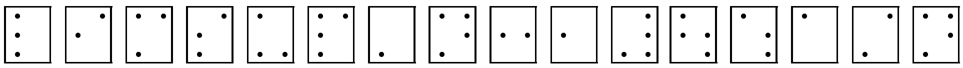
Límites superior e inferior:

Límite superior: $\limsup$ 

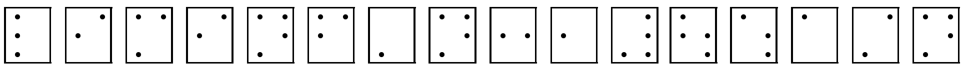
Límite inferior: $\liminf$ 

Ejemplos:

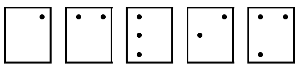
$$\limsup_{n \to \infty} a_n$$

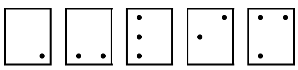


$$\liminf_{n \to \infty} a_n$$



En ocasiones, estos límites suelen representarse mediante las barras en posición de superescrito y suscrito, respectimamente.

$\overline{lim}$ 

$\underline{lim}$ 

Derivadas:

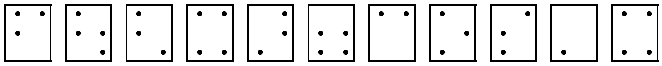
La notación de las derivadas no ofrece dificultades debido a que en la mayor parte de los casos, las expresiones se transcriben de acuerdo con las normas ya estudiadas en los capítulos anteriores; prácticamente no es necesario introducir notaciones específicas.

Para notar la derivada primera, la segunda y la tercera de funciones de una sola variable, son muy usados los índices “prima”, “segunda” y “tercera”, vistos en capítulos anteriores.

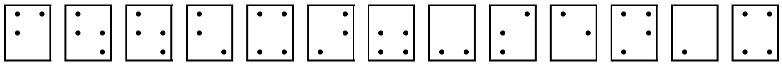
Por ejemplo:

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = sen\, x$
se tiene:

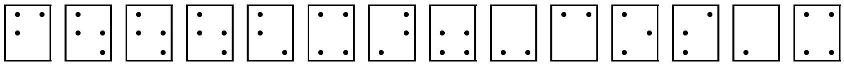
$$f'(x) = cos\, x$$



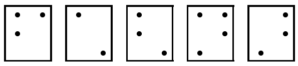
$$f''(x) = -sen\, x$$



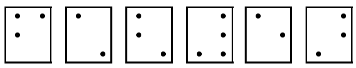
$$f'''(x) = -cos\, x$$



En este contexto, la derivada n-ésima se representa con un superíndice a derecha entre paréntesis, cualquiera sea el n mayor o igual que 4.

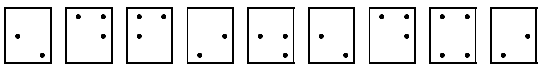
$f^{(n)}$ 

denota la derivada n-ésima de f.

$f^{(5)}$ 

representa la derivada quinta de f.

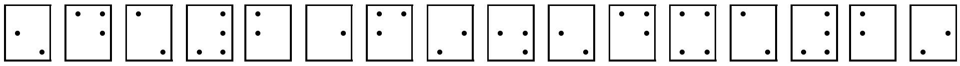
Notación diferencial de la derivada:

$\frac{df}{dx}$ 

denota la derivada primera de f con respecto a x

Las derivadas sucesivas se representan utilizando, como en tinta, la notación exponencial.

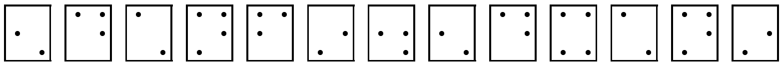
$$\frac{d^2\,f}{d\,x^2}$$



expresa la derivada segunda de f con respecto a x dos veces.

En general:

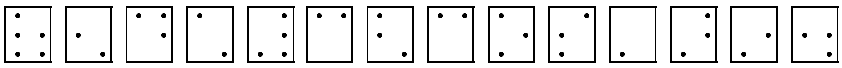
$$\frac{d^n\,f}{d\,x^n}$$

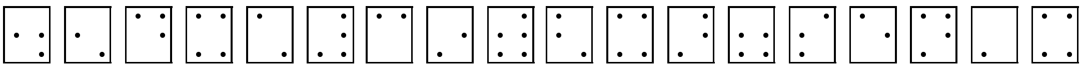


representa la derivada n-ésima de f con respecto a x n veces.

