C A P I T U L O   14

OTRAS NOTACIONES

En este capítulo nos proponemos incluir, entre otras, notaciones vinculadas con los temas abordados en los capítulos anteriores, pero que aparecen con menor frecuencia en textos de nivel elemental.

Hasta ahora hemos introducido notaciones relativas a temas conocidos por el lector, dando algunas explicaciones a modo de somera introducción. Así, por ejemplo, explicamos en su momento qué es la potencia n-ésima y la raíz cuadrada de un número.

A partir de ahora supondremos que los temas son conocidos y sólo se dará algún detalle para clarificar la notación.

Números en distinta base:

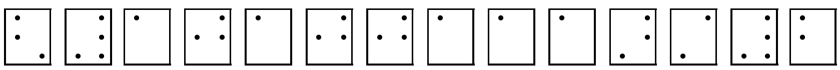
La representación de un número entero en base menor o igual que 10 se efectúa mediante una sucesión de dígitos menores que la base, siguiendo las reglas de la notación en sistema decimal. La base se escribe como subíndice y es común utilizar para ella el sistema decimal.

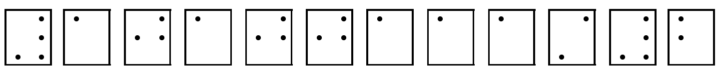
En tinta suele encerrarse entre paréntesis la sucesión de cifras.

En Braille se representa de igual forma, aunque puede suprimirse el paréntesis dado que, a diferencia de lo que ocurre en la notación común, esa supresión no da lugar a confusión.

Ejemplos:

$$(10100111)_2$$

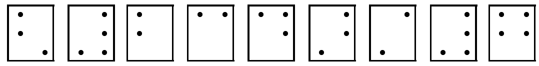


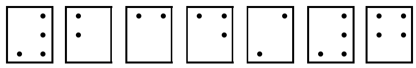
y 

son dos maneras de escribir la representación Braille del número ciento sesenta y siete en base dos, ya que:

$(10100111)_2 =$
$= 1 \,.\, 2^7 + 0 \,.\, 2^6 + 1 \,.\, 2^5 + 0 \,.\, 2^4 + 0 \,.\, 2^3 + 1 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0 =$
$= 128 + 32 + 4 + 2 + 1 = 167$

$(234)_7$



y 

son formas de la representación Braille en base 7 del número ciento veintitrés. En efecto:

$$2 \,.\, 7^2 + 3 \,.\, 7^1 + 4 \,.\, 7^0 = 2 \,.\, 49 + 3 \,.\, 7 + 4 = 98 + 21 + 4 = 123$$

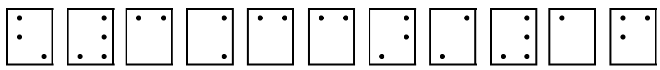
Si la base es mayor que 10, será necesario agregar símbolos. Es común utilizar letras latinas mayúsculas que en Braille deberán escribirse con su correspondiente prefijo alfabético, *el cual no interrumpirá el valor del signo numérico.*

Por ejemplo, en el caso de base 16, se utilizan como dígitos las letras A, B, C, D, E y F para designar respectivamente:

A	diez	D	trece
B	once	E	catorce
C	doce	F	quince

Ejemplos:

$(3C3)_{16}$



es la representación del número cuyas cifras en el sistema de base 16 son 3, C y 3, recordando que la letra C representa el número “doce”.

En el sistema decimal es:

$$(3C3)_{16} = 3 \,.\, 16^2 + 12 \,.\, 16 + 3 = 3 \,.\, 256 + 12 \,.\, 16 + 3 = 768 + 192 + 3 = 963$$

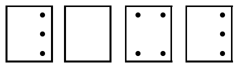
Nota:

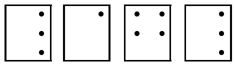
Que el prefijo alfabético de letra latina de imprenta mayúscula no interrumpa el valor del signo numérico, significa en el ejemplo no sólo que la letra C representa allí al número doce, sino además que la letra c que sigue representa a la cifra 3, aunque no se repita el signo numérico. La transcripción al Braille de la representación de un número entero en cualquier sistema de numeración posicional requiere *en todos los casos* el empleo de un solo signo numérico.

Valor absoluto:

En caracteres visuales, el módulo o valor absoluto de un número suele expresarse encerrando la representación de éste entre barras verticales, lo cual puede hacerse también en Braille, debiendo únicamemte tener presentes las reglas de uso del signo Braille que representa la barra vertical.

