Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2003
RESULTADOS PRELIMINARES PARTE II

1 Espacios de Banach:

Sea X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Definición 1.1 *Una función* $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ *se dice una norma si*

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todos* $x, y \in X$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *para todo* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

Definición 1.2 *Una sucesión* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *converge a* $x \in X$ *(y se nota* $x_k \to x$*) si* $\|x_k - x\| \to 0$.

Definición 1.3 *Una sucesión* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *se dice de Cauchy si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $k_0 > 0$ *tal que*

$$\|x_k - x_l\| < \varepsilon \quad \textit{para todo } k, l \geq k_0.$$

Probar que si $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es convergente, entonces es de Cauchy.*

Definición 1.4 X *se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir si para toda* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *de Cauchy, existe* $x \in X$ *tal que* $x_k \to x$. *Un espacio vectorial normado completo se dice un espacio de Banach.*

Ejemplo 1.1 *(Espacios* L^p*). Sea* U *un conjunto medible de* $\mathbb{R}^n$, *y* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* $f : U \to \mathbb{R}$ *es medible, definimos*

$$\|f\|_{L^p(U)} = \begin{cases} \left(\int_U |f|^p dx\right)^{1/p} & \textit{si } 1 \leq p < \infty, \\ \textit{ess sup}_U |f| & \textit{si } p = \infty. \end{cases}$$

Definimos $L^p(U)$ *como el espacio lineal de todas aquellas funciones* f *para las cuales* $\|f\|_{L^p(U)} < \infty$. *Probar que* $L^p(U)$ *es un espacio de Banach si identificamos aquellas funciones que coinciden en casi todo punto.*

Ejemplo 1.2 *(Espacios C^k). Sea U un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $k \in \mathbb{N}_0$. Para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ definimos*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n. \text{ Si } x \in \mathbb{R}^n, \; x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ y } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x)^\alpha}$$

Definimos luego el conjunto

$$C^k(U) = \{f : U \to \mathbb{R} / \; D^\alpha f \text{ es continua en } \overline{U}, \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}$$

Probar que $C^k(U)$ es un espacio de Banach si lo dotamos de la norma

$$\|f\|_{C^k(U)} = \|f\|_{k,U} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(U)}$$

Ejemplo 1.3 *(Espacios de Hölder). Sea U un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $0 < \alpha \leq 1$. Definimos el siguiente conjunto*

$$C^\alpha(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{R} \text{ continuas } / \sup_{x,y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty \right\}$$

Probar que $C^\alpha(U)$ es un espacio de Banach si lo dotamos de la norma

$$\|f\|_{C^\alpha(U)} = \|f\|_{\alpha,U} = \|f\|_{L^\infty(U)} + \sup_{x,y \in U} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Si $\alpha = 1$ el espacio se llama Lipschitz. ¿Qué pasa si $\alpha > 1$?

2 Espacios de Hilbert:

Sea H un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Definición 2.1 *Una función $(\;,\;) : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice un producto interno si*

1. *$(x, y) = (y, x)$ para todo $x, y \in H$.*
2. *$x \mapsto (x, y)$ es lineal para cada $y \in H$.*
3. *$(x, x) \geq 0$ para todo $x \in H$.*

4. $(x, x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

Definición 2.2 *Si* $(\ ,\ )$ *es un producto interno, la norma asociada es*

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} \quad (x \in H).$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz dice

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (x, y \in H).$$

Probar C-S y verificar que $\| \cdot \|$ define, efectivamente, una norma.

Definición 2.3 *Un espacio de Hilbert* H *es un espacio de Banch cuya norma es obtenida por un producto interno.*

Ejemplo 2.1 *Probar que el espacio* $L^2(U)$ *es un espacio de Hilbert, donde*

$$(f, g) = \int_U fg \; dx \quad (f, g \in L^2(U)).$$

Definición 2.4 *Sea* H *un espacio de Hilbert separable.*

1. *Dos elementos* $x, y \in H$ *son ortogonales si* $(x, y) = 0$.

2. *Una sucesión* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *se dice un sistema ortonormal si*

$$(w_k, w_l) = 0 \; k \neq l, \quad \|w_k\| = 1.$$

3. *Un sistema ortonormal* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *se dice una base ortonormal, si dado* $x \in H$ *existen* $\alpha_k \in I\!R$ *tales que*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k.$$

En ese caso se verifica que $\alpha_k = (x, w_k)$.

Proposición 2.1 *Sea* H *un espacio de Hilbert separable y* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *un sistema ortonormal. Son equivalentes:*

1. $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *es una base ortonormal.*

2. *Si* $(x, w_k) = 0 \; \forall k \in I\!N$, *entonces* $x = 0$.

