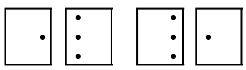
C A P I T U L O 11

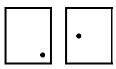
Teoría de Conjuntos

No haremos aquí, por supuesto, una exposición de la “teoría de conjuntos”. Sólo nos limitaremos a dar algunas definiciones y ejemplos para hacer más claros los aspectos relativos a la *notación*, tema específico de estas notas.

Asimismo, el orden adoptado en la presentación de los símbolos tampoco pretende ser el adecuado para una exposición de la teoría de conjuntos; para determinarlo, se ha preferido graduar la complejidad de la notación, asumiendo que el lector conoce el tema y que las referencias específicas de la teoría no se formulan para introducirlo en ella sino para que comprenda y sepa efectuar las correspondientes representaciones Braille.

Algunos símbolos conocidos:

Llaves: $\{\ \}$  (5, 123) (456, 2)

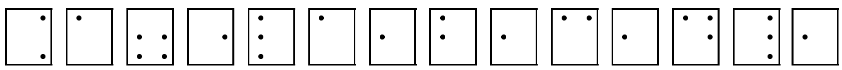
Barra oblicua: $/$  (6, 2)

Definiciones por extensión:

Se formulan enumerando los elementos, que se escriben entre llaves, separados por coma o punto y coma.

Si A es el conjunto de elementos a, b, c y d, escribimos:

$$A = \{\, a,\ b,\ c,\ d \,\}$$



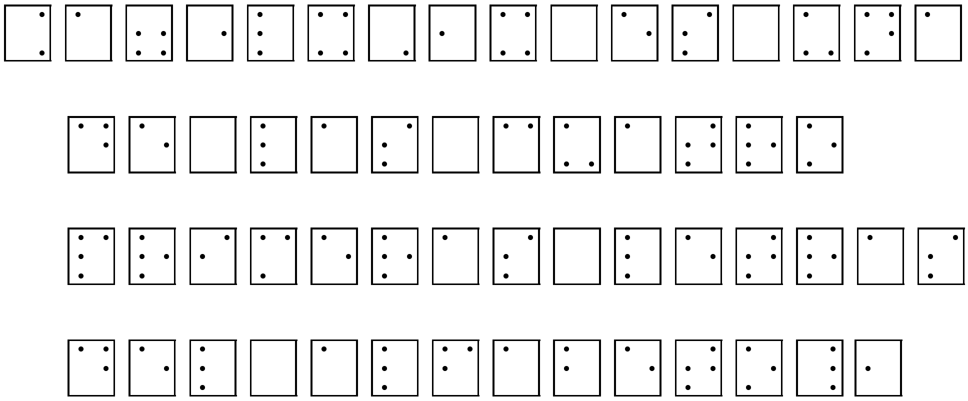
Definiciones por comprensión:

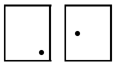
Se formulan mediante una propiedad que caracteriza a los elementos del conjunto.

Si se supone que los elementos del ejemplo anterior no son genéricos sino que se trata de letras, puede decirse que A es “el conjunto de todos los elementos x tales que cada x es una de las cuatro primeras letras del alfabeto” y se escribe:

$$A = \{\, x \,/\, x \text{ es una de las cuatro primeras letras del alfabeto} \,\}$$

En Braille escribimos:



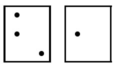
aclarando que la barra oblicua /  (6, 2), en este contexto se lee "tal que".

Otra manera de representar este conjunto por comprensión, muy comúnmente usada, es la siguiente:

$$A = \{\text{ cuatro primeras letras del alfabeto }\}$$

Pertenencia e Inclusión:

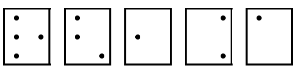
Si un elemento forma parte de un conjunto, se dice que "pertenece" al conjunto. Simbólicamente escribimos:

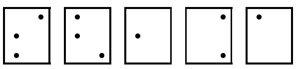
Pertenece a: $\in$  (126, 2)

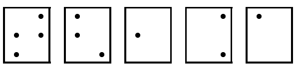
Ejemplo:

Si $A = \{ r, s, t \}$

entonces:

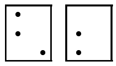
$r \in A$ 

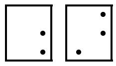
$s \in A$ 

$t \in A$ 

Se dice que un conjunto está incluido en otro si **todo** elemento de él pertenece al otro. En este caso se dice que el otro conjunto incluye al primero.