Ejemplos:

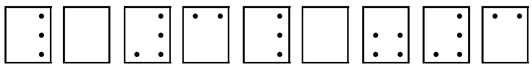
Módulo de x $|x|$ 

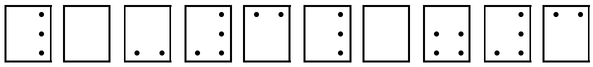
Módulo de gamma: $|\gamma|$ 

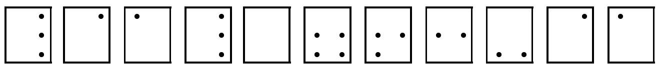
En el primer ejemplo, fue necesario dejar un espacio en blanco después de la primera barra vertical, ya que de escribir la letra x junto a ésta, no quedaría un semiespacio en blanco a su derecha.

En cambio, en el segundo aparece el prefijo de letra griega minúscula inmediatamente a la derecha de la barra vertical, ya que está garantizado el requerido semiespacio en blanco.

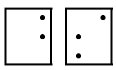
Más ejemplos:

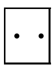
$|3| = 3$ 

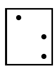
$|-3| = 3$ 

$|\alpha| = \pm\alpha$ 

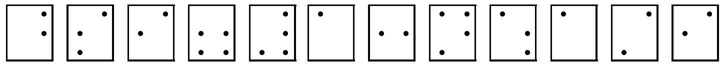
Sumatorias:

El símbolo de sumatoria, tal como ocurre en la notación en caracteres visuales, es una letra griega Σ  (sigma mayúscula).

Los límites se anotan a continuación del símbolo de sumatoria separados por el signo  (25) que por lo general será utilizado para representar un cambio de nivel.

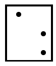
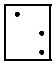
El signo  (156) indica que lo que sigue vuelve al renglón.

Por ejemplo:

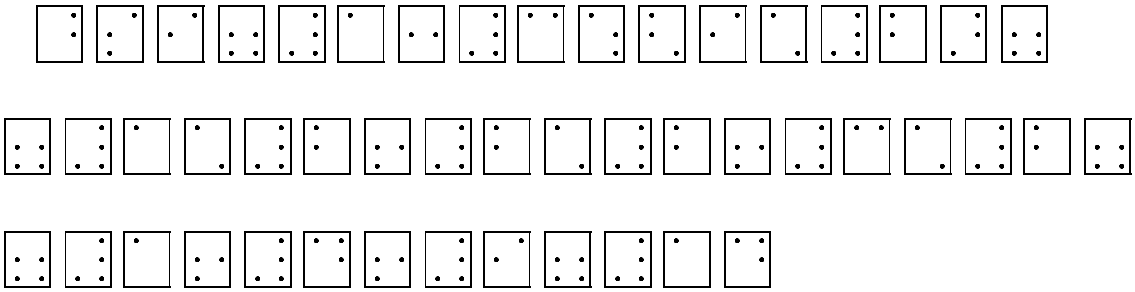
$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 

es la sumatoria desde 1 hasta n de los elementos "a sub i".

Nota:

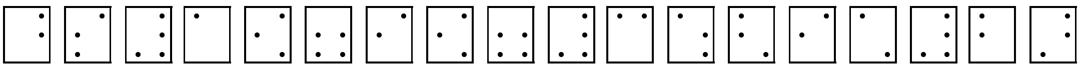
Se observa que la función del signo  (156) es análoga a la que cumple en la notación de las raíces, ya que el índice se anota en un nivel más alto y el radicando, que en Braille va después del signo  vuelve a la línea básica de escritura.

$\sum_{i=1}^{3}(i^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$



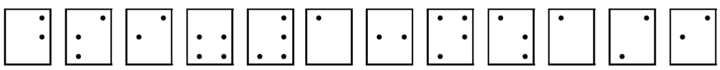
Es sabido que esta sumatoria puede representarse en tinta de otras maneras, como por ejemplo:

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} (i^2)$$



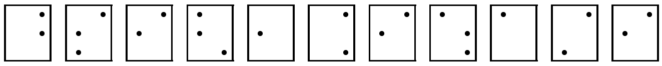
La representación Braille será igual aun cuando en la notación común aparezcan los límites de sumación respectivamente por debajo y por encima del signo de sumatoria, tal como ocurre en la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$



Si la suma se efectúa sobre un conjunto de índices I, se escribirá siguiendo el mismo criterio:

$$\sum_{i \in I} a_i$$

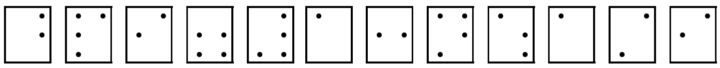


representa la sumatoria de los a_i para i que recorre el conjunto de índices I.