3. *El subespacio generado por* $\{w_k,\ k \in I\!N\}$ *es denso en* H.

4. *Para todo* $x \in H$, *se verifica la igualdad de Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k)^2.$$

Probar que en general vale la desigualdad de Bessel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

Ejemplo 2.2 *Sea* $H = L^2([0, 2\pi])$ *probar que la sucesión*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

es un sistema ortonormal

Teorema 2.1 *(No trivial) La sucesión*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

es una base ortonormal de $L^2([0, 2\pi])$.

Definición 2.5 *Si* S *es un subespacio de* H, $S^{\perp} = \{x \in H/\ (x, y) = 0$ *para todo* $x \in S\}$ *es el complemento ortogonal de* S. *Probar que si* S *es cerrado, entonces* $H = S \oplus S^{\perp}$. *Probar que* $S^{\perp}$ *es cerrado.*

3 Operadores Acotados:

Sean X, Y espacios de Banach (sobre $I\!R$).

Definición 3.1 1. *Una función* $A : X \to Y$ *es un operador lineal si* $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$, *para todo* $x, y \in X,\ \lambda, \mu \in I\!R$.

2. *Un operador lineal* $A : X \to Y$ *es acotado si*

$$\|A\| \equiv \sup\{\|Ax\|_Y, \textit{con } \|x\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Probar que un operador lineal es acotado si y sólo si es continuo.

Definición 3.2 *Sea $A : X \to Y$ un operador lineal acotado. Diremos que A es compacto si $\overline{A(B_X(0,1))}$ es compacto en Y. Probar que A es compacto si y sólo si para toda sucesión acotada en X, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ se cumple que $\{Ax_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en Y.*

Ejemplo 3.1 *Sea U un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ y tomamos la inclusión $i : C^1(U) \to C^0(U)$ ($i(f) = f$). Probar que i es un operador compacto. (Es decir dada una sucesión acotada en C^1 existe una subsucesión que converge en C^0.)*

Definición 3.3 *Sea $A : X \to X$ un operador acotado.*

1. *El conjunto resolvente de A es*

$$\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} / \ (A - \eta I) \text{ es biyectivo}\}.$$

2. *El espectro de A es $\sigma(A) = \mathbb{R} - \rho(A)$.*

Si $\eta \in \rho(A)$, la inversa $(A - \eta I)^{-1} : X \to X$ es un operador acotado.

Definición 3.4

1. *Decimos que $\lambda \in \sigma(A)$ es un autovalor de A si $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Escribimos $\sigma_p(A)$ para denotar el conjunto de los autovalores de A; $\sigma_p(A)$ es el espectro puntual.*

2. *Si λ es un autovalor y $w \neq 0$ satisface $Aw = \lambda w$, decimos que w es un autovector asociado.*

Definición 3.5

1. *Un operador acotado $x' : X \to \mathbb{R}$ se dice una funcional acotada sobre X.*

2. *Notamos X' el conjunto de todas las funcionales acotadas sobre X.*

   X' es el espacio dual de X. Probar que resulta ser un espacio de Banach.

Definición 3.6 *Sea $J : X \to X'' = (X')'$ dada por $J(x)(\phi) = \phi(x)$. J se denomina la inclusión canónica de X en X''. Probar que J es una isometría.*

X se dice reflexivo si J es un isomorfismo. (con lo cual $X = X''$).

Teorema 3.1 *(Teorema de representación de Riesz)*
Sea H un espacio de Hilbert y sea $x' \in H'$. Existe entonces un único $x \in H$ tal que

$$x'(y) = (x, y) \text{ para todo } y \in H.$$

El mapa $x' \mapsto x$ es un isomorfismo lineal entre H' y H.

Definición 3.7

1. *Sea $A : H \to H$ un operador acotado. Su adjunto $A' : H \to H$ se define como el único operador que verifica $(y, Ax) = (A'y, x)$ para todo $x, y \in H$.*

2. *A se dice simétrico si $A = A'$.*

Teorema 3.2 *Sea $A : H \to H$ un operador compacto y simétrico. Entonces el espectro de A es finito o bien es una sucesión que tiende a 0 y el espectro puntual $\sigma_p(A)$ coincide con el espectro $\sigma(A)$, i.e. todo elemento del espectro es un autovalor.*

4 Convergencia débil:

Sea H un espacio de Hilbert separable.

Definición 4.1 *Decimos que una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ converge débil a $x \in H$ y se nota $x_k \rightharpoonup x$, si $(x_k, y) \to (x, y)$ para todo $y \in H$.*

Probar que si $x_k \to x$ entonces $x_k \rightharpoonup x$. Es también cierto que toda sucesión débilmente convergente es acotada.

Teorema 4.1 *Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $x \in H$ tal que $x_{k_j} \rightharpoonup x$.*