Los símbolos correspondientes son los siguientes:

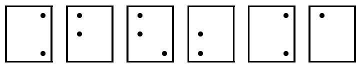
Incluido en: $\subseteq$  (126, 23)

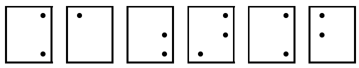
Incluye a: $\supseteq$  (56, 345)

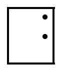
Ejemplos:

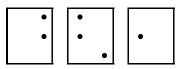
Si $A = \{\, r,\, s,\, t \,\}$ y $B = \{\, r,\, t \,\}$

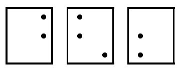
se verifican:

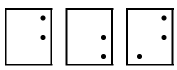
$B \subseteq A$ 

$A \supseteq B$ 

Estas relaciones se niegan según lo estudiado para las relaciones numéricas; es decir, haciendo preceder al signo correspondiente por el prefijo  (45).

No pertenece a: $\notin$  (45, 126, 2)

No está incluido en: $\not\subseteq$  (45, 126, 23)

No incluye a: $\not\supseteq$  (45, 56, 345)

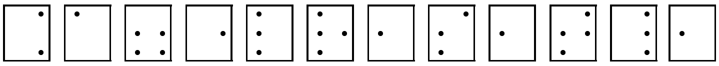
Ejemplo:

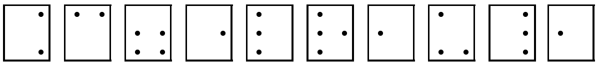
Si $A = \{\, r,\, s,\, t \,\}$ y $C = \{\, r,\, u \,\}$

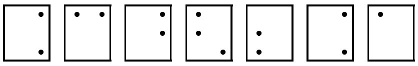
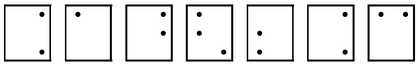
entonces:

$C \not\subseteq A$ y $A \not\subseteq C$

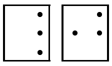
En Braille (aclarando que las palabras “si”, “y” y “entonces” están en caracteres comunes para facilitar la lectura) escribimos:

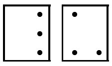
Si 

y 

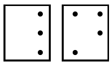
entonces  y 

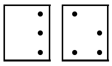
Conjuntos especiales:

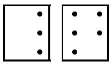
Conjunto vacío: $\emptyset$  (456, 245)

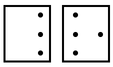
Clase universal: $\mathcal{U}$  (456, 136)

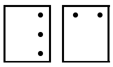
Conjuntos numéricos:

Números naturales: $\mathbb{N}$  (456, 1345)

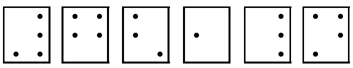
Números enteros: $\mathbf{Z}$  (456, 1356)

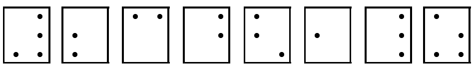
Números racionales: $\mathbb{Q}$  (456, 12345)

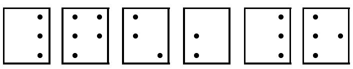
Números reales: $\mathbb{R}$  (456, 1235)

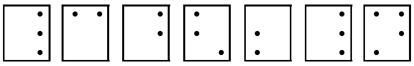
Números complejos: $\mathbb{C}$  (456, 14)

Ejemplos:

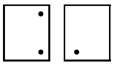
$7 \in \mathbb{N}$ 

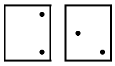
$\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z}$ 

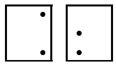
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ 

$\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{N}$ 

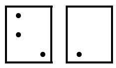
Cuantificadores:

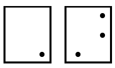
Para todo: $\forall$  (46, 3)

Existe: $\exists$  (46, 25)

Existe un único: $\exists!$  (46, 23)

Inclusión propia o estricta:

Incluido estrictamente en: $\subset$  (126, 3)

Incluye estrictamente a: $\supset$  (6, 345)

Recordemos que un conjunto A está incluido estrictamente (o propiamente) en otro B si todo elemento de A pertenece a B, pero además existe algún elemento de B que no pertenece a A (no son iguales).

Por ejemplo:

$A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ \mathrm{x} < 5\}$

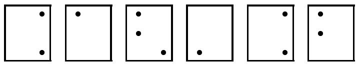
Claramente, todo elemento de A pertenece a B, ya que $1 < 5$, $2 < 5$, $3 < 5$ y además, los elementos de A son números naturales; pero existe un elemento (el 4) que pertenece a B y no pertenece a A.