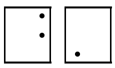
Productorias:

Las reglas para la notación de las productorias son análogas a las de las sumatorias. En este caso la letra griega que se utiliza es la Π (pi) mayúscula.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$



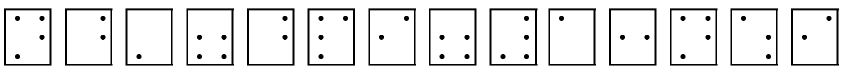
denota la productoria desde i igual 1 hasta n de los a_i

Factorial: !  (45, 3)

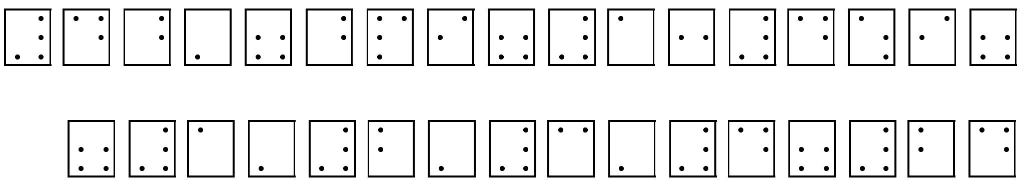
La productoria desde $i = 1$ hasta n de i se llama "factorial de n" o bien "n factorial".

O sea:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$



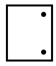
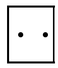
$4! = \prod_{i=1}^{4} i = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$

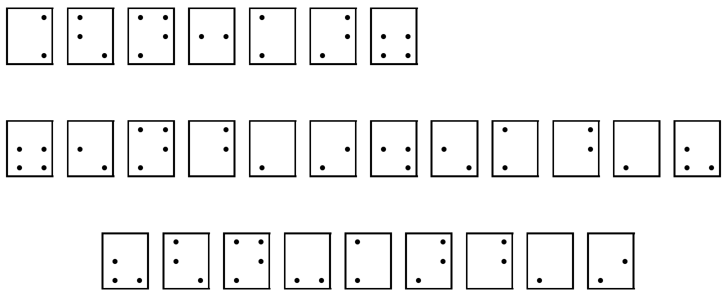


Número combinatorio (coeficiente binomial):

El número de subconjuntos de k elementos que tiene un conjunto de n elementos se representa $\binom{n}{k}$

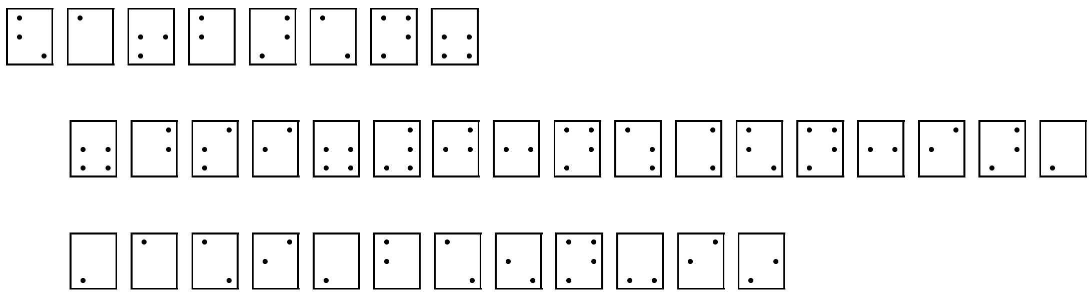
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$

En Braille el elemento  (46), antes del paréntesis, anuncia que se trata de un número combinatorio y se utiliza el elemento Braille  (25) para señalar el cambio de nivel.