Ejemplo:

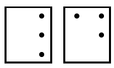
$$[\frac{d^3\,(cos)}{dx^3}](x) = sen\,x$$





la derivada tercera del coseno con respecto a x tres veces -en x- es igual al seno de x

Símbolo de derivada parcial:

∂  (456, 145)

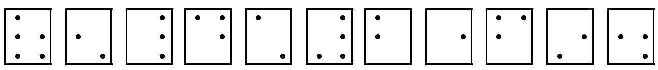
Si se trata de derivadas sucesivas con respecto a la misma variable, la notación es análoga a la diferencial.

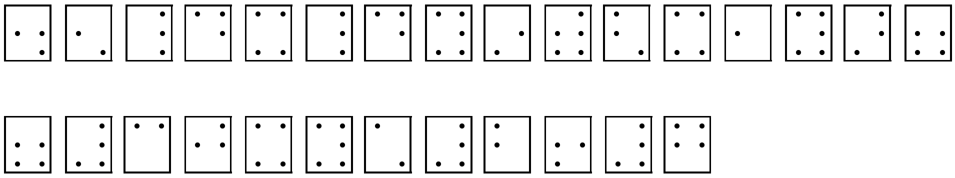
En el caso de las derivadas cruzadas, la representación Braille no es muy diferente y sigue los lineamientos de la notación en caracteres visuales.

Ejemplos:

Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5\,x^2\,y^3 + 7\,x\,y$
se tiene:

$$[\frac{\partial^2\,f}{\partial x\,\partial y}](x, y) = 30\,xy^2 + 7$$

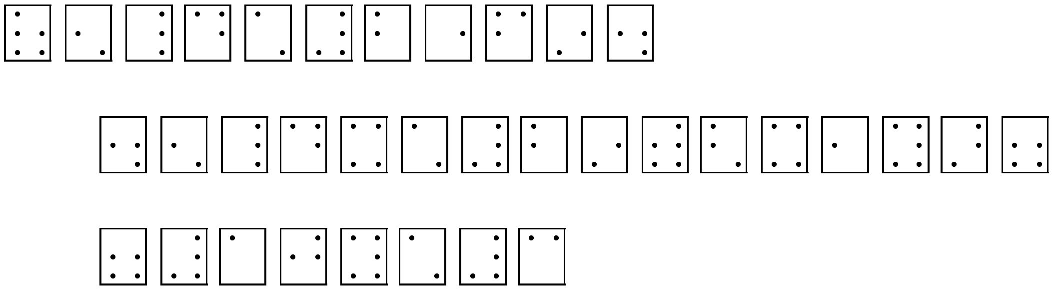




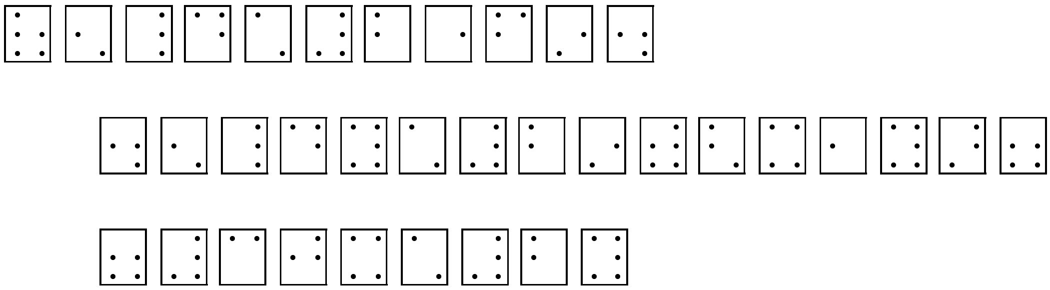
Esta expresión dice que la derivada segunda respecto de x y respecto de y de la función f dada, es igual a: $30\,xy^2 + 7$

Para la misma función:

$[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}](x, y) = 10\,y^3$



$[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}](x, y) = 30\,x^2\,y$

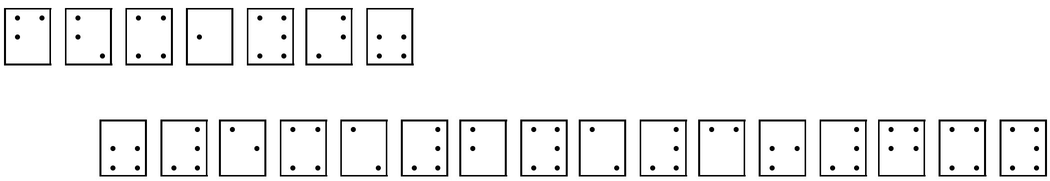


Nota:

Las derivadas primeras y segundas de las funciones reales suelen representarse señalando las variables por medio de subíndices.

Así, para la función del ejemplo anterior se tiene:

$f(x, y) = 5\,x^2\,y^3 + 7\,x\,y$



$f_x(x, y) = 10\, x\, y^3 + 7\, y$

⠋⠌⠭⠣⠭⠂⠽⠜⠶⠼⠁⠚⠭⠽⠡⠼⠉⠖

⠖⠼⠛⠽

$f_y(x, y) = 15\, x^2\, y^2 + 7\, x$

⠋⠌⠽⠣⠭⠂⠽⠜⠶

⠶⠼⠁⠑⠭⠡⠼⠃⠽⠡⠼⠃⠖⠼⠛⠭

$f_{x\,x}(x, y) = 10\, y^3$

⠋⠌⠢⠭⠭⠔⠣⠭⠂⠽⠜⠶

⠶⠼⠁⠚⠽⠡⠼⠉

$f_{x\,y}(x, y) = 30\, x\, y^2 + 7$

⠋⠌⠢⠭⠽⠔⠣⠭⠂⠽⠜⠶

⠶⠼⠉⠚⠭⠽⠡⠼⠃⠖⠼⠛

$f_{y\,y}(x, y) = 30x^2y$

⠋⠌⠢⠽⠽⠔⠣⠭⠂⠽⠜⠶

⠶⠼⠉⠚⠭⠡⠼⠃⠽

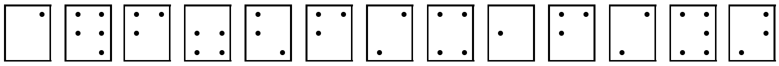
Operador nabla: ∇ ⠈⠻ (4, 12456)

Operador laplaciano: $\triangle$ ⠸⠦ (456, 236)

Ejemplos:

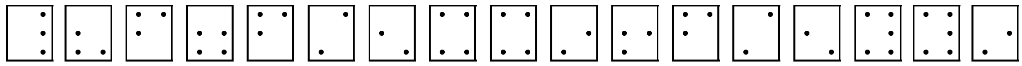
Dada una función convenientemente derivable, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, el resultado de aplicar el operador nabla a la función f es el vector gradiente:

$$\nabla f = (f_x,\, f_y)$$



El resultado de aplicarle a f el operador laplaciano es:

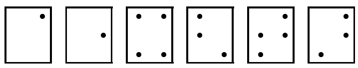
$$\triangle f = f_{x\,x} + f_{y\,y}$$



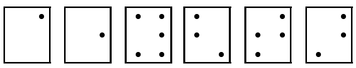
Algunas derivadas especiales:

En física, las derivadas con respecto al tiempo de las coordenadas del espacio se representan con un punto en posición de superescrito.

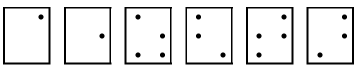
Según hemos visto, en Braille se representarán anteponiendo el punto 4 a la letra afectada.

$\dot{x}(t)$ 

derivada de x con respecto al tiempo

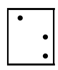
$\dot{y}(t)$ 

derivada de y con respecto al tiempo

$\dot{z}(t)$ 

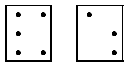
derivada de z con respecto al tiempo

Integrales:

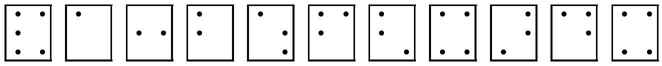
Al igual que el signo radical, el de sumatoria o los de las uniones e intersecciones múltiples, la representación Braille del signo de integral es compuesta y, como era de esperar, el segundo de los elementos Braille que lo componen es el  (156), ya que después de la especificación de la región de integración, debe volverse a la línea básica de escritura.

Es así que la representación Braille de la integral definida de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre un intervalo, tiene gran similitud con la notación de una sumatoria, cosa que por otra parte ocurre también en la notación común.

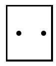
La notación Braille de la integral indefinida, en cambio, se asemeja a la representación de la raíz cuadrada, ya que al no aparecer la región de integración, se juntan ambos componentes Braille del signo de integral.

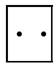
Signo de integral: $\int$  (12346) (156)

Ejemplos:

$\int_a^b f(x)\,dx$ 

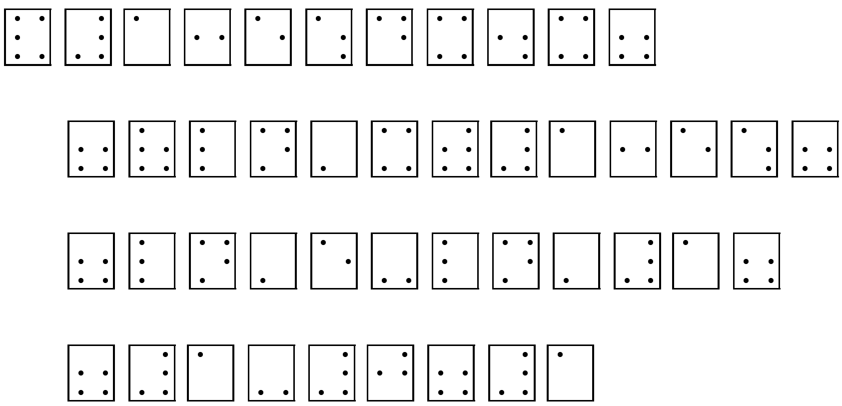
integral entre a y b de f de x diferencial x

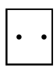
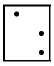
La función que desempeña el elemento Braille  (25) es análoga a la que cumple en la notación de las sumatorias, productorias y de los números combinatorios.

La posición que en tinta ocupan los límites de integración con relación al signo de integral, justifica el empleo del elemento Braille  (25) para reflejar el cambio de nivel.

Esta observación nos da una idea para representar el cálculo de una integral definida mediante la regla de Barrow:

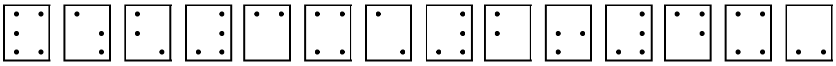
$$\int_1^e \frac{dx}{x} = [ln\,x]_1^e = ln\,e - ln\,1 = 1 - 0 = 1$$

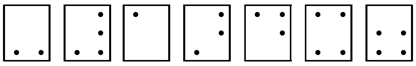


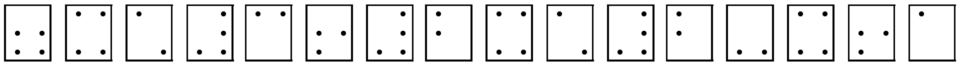
En el segundo miembro de esta cadena de igualdades, se ha escrito la primitiva; el límite inferior y el superior, separados por el signo  (25) que representa el cambio de nivel; finalmente el signo  (156) indica la vuelta a la línea básica de escritura.

Ejemplo de integral indefinida:

$$\int (3\,x^2 + 4\,x - 1)\,dx = x^3 + 2\,x^2 - x + a$$







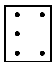
la integral indefinida de la función

$$f(x) = 3\,x^2 + 4\,x - 1 \text{ es } g(x) = x^3 + 2\,x^2 - x + a$$

donde a es un número real.

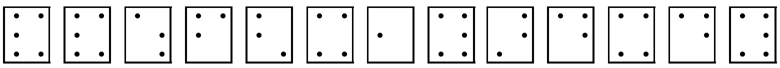
Integrales múltiples:

En tinta, las integrales múltiples se representan repitiendo el signo de integral la cantidad de veces que sea necesario.

En Braille, se repite únicamente el elemento  (12346).

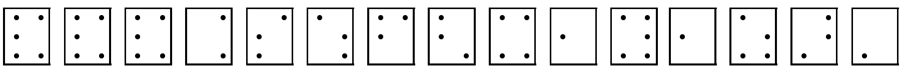
Ejemplo:

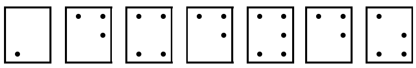
$$\int \int f(x,y)\,dx\,dy$$



integral doble de la función $f(x,\, y)$ diferencial x diferencial y

$$\int \int \int_S f(x,\, y,\, z)\,dx\,dy\,dz$$





integral triple sobre la región S de la función $f(x,\, y,\, z)$ diferencial x diferencial y diferencial z

Integrales curvilíneas:

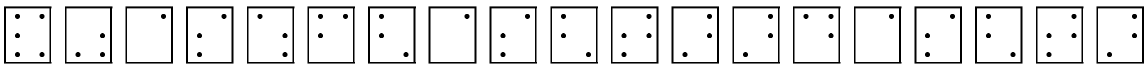
Dada una curva parametrizada $\varsigma(t)$, la integral de una función f sobre la curva $\varsigma(t)$ se escribe así:

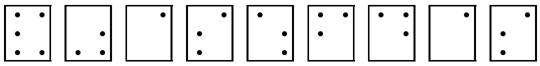
$$\oint_\varsigma f(\varsigma(t))\, d\varsigma(t)$$

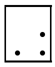
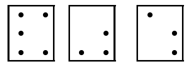
O también:

$$\oint_\varsigma f\, d\varsigma$$

En Braille se representan, respectivamente así:

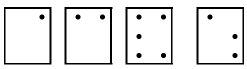


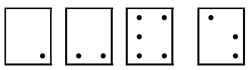


El elemento Braille  (356) se utiliza en este caso para poner en evidencia que la integral es curvilínea. Puede pensarse que el signo de integral curvilínea es:  (12346, 356) (156).

Integrales superior e inferior:

Tal como ocurre con la notación de los límites superior e inferior, para las integrales se utilizan los signos siguientes:

Integral superior: $\overline{\int}$  y

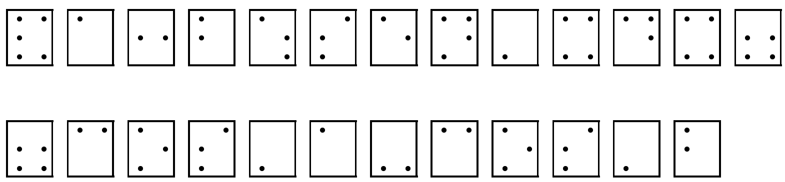
Integral inferior: $\underline{\int}$ 

Ejercicios

1. Traduzca al lenguaje simbólico (en caracteres visuales) la siguiente expresión: "El límite para x tendiendo a c de la función f de x es igual a z si y sólo si para todo épsilon mayor que cero existe un delta mayor que cero tal que si el módulo de $x - c$ es menor que delta, entonces el módulo de la diferencia entre f de x y z es menor que épsilon".
2. Transcriba al Sistema Braille su respuesta del ejercicio anterior.

3. Traduzca al lenguaje simbólico (directamente en Braille) la siguiente expresión: "El límite para n tendiendo a infinito de la sucesión de términos a sub n es igual a b si y sólo si para todo épsilon mayor que cero existe un número natural n sub cero tal que si n es mayor que n sub cero, entonces el módulo de la diferencia entre a sub n y b es menor que épsilon".

4. Transcriba a caracteres visuales la siguiente expresión:



5. Represente simbólicamente (en caracteres visuales) la derivada tercera (dos veces respecto de x y una respecto de y) de la función f de las variables x e y.

6. Transcriba al Sistema Braille su respuesta del ejercicio anterior.

7. Escriba simbólicamente (directamente en Braille) el siguiente texto: "El límite para n tendiendo a infinito de la sucesión cuyo término general es la potencia de exponente n y base la suma de 1 y 1 sobre n, es igual a e"
(El número e es la base de los logaritmos naturales o neperianos).