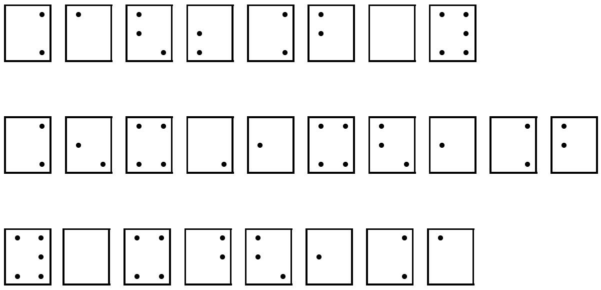
Entonces: $A \subset B$

Podemos escribir simbólicamente:

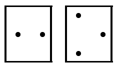
$A \subset B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $\exists x \,/\, x \in B$ y $x \notin A$

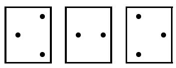
La representación Braille de esta expresión va a insumir un espacio "algo" mayor, como se verá a continuación:

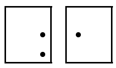
 si y sólo si

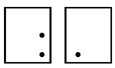


Todavía podemos eliminar algunas palabras:

Implica: $\Rightarrow$  (25, 135)

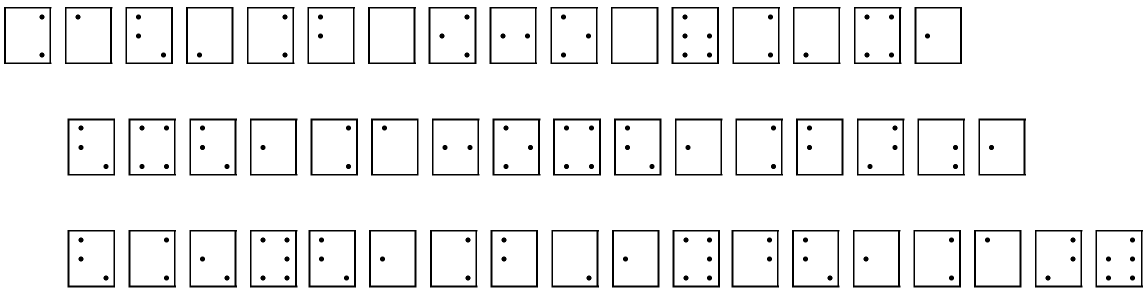
Si y sólo si: $\Leftrightarrow$  (246, 25, 135)

Conjunción "y": $\wedge$  (56, 2)

Disyunción "o": $\vee$  (56, 3)

Podemos escribir ahora:

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; [\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \in B \,/\, y \notin A)]$$



Nota:

Como puede verse, hemos dejado un espacio en blanco antes y uno después del signo que se lee "si y sólo si". Esto no es necesario pero puede hacerse en función de la primera observación del Código a la cual hemos hecho referencia en el primer capítulo del presente trabajo.

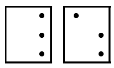
Insistimos, sin embargo, en que se trata de una excepción y como tal debe aplicársela con sumo cuidado para no alterar el sentido de la observación señalada, en la cual se invocan "razones de claridad", que en este caso son un buen fundamento para su aplicación.

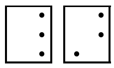
Operaciones:

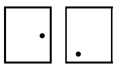
Tal como ocurre con los números, entre los conjuntos pueden definirse operaciones; es decir: leyes que asignen a un par de conjuntos otro conjunto.

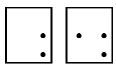
En el caso de los números naturales, la suma le asigna al par formado por el 2 y el 3 el número 5; la multiplicación le asigna el 6.

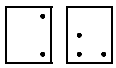
Ahora daremos la lista de símbolos de las operaciones; luego recordaremos la definición de cada una de ellas y finalmente veremos ejemplos.

Intersección: $\cap$  (456, 156)

Unión: $\cup$  (456, 345)

Diferencia: $\setminus$  (5, 3)

Diferencia simétrica: $\triangle$  (56, 356)

Producto cartesiano: $\times$  (46, 356)

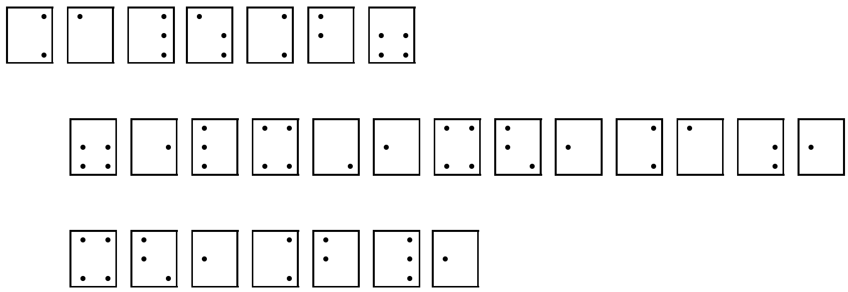
Dados dos conjuntos A y B, definimos:

Se llama "A intersección B" el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B.

