Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2003

Práctica 1

1. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones

(a) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1+t}{1-u}$ (b) $\dfrac{du}{dt} = t\exp u$

(c) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u}{t}$ (d) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u}{t} + \left(\dfrac{u}{t}\right)^2$

2. *Lema de Gronwall.*

Sean u y v funciones continuas no negativas en $[a,b]$ tales que, para un $\alpha \geq 0$, satisfacen

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(\tau)\, v(\tau)\, d\tau, \quad t \in [a,b].$$

Probar que

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau)\, d\tau.$$

En particular si $\alpha = 0$ entonces $u \equiv 0$.

3. (a) Probar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t,u), & t_0 < t < t_1 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

donde f es continua y $u \in C([t_0,t_1]) \cap C^1(t_0,t_1)$, es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau.$$

4. (a) Probar que el problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 1 + u^2 \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Estudiar la unicidad del problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u^{1/3} \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

5. Sea $f(t, u)$ definida en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$ continua en (t, u) y lipschitziana en u con constante K. Para $i = 0, 1$ sea $u_i : J_i \longrightarrow \Omega$ solución de

$$\begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} = f(t, u_i) \\ \\ u_i(t_0) = x_i \end{cases}$$

Probar que para cada t donde esten definidas u_i, $i = 0, 1$, se cumple

$$|u_0(t) - u_1(t)| \leq \exp\left(K\,|t - t_0|\right)|x_0 - x_1|.$$

6. Hallar la curva que minimiza el tiempo que tarda en caer un partícula que recorre esa curva desde la posición (x_1, y_1) a la posición (x_2, y_2) $(y_2 < y_1)$, teniendo en cuenta que la partícula tiene velocidad inicial 0 y que la única fuerza que actúa es la de la gravedad (a ésta curva se la conoce como braquistocrona).

7. Hallar la curva con extremos $y(x_1) = y_1$ $y(x_2) = y_2$, $y_1, y_2 > 0$ que minimiza el área de la superficie de revolución generada por la rotación de dicha curva alrededor del eje x.

8. ¿Qué problema hay que plantear para encontrar puntos críticos del funcional
$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$
sobre todas las funciones que toman el valor y_1 en x_1 (es decir, si no se imponen condiciones sobre y en el extremo x_2)?

9. Encontrar la curva de longitud mínima que pasa por el punto (x_1, y_1) e interseca la recta $x = x_2$.

10. Encontrar entre todas las curvas de extremos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ y longitud L aquella que maximiza área encerrada entre la misma y la recta $y = 0$.

11. Hallar la posición que adopta una cuerda de longitud L al sujetarse en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

    (Sug.: Minimizar la energía potencial $\int_{x_1}^{x_2} m\, g\, y \sqrt{1 + |y'|^2}\, dx$).