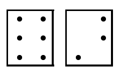
Como es sabido, este número coincide con el k-ésimo coeficiente binomial; es decir, con el k-ésimo coeficiente del desarrollo de la fórmula del *binomio de Newton.*

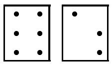
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \,.\, a^i \,.\, b^{n-i}$$



Uniones e intersecciones múltiples:

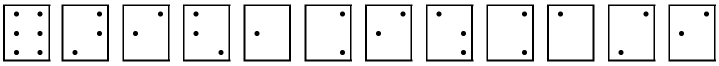
Lo visto para sumatorias y productorias se aplica a la unión y la intersección de conjuntos. Los símbolos utilizados en este caso son los siguientes:

Unión: $\bigcup$  (123456, 345)

Intersección: $\bigcap$  (123456, 156)

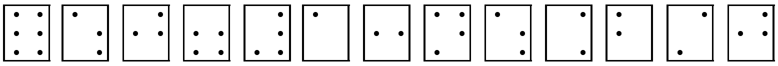
Ejemplos:

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$



denota la unión para i que recorre el conjunto de índices I de los conjuntos A sub i

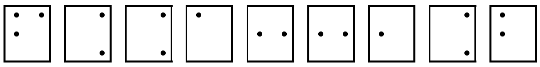
$$\bigcap_{j=1}^{n} B_j$$

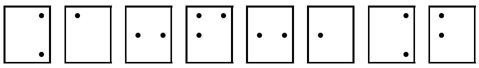


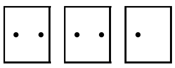
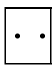
es la intersección para j entre 1 y n de los conjuntos B sub j .

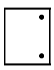
Funciones:

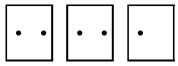
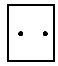
En caracteres visuales, para indicar que una función f tiene dominio A y codominio B , se adoptan distintas notaciones. A continuación presentamos las más usadas con sus correspondientes transcripciones al Braille:

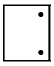
$f : A \longrightarrow B$ 

$A \xrightarrow{\quad f \quad} B$ 

En Braille, el signo  (25, 25, 2) representa la flecha. La repetición del elemento Braille  (25) se justifica porque para transcribir la segunda de las representaciones mencionadas, se ubica la f entre los dos elementos iguales.

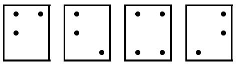
Los dos puntos que aparecen en la primera de las expresiones se representan excepcionalmente para ese caso, con el signo  (46).

La modificación de la representación Braille de los "dos puntos" exclusivamente para esta transcripción, se fundamenta en el hecho de que al partir el signo  (25, 25, 2) como se hizo en el segundo ejemplo, aparece el elemento Braille  cumpliendo una función diferente de la que habitualmente desempeñan los "dos puntos", lo cual, de no efectuar esa modificación, acarrea la posibilidad de error.

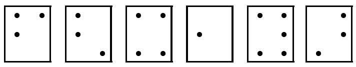
Por otra parte, para evitar confusión con letras mayúsculas, cada vez que el signo  (46) represente los "dos puntos" deberá ir seguido de un semiespacio en blanco, tal como ocurre con la barra vertical.

Para representar una función explicitando las variables (cualquiera sea el número de éstas) basta transcribir textualmente la notación en tinta.

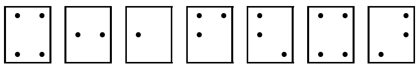
Ejemplos:

$f(x)$ 

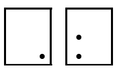
es la función f de la variable x.

$f(x, y)$ 

es la función f de las variables x e y

$x \to f(x)$ 

el punto x se aplica en $f(x)$

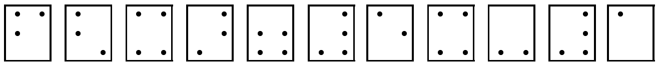
Composición de funciones: o  (6, 23)

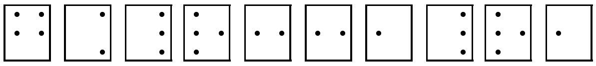
Ejemplo:

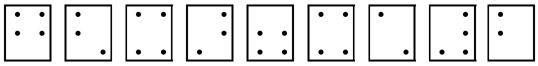
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{f(x)} = 5\,\mathrm{x} - 1$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^2$

se tiene:

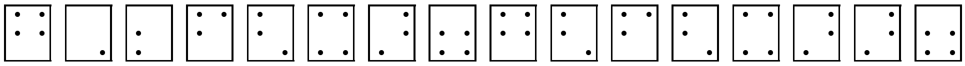
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5\,x - 1) = (5\,x - 1)^2$