O sea:

$$A \cap B = \{ x / x \in A \wedge x \in B \}$$

En Braille escribimos:

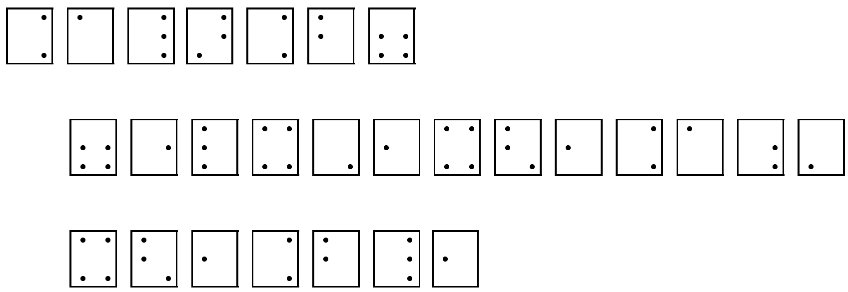


Se llama “A unión B” el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A ó a B (incluyendo los elementos que pertenecen a los dos).

O sea:

$A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \vee x \in B \}$

En Braille escribimos:

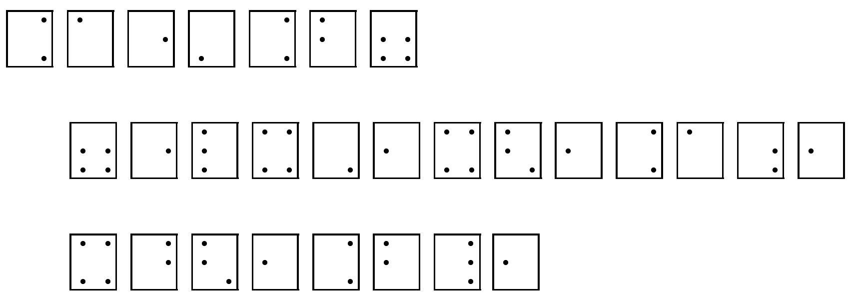


Se llama “A diferencia B” el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

O sea:

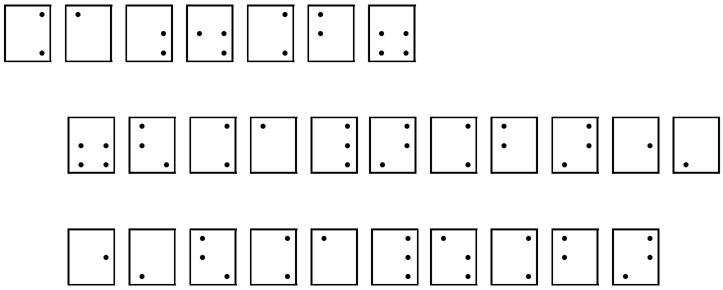
$A \setminus B = \{ x \,/\, x \in A \wedge x \notin B \}$

En Braille escribimos:



Se llama "A diferencia simétrica B" el conjunto $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

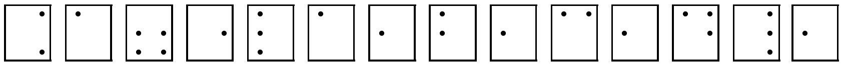
En Braille escribimos:



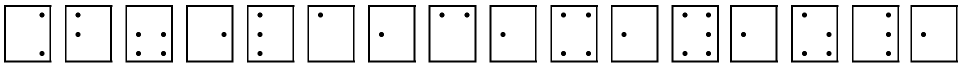
Ejemplos:

Sean:

$$A = \{\, a,\ b,\ c,\ d \,\}$$

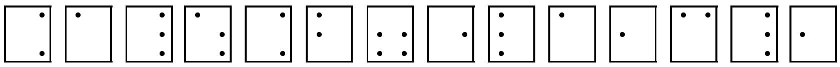


$$B = \{\, a,\ c,\ x,\ y,\ z \,\}$$

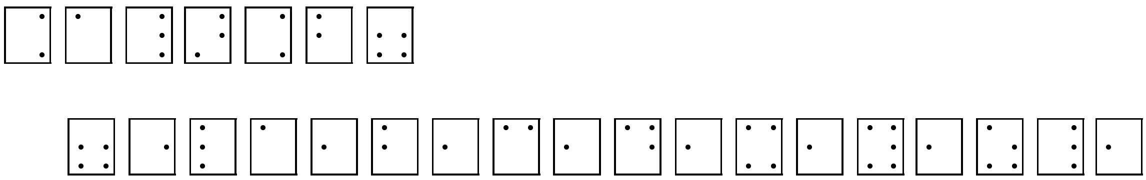


Se tiene:

