Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2003

PRÁCTICA 4

1. Sea u una solución regular de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.
   (a) Mostrar que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Mostrar que $v(x,t) = x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también resuelve la ecuación del calor.

2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.
   (a) *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones calóricas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es calórica.
   (b) *Traslaciones:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $u(x-\xi, t-\tau)$ es calórica.
   (c) *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α, entonces $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α.
   (d) *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x,t,\alpha)$ es calórica para cada α, entonces $\int_a^b u(x,t,\alpha)d\alpha$ es calórica.
   (e) *Diferenciación respecto a x y t:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\frac{\partial^{|\alpha|+m} u}{\partial x^\alpha \partial t^m}(x,t)$ es calórica.
   (f) *Integración respecto x y t:* Si $u(x,t)$ es calórica, $n = 1$, entonces $\int_{x_0}^x u(\xi,t)d\xi$ es calórica si $u_x(x_0,t) = 0$ y $\int_a^t u(x,\tau)d\tau$ es calórica si $u(x,a) = 0$.
   (g) *Convoluciones:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\int u(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$ y $\int_a^b u(x,t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$ son calóricas.

3. (a) Si $\phi = \phi(x,t),\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\phi(x,t) = w(|x|,t)$ con $w : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$), entonces ϕ satisface

$$\phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \phi_t \quad t > 0,\ r > 0. \tag{1}$$

   (b) Mostrar que la ecuación (1) puede reducirse mediante el cambio $\psi = r\phi$ a la ecuación del calor unidimensional.

4. Para $i = 1, \ldots, n$ consideramos $u_i = u_i(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$, soluciones de

$$\begin{cases} (u_i)_t &= (u_i)_{xx} \\ u_i(x,0) &= \varphi_i(x). \end{cases}$$

   Probar que si definimos para $x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$,

$$u(x,t) = u_1(x_1,t)u_2(x_2,t)...u_n(x_n,t)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)...\varphi_n(x_n)$$

   entonces u es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ con $u(x,0) = \varphi(x)$.

5. Sea

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0),$$

   donde α y β son constantes.
   (a) Verificar que u satisface la ecuación del calor si y sólo si v satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0,$$

   para $y = t^{-\beta}x$.
   (b) Verificar que si $\beta = 1/2$, v satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$

(c) Verificar que si v es radial, i.e. $v(y) = w(|y|)$ para $w : I\!R \to I\!R$, entonces w satisface

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

donde $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$.

(d) Tomar $\alpha = n/2$ y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

6. *Método de similaridad.*

   (a) Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen

   $$\phi(x,t) = \phi(\lambda x, \lambda^2 t), \ \forall \lambda \in I\!R.$$

   (b) Mostrar que el método de similaridad dado en (a) también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal

   $$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad K \in C^1.$$

7. Resolver por el método de separación de variables,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu &= 0, \qquad 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \\ u(\pi,t) &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases}$$

   Sugerencia: Proponer $v(x,t) = u(x,t)e^{ct}$.

8. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad \text{en } (0,1) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) &= 0, \qquad t > 0, \\ u_x(1,t) &= 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

   con $u_0 \in L^2(0,1)$.

   (a) Por el método de separación de variables, hallar la solución del problema y verificar que es una solución clásica en $(0,1) \times (0,\infty)$.

   (b) Verificar que la solución hallada en (a) satisface $u(\cdot,t) \to u_0$ en $L^2(0,1)$ cuando $t \to 0$ y que $u(x,t) \to \int_0^1 u_0\,dx$ cuando $t \to \infty$ uniformemente. Interpretar físicamente.

9. Aplicar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de conducción de calor en un disco de $I\!R^N$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \qquad |x| < 1, \ t > 0 \\ u(x,t) &= 0 \qquad |x| = 1, \ t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad |x| \le 1 \end{cases}$$

   donde $u_0(x) = \phi(|x|)$ (y por ende $u(x,t) = w(|x|,t)$).

10. (a) Sea $a(t) > 0$ una función continua y sea $u(x,t)$ una solución regular de $u_t = a\Delta u$. Muestre que existe un cambio de variables $t = \phi(\tau)$ tal que $U(x,\tau) = u(x,\phi(\tau))$ es solución de la ecuación del calor.

    (b) Sea $b(t) \in I\!R^n$ continua y sea $u(x,t)$ solución regular de $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$. Muestre que existe un cambio de variables $x = \psi(y,t)$ tal que $U(y,t) = u(\psi(y,t),t)$ es solución de la ecuación del calor.