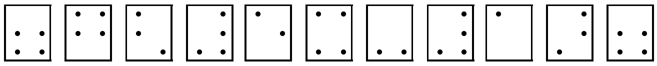
Si 

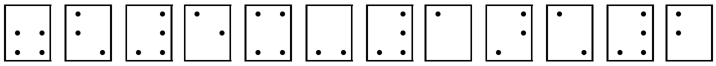
y 



Se tiene:





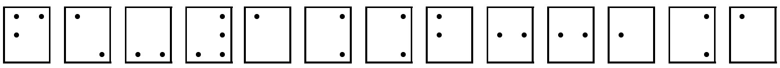


Función inversa:

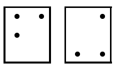
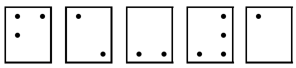
Si f es una función biyectiva de A en B, la inversa f^{-1} aplica B en A.

O sea:

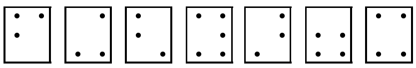
$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$



Para la función inversa de una función f, hay también una notación Braille abreviada.

Puede escribirse  en lugar de 

Si $f : A \longrightarrow B$ es una función biyectiva, y vale que $y = f(x)$, se tiene:

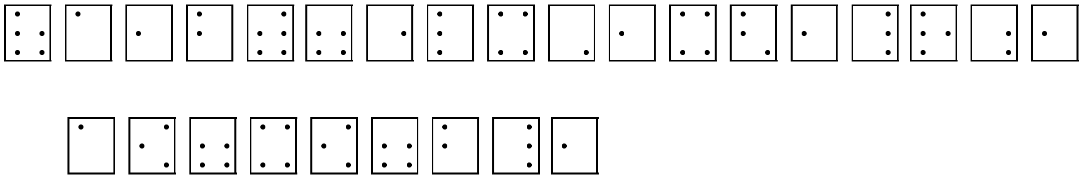
$f^{-1}(y) = x$ 

Intervalos:

Para las funciones de dominio y codominio real (es decir: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) resulta a menudo necesario estudiar el comportamiento en un intervalo.

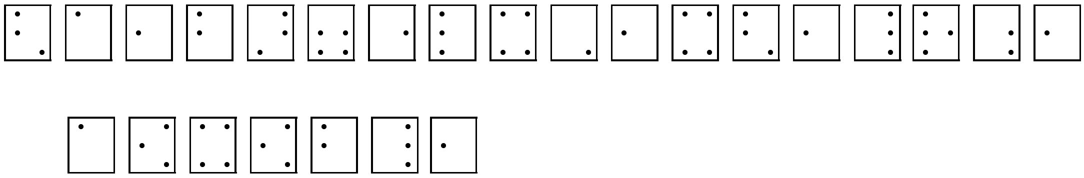
Definiremos los intervalos reales acotados, aprovechando la oportunidad como práctica de la notación conjuntista.

$[a,\, b] = \{\, x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b} \,\}$



El intervalo cerrado de extremos a y b es el conjunto de los x tales que x pertenece al conjunto de los números reales; a es menor o igual que x y x es menor o igual que b

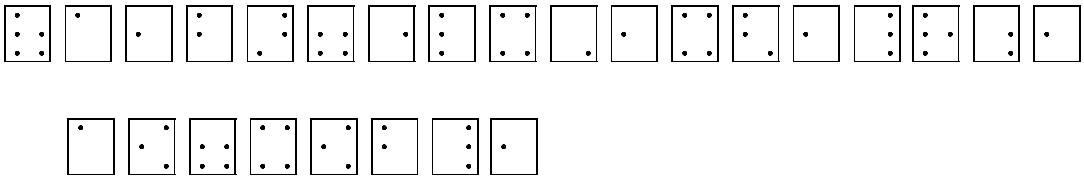
$(a\,, b) = \{\, x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b} \,\}$



El intervalo abierto de extremos a y b es el conjunto de los x tales que x pertenece al conjunto de los números reales; a es menor que x y x es menor que b

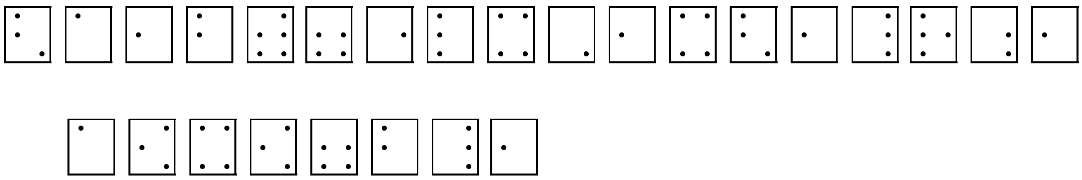
El contexto permitirá establecer una clara diferencia entre esta notación y la de un par ordenado.