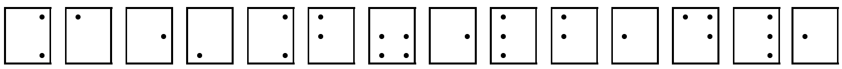
$$A \cap B = \{\, a,\ c \,\}$$



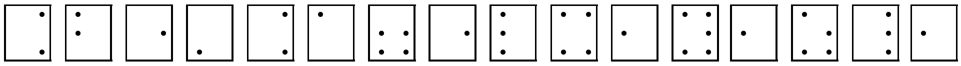
$$A \cup B = \{\, a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y,\ z \,\}$$



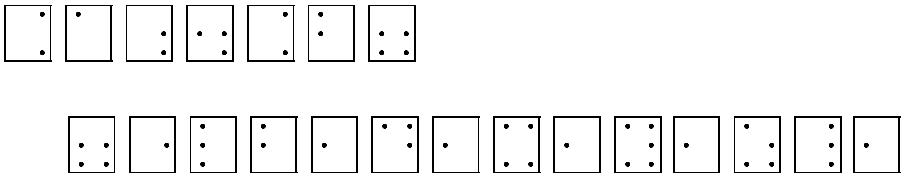
$$A \setminus B = \{\, b,\ d \,\}$$



$B \setminus A = \{ x, y, z \}$



$A \triangle B = \{ b, d, x, y, z \}$

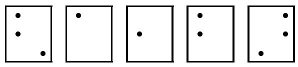


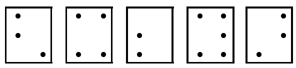
Antes de abordar el producto cartesiano, veamos cómo se escriben los pares ordenados.

La notación de los pares ordenados no ofrece ninguna dificultad, ya que en tinta se representan encerrando las componentes entre paréntesis y separándolas por medio de una coma o un punto y coma.

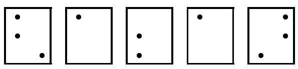
En Braille no hacemos sino transcribir esa expresión.

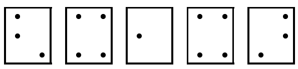
Ejemplos:

(a, b) 

$(x; y)$ 

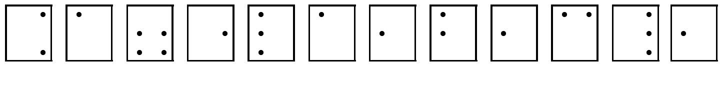
Un par ordenado puede tener sus componentes iguales, como se ve en los siguientes ejemplos:

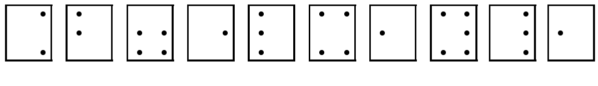
$(a; a)$ 

(x, x) 

Dados dos conjuntos A y B, se llama “producto cartesiano” de A por B el conjunto de **todos** los pares ordenados cuya primera componente pertenece al conjunto A y cuya segunda componente pertenece al conjunto B.

Ejemplo:

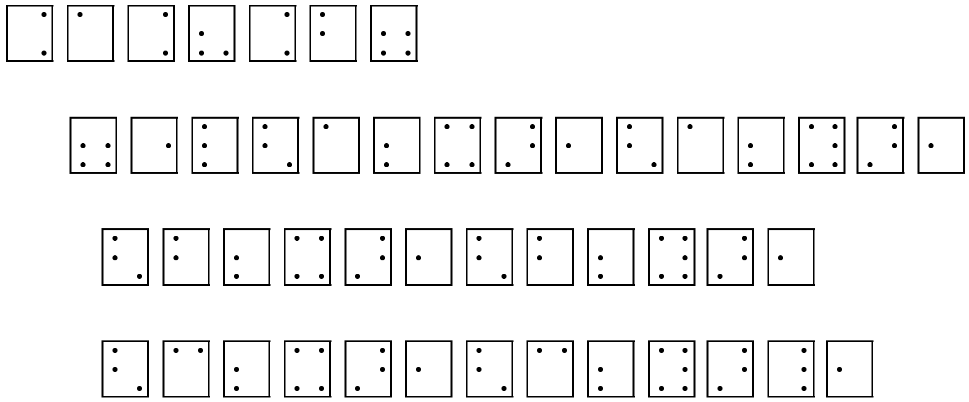
Si $A = \{ a, b, c \}$ 

y $B = \{ x, y \}$ 

resulta:

$A \times B = \{\, (a;\, x),\ (a;\, y),\ (b;\, x),\ (b;\, y),\ (c;\ x),\ (c;\, y) \,\}$