    (c) Sea $c(t) \in I\!R$ continua y sea $u(x,t)$ solución regular de $u_t + cu = \Delta u$. Muestre que existe $\varphi(t)$ derivable, tal que $U(x,t) = u(x,t)\varphi(t)$ es solución de la ecuación del calor.

11. *Principio de Duhamel*

Sea u la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = g(x,t) & \text{en } (0,L)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{en } t>0, \\ u(x,0) = 0 & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x,t) = \int_0^t \Phi(x,t;s)\,ds,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0,L)\times(s,+\infty), \\ \Phi(0,t;s) = \Phi(L,t;s) = 0 & \text{en } t>s, \\ \Phi(x,s;s) = g(x,s) & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

12. Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} &=& g(x,t), & x\in I\!R,\ t>0, \\ u(x,0) &=& f(x), & x\in I\!R, \end{cases}$$

donde f y $g(\cdot,t)$ para cada t fijo, son funciones de $\mathcal{S}$.

13. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &=& 0, & x>0,\ t>0, \\ u(0,t) &=& 0, \\ u(x,0) &=& f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)f(\xi)d\xi,$$

donde $G(x,\xi,t) = K(x-\xi,t) - K(x+\xi,t)$ y K es la solución fundamental de la ecuación del calor. (Pista: Extender f por imparidad a $-\infty < x < 0$ y resolver el problema de valores iniciales para la f extendida.)

14. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &=& 0, & x>0,\ t>0, \\ u(0,t) &=& g(t), \\ u(x,0) &=& f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)f(\xi)d\xi - 2\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x,t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

donde $G(x,\xi,t) = K(x-\xi,t) - K(x+\xi,t)$ y K es la solución fundamental de la ecuación del calor, si

$$|f(x)| \le C_1 \exp\left\{C_2|x|^{1+\alpha}\right\}, \quad 0\le\alpha<1,$$
$$|g(t)| \le C_1 t^{-\alpha}, \qquad 0<t<\varepsilon$$

donde C_1, C_2 son constantes positivas y $\varepsilon > 0$.

15. Sea $u(x,t)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_t &=& u_{xx}, & x\in I\!R,\ t>0, \\ u(x,0) &=& \varphi(x), & x\in I\!R \end{cases}$$

dada por la convolución de φ en la variable x con la solución fundamental. Probar que si $\varphi\in L^1(R)$, entonces $u(\cdot,t)\in L^1(I\!R)$ $\forall t>0$ y

$$\int_{I\!R} u(x,t)dx = \int_{I\!R}\varphi(x)dx, \quad \forall t>0.$$

16. Sea $U \subset I\!R^n$ abierto. Notamos $U_T = U \times (0,T)$ y $\Gamma_T = \left(\overline{U} \times \{0\}\right) \cup (\partial U \times (0,T))$ la frontera parabólica de U_T. Decimos que $v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ en } U_T.$$

   (a) Probar que $\max_{U_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.

   (b) Sea $\phi : I\!R \to I\!R$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v = \phi(u)$, entonces v es una subsolución.

   (c) Probar que $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación del calor.

17. (a) Sea $Q_R(x,t) = B(x,R) \times (t - R^2, t)$. Probar que si $u(x,t)$ es solución de la ecuación del calor en $Q_2(0,0)$, existe una constante C universal tal que

$$\max_{Q_1(0,0)} |\nabla_x u(x,t)| \leq C \max_{Q_2(0,0)} |u(x,t)|.$$

   (b) Con la notación del ejercicio anterior, probar que si $K \subset \overline{U_T} \setminus \Gamma_T$, K compacto, existe entonces una constante C que depende de $dist(K, \Gamma_T)$ tal que

$$\max_{K} |\nabla_x u(x,t)| \leq C \max_{U_T} |u(x,t)|.$$

18. Sea $U_T = U \times (0,T)$ y sean u_n soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n &= 0 \quad \text{en } U_T \\ u_n &= f_n \quad \text{en } \Gamma_T, \end{cases}$$

donde Γ_T es la frontera parabólica de U_T. Probar que si $f_n \to f$ uniformemente en Γ_T, entonces existe u regular tal que $u_n \to u$ uniformemente sobre U_T y u es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{en } U_T \\ u &= f \quad \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

19. Sea u una solución acotada de la ecuación del calor en $I\!R^{n+1}$. Probar que u es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que u sea acotada?

20. Definimos

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i son continuos, $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz $A = (a_{ij})$ es definida positiva. Dado $U \subset I\!R^n$ abierto, conexo y acotado, definimos $U_T = U \times (0,T]$ y $\Gamma_T = \overline{U_T} - U_T$ la frontera parabólica de U_T. Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ satisface

$$u_t - \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$