$[a,\, b) = \{\, x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{a} \leq \mathrm{x} < \mathrm{b} \,\}$



El intervalo semiabierto (cerrado por la izquierda y abierto por la derecha) de extremos a y b es el conjunto de los x tales que x pertenece al conjunto de los números reales; a es menor o igual que x y x es menor que b

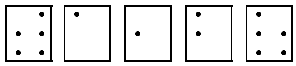
$(a,\, b] = \{\, x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{a} < \mathrm{x} \leq \mathrm{b} \,\}$



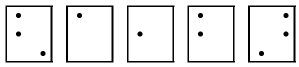
El intervalo semiabierto (abierto por la izquierda y cerrado por la derecha) de extremos a y b es el conjunto de los x tales que x pertenece al conjunto de los números reales; a es menor que x y x es menor o igual que b

Si bien ésta es la notación más usada para los intervalos, es factible encontrar otras, tales como la que en lugar de los paréntesis utiliza los corchetes, pero reemplazando la apertura de paréntesis por el cierre de corchete y el cierre de paréntesis por la apertura de corchete.

Por ejemplo, se escribe:

$]a,\, b[$ 

en lugar de

$(a,\, b)$ 

pero es más común la notación presentada anteriormente.

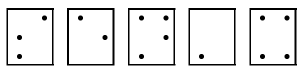
Funciones determinadas:

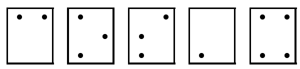
Estudiaremos aquí la notación de funciones de aparición muy frecuente en la matemática y en la física; funciones que en caracteres visuales tienen también una representación propia.

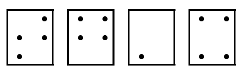
Funciones trigonométricas:

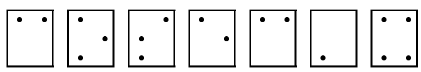
Las funciones trigonométricas se representan con las mismas letras minúsculas que se utilizan para sus respectivas representaciones en caracteres visuales seguidas en todos los casos por el punto 3.

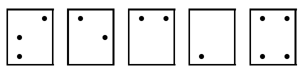
Esta es la nómina completa:

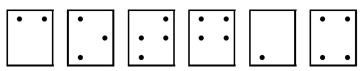
seno de x — $sen\, x$ 

coseno de x — $cos\, x$ 

tangente d x — $tg\, x$ 

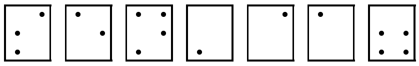
cosecante de x — $cosec\, x$ 

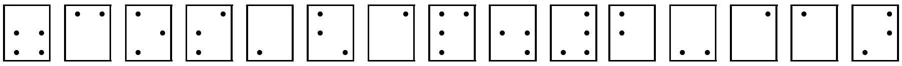
secante de x — $sec\, x$ 

cotangente de x — $cotg\, x$ 

Ejemplos:

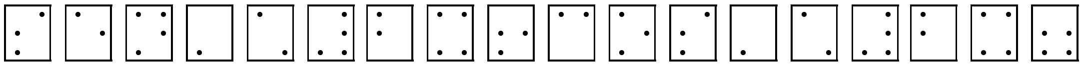
$$sen\,\alpha = cos\,(\tfrac{\pi}{2} - \alpha)$$

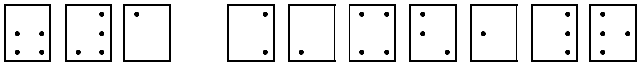




seno de α es igual al coseno de π sobre dos menos α.