La representación Braille de este conjunto es la siguiente:



Se deja a modo de ejercicio la transcripción al Braille de las siguientes expresiones, que corresponden a los restantes productos cartesianos binarios (de dos conjuntos) que pueden efectuarse con A y B

$B \times A = \{\, (x;\, a),\ (x;\, b),\ (x;\, c),\ (y;\, a),\ (y;\, b),\ (y;\, c) \,\}$

$A \times A = \{\, (a;\, a),\ (a;\, b),\ (a;\, c),\ (b;\, a),\ (b;\, b),\ (b;\, c),\ (c;\, a),\ (c;\, b),\ (c;\, c) \,\}$

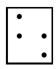
$B \times B = \{\, (x;\, x),\ (x;\, y),\ (y;\, x),\ (y;\, y) \,\}$

Complemento:

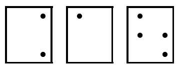
Dado un conjunto referencial $\mathcal{U}$ (a veces llamado universal), el complemento de un conjunto A en $\mathcal{U}$ (o simplemente el complemento de A) es el conjunto cuyos elementos pertenecen a $\mathcal{U}$ y no pertenecen a A; dicho de otro modo, el complemento de A es el conjunto $\mathcal{U} \setminus A$

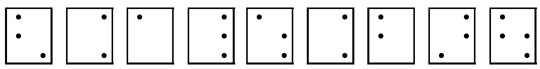
Hay distintas notaciones para el complemento; son más usadas:

i) El índice prima, que en tinta se hace con una pequeña coma ubicada junto a la letra a la cual afecta.

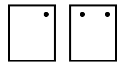
En Braille se representa mediante el signo:  (1256)

Ejemplos:

Complemento de A: A' 

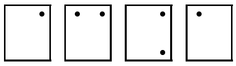
Complemento de A intersección B: $(A \cap B)'$ 

ii) Una barra horizontal sobre la representación del conjunto.

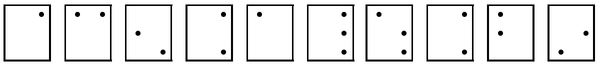
En Braille se representa con el signo  (4, 14) ubicado antes de la letra o símbolo al cual afecta.
En caso de que la barra afecte a más de un símbolo, se utilizarán los paréntesis auxiliares de acuerdo con las reglas vistas en la Pág. 55.

Ejemplos:

Complemento de A:

$\overline{A}$ 

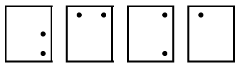
Complemento de A intersección B:

$\overline{A \cap B}$ 

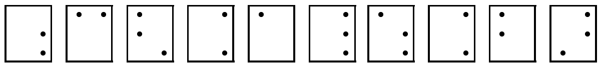
Sobre esta "marca" volveremos a hablar en el próximo capítulo.

iii) Una letra "$\mathcal{C}$" cursiva mayúscula ubicada antes de la representación del conjunto. Si ésta estuviera dada con más de un símbolo, se encerrará entre paréntesis **comunes**, tal como se hace en tinta.

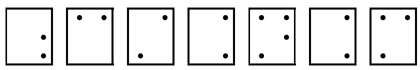
Ejemplos:

Complemento de A: $\mathcal{C}\,A$ 

Complemento de A intersección B:

$\mathcal{C}\,(A \cap B)$ 

Esta notación se utiliza para denotar el complemento de un conjunto en otro.

Complemento de M en N: $\mathcal{C}_N\,M$ 

Consideremos los conjuntos del ejemplo anterior:

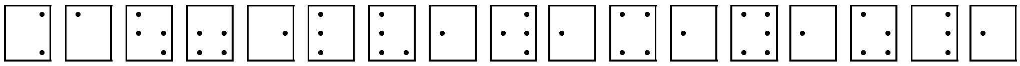
$A = \{\, a,\ b,\ c,\ d \,\}\,, \quad B = \{\, a,\ c,\ x,\ y,\ z \,\}$

y además:

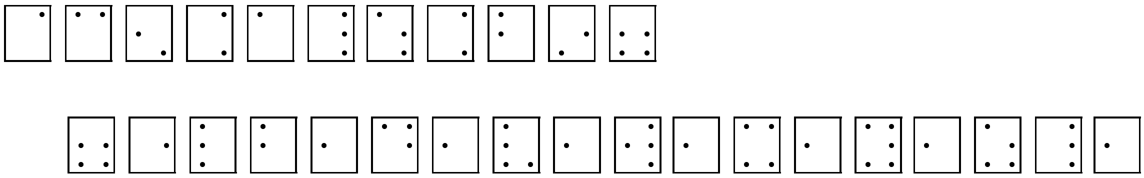
$\mathcal{U} = \{\, a,\ b,\ c,\ d,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z \,\}$

Vamos a calcular el complemento de algunos conjuntos y representarlos simbólicamente, usando alternativamente las diferentes notaciones del complemento.

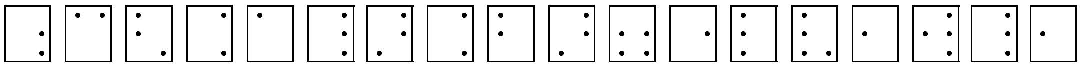
$$A' = \{\, v,\, w,\, x,\, y,\, z \,\}$$



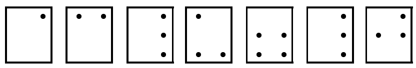
$$\overline{A \cap B} = \{\, b,\, d,\, v,\, w,\, x,\, y,\, z \,\}$$

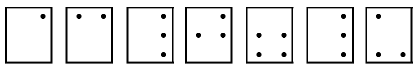


$$\mathcal{C}\,(A \cup B) = \{\, v,\, w \,\}$$



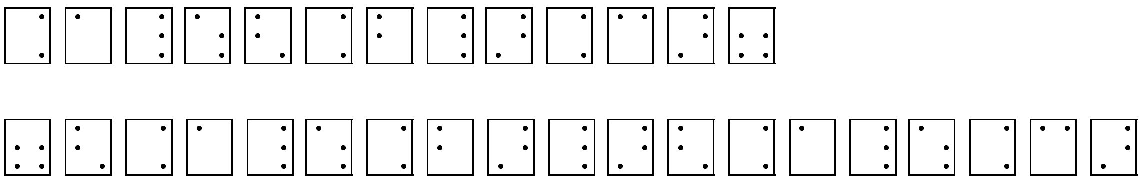
El complemento del conjunto referencial es el conjunto vacío y el complemento del conjunto vacío es el referencial.
Esto se representa así:

$\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$  y

$\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$ 

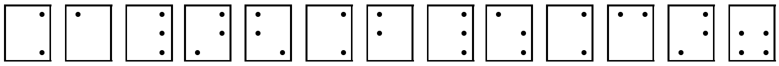
Las siguientes igualdades valen para cualquier terna de conjuntos A, B y C. Se consignan aquí con la intención de ayudar al lector a familiarizarse con la notación.

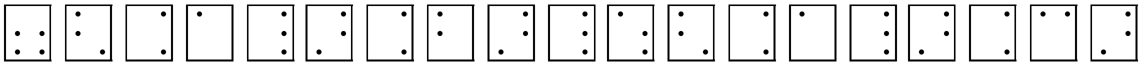
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



La intersección de A con la unión de B y C es igual a la unión de A intersección B con A intersección C

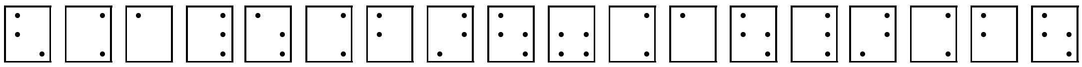
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$





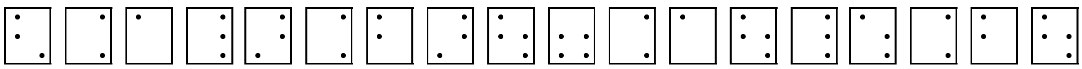
La unión de A con la intersección de B con C es igual a la intersección de A unión B y A unión C

$(A \cap B)' = A' \cup B'$



El complemento de la intersección de A con B es igual a la unión de los complementos de A y de B

$(A \cup B)' = A' \cap B'$



El complemento de la unión de A con B es igual a la intersección de los complementos de A y de B

Diagramas de Venn:

Utilizando elementos apropiados de impresión en relieve, pueden elaborarse los diagramas de Venn, ubicando los símbolos que representan los elementos en las regiones correspondientes del gráfico.

No es, pues, necesario efectuar aclaración alguna acerca de la notación Braille.

Ejercicios

1. Escriba simbólicamente en caracteres visuales la definición por extensión de:

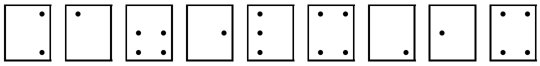
a) El conjunto cuyos elementos son los números 1, 2 y 3

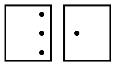
b) El conjunto de los números naturales menores que 7 (los números naturales comienzan con el 1).

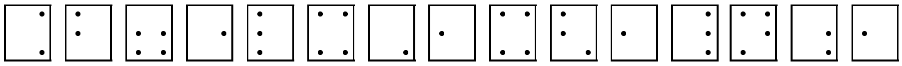
2. Transcriba al Sistema Braille sus respuestas del ejercicio anterior.

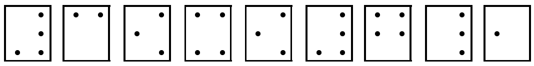
En el ejercicio que sigue, se dan representaciones Braille de ciertos conjuntos; sin embargo, en ellas se incluyen palabras que han sido escritas en caracteres visuales para facilitar su lectura, dado que ello no altera el sentido del ejercicio.

3. Defina por extensión, efectuando la representación Braille, los conjuntos:

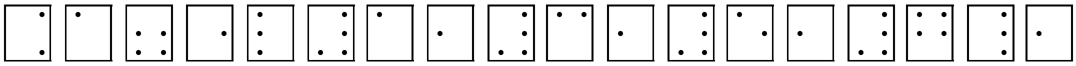
 es un país de Sudamérica que limita con

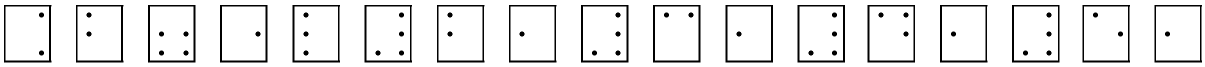
Argentina 

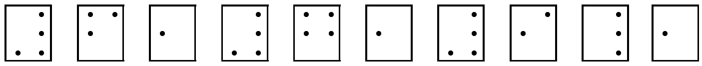




4. Sean los conjuntos:







a) Defina por extensión y represente simbólicamente en Braille la unión y la intersección de A y B.

b) Defina por extensión y represente simbólicamente en Braille $A \setminus B$ y $B \setminus A$

5. Para los conjuntos del ejercicio anterior, diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $1 \in A$

b) $1 \in B$

c) $8 \in A$

d) $9 \notin A$

e) $5 \in A \cap B$

f) $8 \in B \setminus A$

g) $7 \notin A \setminus B$

h) $\{1\} \subseteq A$

i) $\{2, 7\} \subset A \setminus B$

j) $\{1, 7\} \subseteq A \setminus B$

k) $\{1, 7\} \subseteq B \setminus A$

l) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

m) $A \supseteq B$

n) $A \not\supseteq A \cap B$

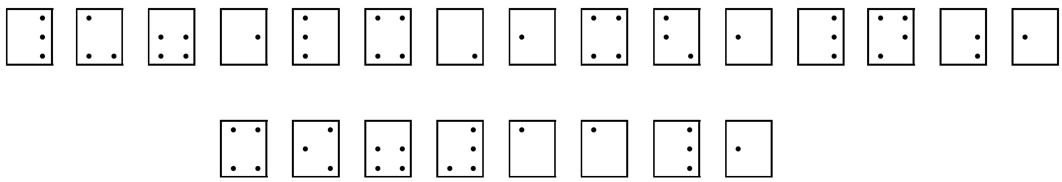
ñ) $A \cup B \supseteq B$

6. Con respecto a sus respuestas del ejercicio anterior:

a) Transcriba al Sistema Braille las proposiciones verdaderas.

b) Escriba simbólicamente en Braille la negación de las proposiciones falsas.

7. Dado el conjunto:



tomado como referencial, determine el complemento de los conjuntos A y B dados en el ejercicio 4.

8. Para los conjuntos A y B del ejercicio 4, calcule y escriba su respuesta en Braille:

a) $A \cap \emptyset$ y $B \cap \emptyset$

b) $A \cap A$ y $B \cap B$

c) $A \cup \emptyset$ y $B \cup \emptyset$

d) $A \cup A$ y $B \cup B$

e) $A \setminus \emptyset$ y $B \setminus \emptyset$

f) $\emptyset \setminus A$ y $\emptyset \setminus B$

g) $A \setminus A$ y $B \setminus B$

h) $A \triangle \emptyset$ y $B \triangle \emptyset$

i) $A \triangle A$ y $B \triangle B$

Después de observar los resultados obtenidos, ¿le parece que valen sólo para estos A y B o valen para cualquier par de conjuntos?

9. Dados los conjuntos:

$A = \{1, 3\}$ y $B = \{2, 4\}$

determine y represente simbólicamente en Braille:

a) $A \times B$

b) $A \times A$

c) $B \times A$

d) $B \times B$

e) $\emptyset \times A$

f) $B \times \emptyset$

10. ¿Puede extraer alguna conclusión de los resultados obtenidos en los incisos e) y f) del ejercicio anterior?