Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2003

Práctica 0.

1. Revisar los siguientes teoremas:

   (a) Teorema de convergencia monótona de Beppo-Levi.

   (b) Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

   (c) Lema de Fatou.

2. Diferenciación bajo el signo integral.

   (a) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ medible, $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : V \times U \to \mathbb{R}$ medible y $x_0 \in V$. Si $f(x, \cdot) \in L^1(U)$ para $|x - x_0| < \varepsilon$, $f(\cdot, y)$ es diferenciable en $|x - x_0| < \varepsilon$ para casi todo $y \in U$ y existe $g \in L^1(U)$ tal que

   $$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq g(y) \ , \ |x - x_0| < \varepsilon \ , \text{ a.e. } y \in U$$

   con $1 \leq j \leq n$ fijo, entonces la función $F(x) = \int_U f(x, y)dy$ es derivable para $|x - x_0| < \varepsilon$ respecto de x_j, y $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \displaystyle\int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)dy$

   (b) Verificar que si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es una función continua en $V \times \overline{U}$, con U abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del item anterior.

3. (a) Sean f, g derivables, h continua. Derivar

   $$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s)ds$$

   (b) Sean f, g derivables, $h = h(x, s)$ continua y derivable respecto de x, $\frac{\partial h}{\partial x}$ acotada. Derivar

   $$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x, s)ds$$

4. (a) Desigualdad de Hölder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces

   $$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

(b) Desigualdad de Minkowsky: Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(c) Desigualdad integral de Minkowsky: Si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\left[\int \left|\int f(x,y)\,dx\right|^p dy\right]^{1/p} \leq \int \left[\int |f(x,y)|^p\,dy\right]^{1/p} dx.$$

5. Dada $f \in L^p(I\!R^n)$, $h \in I\!R^n$, $\tau_{-h}f(x) \equiv f(x+h)$.

   (a) Para $1 \leq p < \infty$, $\lim_{h\to 0} \|\tau_{-h}f - f\|_p = 0$. (Pista: usar que $C_0(I\!R^n)$ es denso en $L^p(I\!R^n)$ $1 \leq p < \infty$).

   (b) Mostrar que (a) no vale para $p = \infty$.

6. Desigualdad de Young.

   Sea $f \in L^1(I\!R^n),\ g \in L^p(I\!R^n),\ 1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f * g \in L^p(I\!R^n)$ con $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.

7. Sea $f \in L^p(I\!R^n),\ g \in L^{p'}(I\!R^n)$. Entonces $f * g \in L^\infty(I\!R^n)$,

   $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}$ y además $f * g$ es uniformemente continua.

8. Sean $f \in C_0^k(I\!R^n)$ $(k \in I\!N),\ g \in L^1_{\text{loc}}(I\!R^n)$. Entonces $f * g \in C^k(I\!R^n)$ y $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g,\ |\alpha| \leq k$.

9. (a) Sea

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

   Probar que $\rho \in C_0^\infty(I\!R)$.

   (b) Construir $\rho \in C_0^\infty(I\!R^n)$ tal que $\text{sop}(\rho) \subset B(0,\varepsilon),\ \varepsilon > 0$.

10. Sea $\rho \in L^1(I\!R^n)$ tal que $\int \rho = 1$, y $\forall \varepsilon > 0$, sea $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Probar que

   (a) Si $f \in L^p(I\!R^n),\ 1 \leq p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

   (b) Si $f \in L^\infty(I\!R^n)$, f uniformemente continua en $V \subset I\!R^n$, entonces $\sup_{x\in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0$ si $\varepsilon \to 0$, $\forall V'$ compacto, $V' \subset V$.

(c) Si f es continua y acotada en $I\!R^n$, entonces $f * \rho_\varepsilon$ tiende uniformemente a f en cada compacto de $I\!R^n$.

(d) Si además $\rho \in C_0^\infty(I\!R^n)$, $f \in L^p(I\!R^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(I\!R^n)$.

(e) Calcular $f * \rho_\varepsilon$ si $f = \chi_{[a,b]}$ y ρ es la función del ejercicio 9 (a).

11. Demostrar que $C_0^\infty(I\!R^n)$ es denso en $L^p(I\!R^n)$ $(1 \leq p < \infty)$.

    Pista: las funciones de $L^p(I\!R^n)$ con soporte compacto son densas en $L^p(I\!R^n)$ $(1 \leq p < \infty)$.

12. Sea Ω un dominio de $I\!R^n$.

    Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\int_\Omega f\varphi = 0$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0$ c.t.p.

13. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(I\!R)$ y $\int f\varphi' = 0$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(I\!R) \Rightarrow f =$ cte c.t.p.

    Pista: tomar $g \in C_0^\infty(I\!R)$ tal que $\int g = 1$ y para cada $\varphi \in C_0^\infty(I\!R)$, se verifica que $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$ es la derivada de una función $C_0^\infty(I\!R)$.

    Definición:_Sea $\Omega \subset I\!R^n$ un conjunto abierto. Diremos que Ω es un dominio con frontera C^r si para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe un entorno U de x_0, un entorno $V \subset I\!R^{n-1}$ y una función $\phi : V \to I\!R$ de clase C^r tal que (salvo un reordenamiento de las variables) el dominio se describe como sigue:_

    $$\Omega \cap U = \{x \in U : \ (x_1, ..., x_{n-1}) \in V; \ x_n > \phi(x_1, ..., x_{n-1})\}$$

    $$\partial\Omega \cap U = \{x \in U : \ (x_1, ..., x_{n-1}) \in V; \ x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})\}$$

14. Fórmulas de Green

    Sea Ω un dominio en $I\!R^n$ con frontera C^1

    (a) si $\vec{V} = \vec{V}(x) = (v_1(x), v_2(x), ..., v_n(x))$, $v_i \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq n$, entonces

    $$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{V}(x)dx = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{V}(x)dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V}(x) \cdot \nu(x)dS_x$$

    donde $\nu = \nu(x)$ es el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$.

(b) si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS_x$$

donde $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$

15. Revisar los siguientes teoremas:

(a) Teorema de la Función Inversa.

(b) Teorema de la Función Implícita.

(c) Teorema de Arzelá-Ascoli.

(d) Teorema de la Partición de la Unidad.