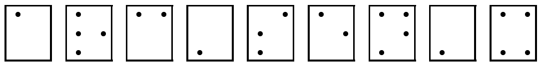
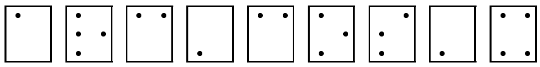
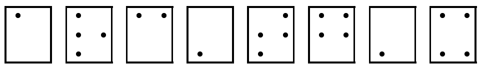
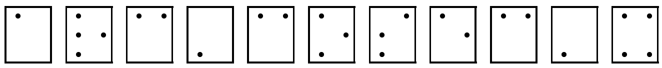
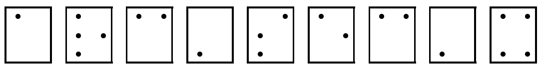
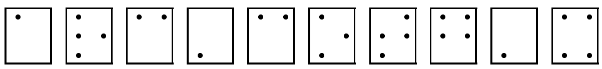
$$sen^2\,x + cos^2\,x = 1\ \forall x\ \in \mathbb{R}$$





seno cuadrado de x más coseno cuadrado de x es igual a 1 para todo x perteneciente al conjunto de los números reales.

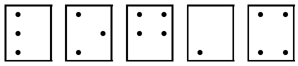
Funciones inversas de las funciones trigonométricas:

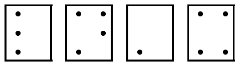
arco seno de x	$arcsen\,x$	
arco coseno de x	$arccos\,x$	
arco tangente de x	$arctg\,x$	
arco cosecante de x	$arccosec\,x$	
arco secante de x	$arcsec\,x$	
arco cotangente de x	$arccotg\,x$	

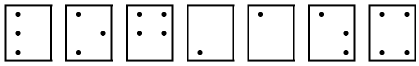
Funciones logarítmicas:

También aquí se utiliza el punto 3 con el mismo criterio establecido para la representación de las funciones trigonométricas.

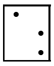
Ejemplos:

logaritmo de x — $\log x$ 

logaritmo natural de x — $ln\, x$ 

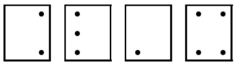
logaritmo en base a de x — $log_a\, x$ 

Como se ve, la última notación transcribe la expresión que en caracteres visuales ubica la letra a (la base) en un plano ligeramente inferior respecto de la línea de escritura (como subíndice). Tal como dijimos al estudiar las sumatorias (pág. 126), el elemento Braille

 (156) indica que lo que sigue vuelve al renglón.

De todos modos, estas transcripciones están sujetas a las modificaciones impuestas por la diversidad de notaciones que puedan aparecer. Hemos puesto las más usadas, pero siguiendo los criterios expuestos a través de las reglas y los ejemplos, es posible transcribir las notaciones particulares a que pueda apelar un autor.

Por ejemplo, el logaritmo natural o neperiano de x se representa, para algunos autores, $L\, x$.

En Braille, se escribirá en ese caso 

Esta observación es válida no sólo para las funciones logarítmicas sino también para las trigonométricas y las hiperbólicas, que veremos en seguida.

Característica negativa de los logaritmos decimales:

Es sabido que si un logaritmo decimal es negativo, suele decirse que la parte entera (característica) es negativa y que la parte decimal (mantisa) es positiva.

Por ejemplo, si consideramos el logaritmo con error menor que un diezmilésimo (cuatro cifras decimales), se tiene:

$log\, 0,2 = -0,6990 = -1 + 0,3010$

La característica es -1 y las primeras cuatro cifras de la mantisa son 3, 0, 1 y 0.

En tinta suele anotarse la característica, agregándole un trazo horizonntal en la parte superior, y a continuación la mantisa, separada de aquélla por una coma.

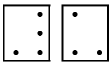
Se escribe entonces:

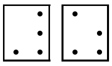
$$log\, 0,2 = \overline{1}, 3010$$

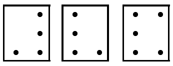
En Braille, para representar la característica negativa de un logaritmo decimal, se utilizan los elementos Braille de la tercera serie, de acuerdo con el siguiente criterio:

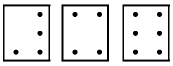
Se anota el número correspondiente a la característica como si fuera positivo, pero agregándole los puntos 3 y 6 a cada uno de los elementos Braille que representan sus cifras, convirtiéndolos así en signos de la tercera serie.

Ejemplo:

característica -1 

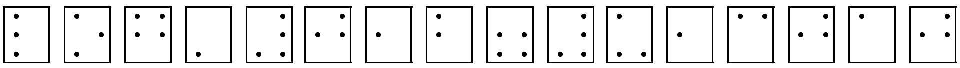
característica -5 

característica -26 

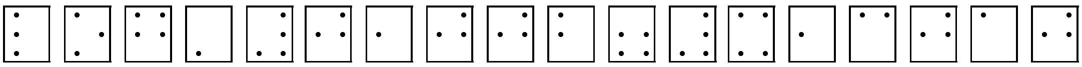
característica -37 

De este modo:

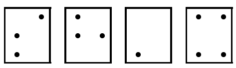
$$log\, 0,2 = \overline{1}, 3010$$

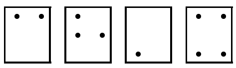


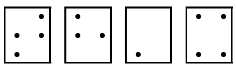
$$log\, 0,002 = \overline{3}, 30103$$

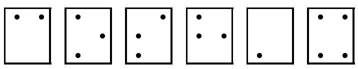


Funciones hiperbólicas:

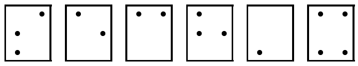
seno hiperbólico de x — $sh\, x$ 

coseno hiperbólico de x — $ch\, x$ 

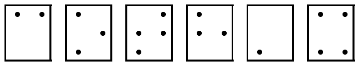
tangente hiperbólica de x — $th\, x$ 

cosecante hiperbólica de x — $cosech\, x$ 

secante hiperbólica de x $\quad sech\, x$



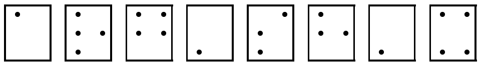
cotangente hiperbólica de x $\quad coth\, x$



Inversas:

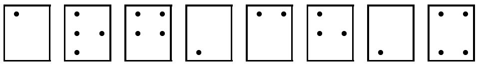
argumento seno hiperbólico de x

$argsh\, x$



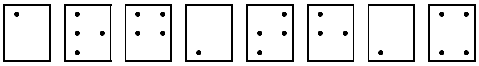
argumento coseno hiperbólico de x

$argch\, x$



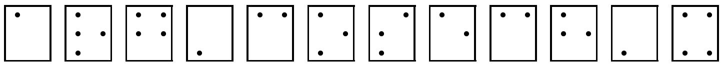
argumento tangente hiperbólica de x

$argth\, x$



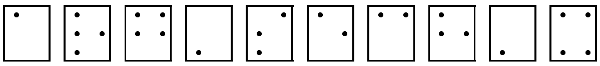
argumento cosecante hiperbólica de x

$argcosech\, x$



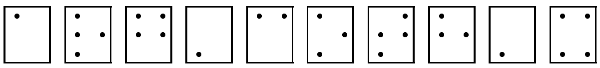
argumento secante hiperbólica de x

$argsech\, x$



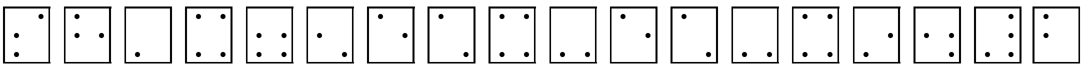
argumento cotangente hiperbólica de x

$argcoth\, x$

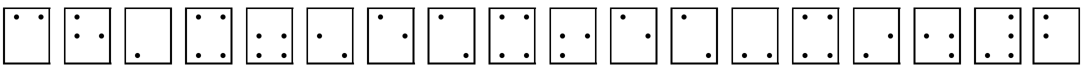


Ejemplos:

$sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



$ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



Ejercicios

1. Escriba simbólicamente (en caracteres visuales) la igualdad siguiente:

   El número cuya representación en base 2 consta de siete unos, es igual a la sumatoria desde i igual a 0 hasta 6 de 2 a la i

2. Transcriba al Sistema Braille su respuesta del ejercicio anterior.

3. Escriba simbólicamente en caracteres visuales la fórmula de la suma de la progresión geométrica cuya razón es un número real r distinto de 1, y cuyo primer término es 1. Esto es: Para todo r número real, distinto de 1, la sumatoria de las potencias de r (desde r^0 hasta r^n) es igual a la fracción cuyo numerador es la diferencia entre r a la $n+1$ y 1, y cuyo denominador es $r-1$

4. Transcriba al Sistema Braille su respuesta del ejercicio anterior.

5. La función φ de Euler $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ se define como sigue:
   $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} {p_i}^{n_i - 1} . (p_i - 1)$
   donde la descomposición en factores primos de n es:

   $$n = \prod_{i=1}^{k} {p_i}^{n_i}$$

   Calcule y escriba sus respuestas en Braille: $\varphi(12)$, $\varphi(180)$ y $\varphi(400)$

6. Transcriba a caracteres visuales la siguiente expresión: