UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

POLINOMIOS SOBRE UN ESPACIO DE BANACH Y SU RELACIÓN CON EL DUAL

Silvia Beatriz Lassalle

Director de Tesis
Dr. Ignacio M. Zalduendo

Lugar de Trabajo
Departamento de Matemática
Facultad de Cs. Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Matemáticas

2001

Agradecimientos

Como no podía ser de otra manera, inician estos agradecimientos los integrantes de la 'salita polinomios'. Y continúan, por orden de aparición, quienes han tomado parte en este trabajo.

Ante todo quiero agradecer a Nacho Zalduendo por todo este tiempo en que me ha dirigido, empezando varios años atrás con la tesis de licenciatura. Porque confió en mí mucho antes que yo misma, porque sin su trabajo y apoyo esto no hubiera sido posible.

A Betina, porque aprender y trabajar con ella siempre fue un placer. A Vero, a quien puedo hacer un poco responsable de haberme acercado al Análisis Funcional. A Dani, por tener siempre un mate listo, por su atención y generosidad. A los cuatro, por generar un ambiente de trabajo divertido, distendido y a la vez serio.

A Sean Dineen y a Angelines Prieto, porque contribuyeron para que despegara la 'ñata del vidrio' y me asomara a la 'familia holomorfa', un poco mayor a la local, impulsándome con esto a seguir cuando la oscuridad del trabajo empezaba a desanimarme.

En forma especial, quiero agradecer a Richard Aron por haberme propuesto ser parte de 'Kent State' y junto con Andrew Tonge haberlo hecho posible. Por todo el apoyo que me brindó estando allá, por escuchar y atender desde mis preguntas más elementales hasta leer con atención los detalles más técnicos y por sus valiosos comentarios y sugerencias a mi trabajo.

Extiendo mi agradecimiento a los demás miembros del Banach Group, entre ellos a Per Enflo, Joe Diestel y Victor Lomonosov, por la generosa disposición con la que me recibieron, escucharon y compartieron sus conocimientos. Así también a Kent State University por el apoyo recibido para desarrollar mi trabajo de investigación durante el tiempo de mi visita.

A José Luis G. Llavona, porque fue un gusto trabajar con él, por la pasión que trasmite haciendo matemáticas y porque parte de este trabajo es producto del esfuerzo compartido.

A Raquel Gonzalo, quien desinteresadamente atendió todas mis preguntas; por sus sugerencias, algunas de las cuales han cobrado forma en este trabajo.

Finalmente, a la Universidad de Buenos Aires y al Departamento de Matemática de la la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por haberme permitido desarrollar mis estudios y por el apoyo recibido para que esto fuera posible.

También quiero agradecer a quienes me acompañaron a lo largo de este tiempo: A mi madre, a mi padre que vio el inicio de este trabajo pero partió antes de ver el fin. A Paula, Fernanda, Eduardo, Gastón y Alejandro. A mis amigos, *here and there*. Y a las mujeres del taller de computación de la U3 de Ezeiza, porque en referencia a este trabajo, puedo decir con letra de V. Parra que vale la pena *un paso retrocedido, cuando el de ustedes avanza* y es que *hasta la dura cadena con que nos ata el destino, es como un diamante fino que alumbra mi alma serena.*

Polynomials on a Banach space and their relation with the dual space

Resumen: Dado un espacio de Banach E estudiamos tres aspectos de la relación entre el espacio de polinomios definidos sobre E y el espacio dual E'.
Definimos la clase de polinomios K-acotados $P_K(^nE;X)$ (polinomios cuya continuidad está dada por subconjuntos de E') y mostramos que la extensión de Aron-Berner preserva esta clase. Investigamos propiedades sobre K que relacionan el espacio $P_K(^nE;X)$ con subespacios usuales de $P(^nE;X)$ probando a valores escalares que polinomios K-acotados son aproximables para K conjuntos compactos donde la identidad puede aproximarse uniformemente por operadores de rango finito. Lo mismo es cierto cuando K está contenido en la cápsula convexa equilibrada de una sucesión básica débil-nula de E'. En este caso también probamos que todo polinomio K-acotado es extensible. Además, dimos enunciados equivalentes a la existencia de espacios de Banach sin la propiedad de aproximación.
Dado un morfismo entre duales $s : E' \to F'$, damos un morfismo $\overline{s}$ que vincula los espacios de polinomios $P(^nE;X)$ y $P(^nF;X'')$. Mostramos bajo condiciones de regularidad que si E' es isomorfo a F' entonces los espacios de polinomios homogéneos sobre E y F a valores en X, son isomorfos. Además probamos que los subespacios de polinomios, cuya definición está relacionada en forma más directa al dual (débil-continuos, integrales, regulares), resultan isomorfos sin hipótesis adicionales sobre E, F o X.
Finalmente estudiamos diferentes topologías débil-polinomiales centrándonos en la dada por una familia de seminormas asociadas al conjunto de polinomios ortogonalmente aditivos sobre reticulados de Banach reales. Caracterizamos esta topología en espacios ℓ_p, L_p y sobre espacios de Banach con base incondicional.
Palabras claves: Funciones multilineales, Polinomios sobre espacios de Banach, extensión de Aron-Berner, Arens-regularidad, topología débil-polinomial, polinomios ortogonalmente aditivos.

Abstract: For a Banach space E we study three aspects of the relation between the space of polynomials on E and the dual space E'.
We define the class of K-bounded polynomials $P_K(^nE;X)$ (whose continuity is given by a subset K of E') and we show that the Aron-Berner extension preserves this subspace. We investigate properties of K that bind the space $P_K(^nE;X)$ with subspaces of $P(^nE;X)$. We prove that scalar-valued K-bounded polynomials are approximable when K is a compact set on which the identity can be uniformly approximated by finite rank operators. The same is true when K is contained in the absolutely convex hull of a weakly null basic sequence of E'. Moreover, in this case we prove that every K-bounded polynomial is extendible to any large space. Also, we give equivalent statements for the existence of Banach spaces without the approximation property.
For a mapping between dual spaces, $s : E' \to F'$, we give a morphism $\overline{s}$ relating the spaces of polynomials $P(^nE;X)$ and $P(^nF;X'')$. We show that under conditions of regularity, if E' is isomorphic to F' then the spaces of X-valued homogeneous polynomials on E and F are isomorphic. Also, we prove that some subspaces of polynomials more closely related to the structure of dual spaces (weakly continuous, integral, regular) are isomorphic in full generality.
Finally we study different weak polynomial topologies focusing in the topology determined by a family of seminorms given by the set of orthogonally additive polynomial that are defined on real Banach lattices. We characterize this topology on ℓ_p, and L_p spaces and on Banach spaces with unconditional basis.

Keywords: Multilinear functions, Polynomials on Banach spaces, Aron-Berner extension, Arens-regularity, weak polinomial topology, orthogonally additive polynomials.

Índice General

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro del área de Análisis Funcional, más precisamente en Holomorfía infinita.

El objetivo principal de estas notas es el de investigar algunos de los diferentes aspectos que vinculan el espacio de polinomios definidos sobre un espacio de Banach E y el espacio dual E'.

Por un lado hemos centrado nuestra atención en el estudio del espacio de polinomios en sí mismo, es decir, hemos tratado de aclarar en qué sentido el espacio E' determina la estructura del espacio de polinomios sobre E; y por otra parte hemos estudiado cómo espacios de polinomios, vistos como una generalización natural de formas lineales, definen diferentes topologías sobre el espacio dominio y cuáles son las relaciones entre estas topologías y las dadas por la norma del espacio y la débil (dada por E').

El primer capítulo lo hemos dedicado a la recopilación de definiciones y resultados básicos que necesitaremos para el desarrollo del trabajo. Para esta selección hemos tenido en cuenta que si bien en nuestro Departamento de Matemática hay un vasto grupo de investigadores en el área de Análisis y Análisis Funcional, es un grupo más reducido el que se dedica al estudio de Holomorfía en espacios de Banach. Intentamos así que estas notas fueran autocontenidas, aunque sabemos que no lo hemos logrado completamente.

Damos, pues, las definiciones de polinomios homogéneos y algunas de las funciones relacionadas con éstos, como ser el operador lineal asociado, la diferencial y la linealización de polinomios a través del producto tensorial simétrico introducido por R. Ryan en [Ry$_2$]. Presentamos los distintos tipos de polinomios asociando cada clase con el tipo de continuidad que tiene el operador lineal asociado. Finalmente presentamos diferentes formas de introducir la extensión que R. Aron y P. Berner dan en su trabajo [AB], por medio de la cual es posible extender funciones multilineales, polinomios y ciertas funciones holomorfas definidas sobre un Banach al espacio bidual. La extensión Aron-Berner, que al momento ha sido muy estudiada, es nuestra principal herramienta en el estudio del Capítulo 3.

En el Capítulo 2 nos dedicamos al estudio de K-acotación, que resulta un tipo de continuidad, sobre el espacio de polinomios homogéneos o funciones n-lineales, dado por una seminorma asociada al subconjunto acotado K del espacio dual E'.

Para E un espacio de Banach y K un subconjunto acotado de su espacio dual, diremos que un polinomio n-homogéneo P sobre E es K-acotado si existe una constante positiva C tal que la desigualdad $||P(x)|| \leq C \sup\{|\gamma(x)|^N : \ \gamma \in K\}$ vale para todo $x \in E$. La continuidad es equivalente a la $B_{E'}$-acotación.

Nuestro interés en funciones K-acotadas fue motivado por un resultado E. Toma [T] y de R. Aron, M. Lindström, W. Ruess y R. Ryan [ALRR] que establece que un polinomio homogéneo a valores escalares es w-continuo (sobre acotados) si y solo si es K-acotado para algún subconjunto compacto K de E'.

Comenzamos este capítulo estudiando la subclase de funciones K-acotadas y sus propiedades, generalizando los resultados obtenidos para polinomios a valores escalares sobre un espacio E en [CDDL]. Trabajamos con funciones multilineales definidas en $E_1 \times \cdots \times E_n$ y a valores en un Banach X.

En la tercera sección estudiamos el comportamiento de la extensión de Aron-Berner cuando se aplica a un polinomio K-acotado. Obtenemos una generalización a valores vectoriales del resultado de R. Aron y P. Galindo ([AG]), donde se prueba que la extensión Aron-Berner de un polinomio a valores escalares K-acotado sobre E es a su vez otro polinomio K-acotado en E'', cuando K es un conjunto débilmente compacto. Este resultado facilitó el tratamiento de la clase de polinomios débil continuos sobre acotados en el Capítulo 3.

En la sección 4, estudiamos las propiedades de la subclase de funciones multilineales y polinomios K-acotados según propiedades de K. Obtuvimos condiciones suficientes sobre la aproximabilidad de polinomios K-acotados que naturalmente nos llevaron a considerar el problema de extendibilidad de estos polinomios, para diferentes tipos de subconjuntos K de E'. Obtener extendibilidad no es trivial puesto que, si bien los polinomios de tipo finito (y aún los polinomios integrales

[CZ]) son extensibles, no se tiene esta propiedad para polinomios aproximables.

Obtuvimos, con técnicas de K-acotación una nueva demostración de un conocido resultado de Grothendieck (ver [LT]):

Si existe un espacio de Banach sin propiedad de aproximación entonces existe un subespacio de c_0 *sin propiedad de aproximación.*

La demostración del resultado anterior nos permitió afirmar que:

La existencia de un espacio de Banach sin propiedad de aproximación es equivalente a la existencia de un polinomio homogéneo w*-continuo no-aproximable.*

También hemos dado en contexto de K-acotación una prueba de una generalización para funciones multilineales del resultado de R. Aron y J. B. Prolla ([AP]):

Si E' *tiene la propiedad de aproximación, todo polinomio débilmente continuo sobre acotados de* E *se puede aproximar, uniformemente sobre la bola unidad, por combinaciones (sumas y productos) de funcionales lineales*

Sin embargo los polinomios sobre E están, en general, lejos de ser aproximables por combinaciones de elementos de E'. Aún así, el vínculo entre E' y los polinomios sobre E no es difuso si se tiene en cuenta el planteo que proponen J. C. Díaz y S. Dineen en su trabajo [DD], donde formulan la pregunta que da origen al Capítulo 3 de este trabajo:

Si E' *es isomorfo a* F', *¿serán los espacios de polinomios sobre* E *y* F *isomorfos?*

La primer respuesta parcial es dada en [DD] donde se prueba que si E' y F' son isomorfos y demás E' tiene la propiedad Schur junto con la de aproximación, entonces, cualquiera sea $n \in I\!N$, los espacios de polinomios n-homogéneos sobre E y F son isomorfos.

En este sentido podemos decir que bajo estas condiciones los espacios duales determinan los polinomios sobre los espacios. En el Capítulo 3 nos propusimos investigar condiciones que aseguren la existencia de isomorfismos entre los espacios de polinomios. En estas notas damos una versión generalizada, a valores vectoriales, de los resultados a valores escalares obtenidos en [LZ].

En algún sentido el problema está ligado al de *extendibilidad* de polinomios. Aunque no existe, para polinomios, un teorema de Hahn-Banach (existen polinomios aproximables que no admiten extensión alguna); siempre es posible extender un polinomio sobre E al bidual E'' por el proceso de Aron y Berner ([AB], [Z_1].) Siguiendo estas técnicas de extensión obtuvimos una construcción que nos permite "levantar" todo morfismo entre duales $s : E' \to F'$ a un morfismo $\overline{s} : P(^n E; X) \to P(^n F; X'')$ entre los espacios de polinomios.

En la segunda sección de este capítulo investigamos propiedades de $\overline{s}$ y el problema de funtorialidad $s \mapsto \overline{s}$. Probamos que en general esta asignación no es funtorial hallando condiciones bajo las cuales el problema tiene solución positiva. Esto guarda estrecha relación con el problema de falta de simetría de la extensión Aron-Berner de una función multilineal simétrica. Este hecho nos condujo a considerar condiciones de regularidad de Arens sobre los espacios de Banach. Llegando así al resultado principal de este capítulo:

Si E y F son dos espacios de Banach simétricamente Arens regulares con sus duales isomorfos (resp. isométricos) entonces, cualquiera sea $n \in I\!N$ y X Banach, los espacios de polinomios n-homogéneos a valores en X sobre E y F resultan isomorfos (resp. isométricos.)

La condición de *regularidad simétrica* sobre E y F puede sustituirse por *regularidad* sobre E.

Por otra parte hemos considerado, en la sección 3, si las distintas subclases de polinomios son preservadas o no por estos isomorfismos, dado que consideramos que el mero hecho de que dos espacios vectoriales sean isomorfos no aporta datos suficientes sobre la estructura de los mismos. Notar por ejemplo que $P(^k I\!R^n)$ es isomorfo a $P(^{n-1} I\!R^{k+1})$.

Para la situación $s : E' \to F'$ un morfismo entre espacios duales era natural esperar que aquellos subespacios de polinomios escalares sobre E que quedan determinados por E', como los polinomios de tipo finito, los nucleares y aproximables, se preservaran vía el morfismo $\overline{s} : P(^n E) \to P(^n F)$. No era tan clara la misma situación para polinomios a valores vectoriales (puesto que el morfismo arroja polinomios a valores en el bidual X'') ni para subespacios mayores como el de polinomios débil continuos sobre acotados, integrales, extensibles y regulares.

Estudiamos el comportamiento de $\overline{s}$ respecto de estas subclases, que son las usuales, de polinomios para las que hemos dado una respuesta afirmativa sin imponer condiciones sobre los espacios de Banach E y F ni al espacio de llegada X. Esto es, si E' y F' son isomorfos (resp. isométricos) entonces, cualquiera sea $n \in I\!N$, las subclases correspondientes de polinomios n-homogéneos a valores en X sobre E y F arriba mencionadas resultan isomorfas (resp. isométricas).

También dimos un resultado negativo para la subclase de polinomios débil-secuencialmente continuos (wsc) en el sentido de que el isomorfismo no preserva la clase. Aún así encontramos que si E no contiene copias de ℓ_1 y además tiene base achicante ('shrinking'), entonces para cualquier espacio F cuyo dual sea isomorfo (resp. isométrico) a E' los espacios de polinomios wsc sobre E y F son isomorfos (resp. isométricos).

En el Capítulo 4 nos volcamos al estudio de polinomios en lo que refiere a las topologías que este espacio puede definir sobre E, teniendo en cuenta la topología débil, dada por las formas lineales y la topología débil-polinomial wp, que es la dada por la convergencia dada a través del conjunto de polinomios. Esta topología fue estudiada en [BJL], [DG], [GGLl], [GLl]; entre otros.

Se sabe que en todo espacio complejo de Hilbert infinito-dimensional H, la wp-topología no es lineal (ver [ACG$_1$]). Otros ejemplos tanto en espacios de Banach reales como complejos tales que la wp-topología es no lineal fueron dados en [BJL] y [CGG]. Por otra parte existen ejemplos para los cuales se verifica $w = wp$ o $wp = \|.\|$, con lo cual en estos casos wp es lineal. En todo espacio de Banach se tiene $w \leq wp \leq \|.\|$, pero la falta de linealidad de la topología wp muestra que, en general, éstas topologías son diferentes.

Con el objeto de obtener una topología débil-polinomial lineal sobre espacios de Banach, M. Garrido, J. A. Jaramillo y J. G. LLavona introdujeron en [GJLl] una topología dada por una familia de seminormas asociada al espacio de polinomios.

En este capítulo trabajamos sobre reticulados de Banach reales investigando la topología (que llamaremos τ) dada por una familia de seminormas originadas por polinomios n-homogéneos ortogonalmente aditivos, resultados que se encuentran en [LLl]. Esta topología, que resulta lineal y convexa, está cercanamente relacionada con la topología débil-polinomial wp, como detallaremos más adelante.

En las secciones 3 y 4 dimos una caracterización de la topología τ, en términos de convergencia de redes, sobre conjuntos acotados en los espacios ℓ_p y $L_p[0,1]$, destacando la importancia del rol que juegan los ceros de los polinomios en las seminormas involucradas. De hecho, toda seminorma asociada a un polinomio cuyo conjunto de ceros genera un subespacio denso en un espacio de Banach real E, es nula.

Para caracterizar la topología τ, describimos explícitamente el valor de las seminormas en términos de la expresión del polinomio. Este estudio fue hecho tanto para formas lineales como para polinomios que no son débil continuos sobre acotados ya que observamos que estos últimos no aportan más información a la topología τ que la que dan las formas lineales.

Por otra parte mostramos que la topología débil-polinomial wp_o que es la asociada a la convergencia, en conjuntos acotados, bajo polinomios ortogonalmente aditivos coincide con la topología τ para $p = 1$ o $p \in (2k-1, 2k]$ (para algún $k \in I\!N$) en los espacios ℓ_p y para $1 \leq p < 2$ o $p \in [2k, 2k+1)$ (para algún $k \in I\!N$) sobre los espacios $L_p[0,1]$. Además probamos que la topología wp_o es estrictamente más fina que la topología τ sobre cualquier ℓ_p o $L_p[0,1]$ con tal que $p = 2k+1$ para algún $k \in I\!N$.

Finalmente en la sección 5 nuestro propósito fue el de investigar esta topología en espacios con Base de Schauder o con Descomposición Finito-Dimensional (FDD). Teniendo en cuenta el trabajo de V. Dimant y R. Gonzalo [DG] consideramos la posibilidad de extender el conjunto de seminormas al de aquellas asociadas a polinomios bloque diagonales. Como era de esperar, al considerar polinomios más generales (todo polinomio diagonal en un espacio de Banach con base de Schauder es bloque diagonal en éste) se obtuvo una caracterización más débil, la de la convergencia de sucesiones. Algunos espacios a los que se da alcance con esta generalización son, por ejemplo, espacios de sucesiones de Orlicz que no son isomorfos a ningún ℓ_p.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definiciones y Propiedades Básicas.

A lo largo de estas notas $E,\ F,\ X$ serán espacios de Banach. Usaremos $I\!\!K$ para señalar el cuerpo escalar real o complejo indistintamente. Para E pondremos por B_E la bola unidad del espacio. En este capítulo damos las definiciones de funciones multilineales y polinomios homogéneos definidos sobre un espacio de Banach y presentamos los resultados necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos. Usaremos las notaciones usuales según [D] y [M].

Definición 1.1 *Diremos que una aplicación $P : E \to X$ es un* **polinomio n-homogéneo** *sobre E a valores en X si existe una aplicación n-lineal $\Phi : \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n} \to X$ para la cual $P(x) = \Phi(\overbrace{x, \ldots, x}^{n})$.*

Para k número entero no negativo y $x \in E$, pondremos x^k en lugar de la secuencia $\overbrace{x, \ldots, x}^{k}$ de E^k. Así usaremos indistintamente la expresión $P(x) = \Phi(x, \ldots, x)$ o $P(x) = \Phi(x^n)$ para un polinomio n-homogéneo sobre un espacio de Banach. Si Φ es una función multilineal simétrica, esta escritura puede generalizarse para cualquier m de $I\!\!N_0^n$ como sigue. Si $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $|m| := m_1 + \cdots + m_n = n$, y $x_1, \ldots, x_n$ en E, la notación para $\Phi(\overbrace{x_1, \ldots, x_1}^{m_1}, \ldots, \overbrace{x_n, \ldots, x_n}^{m_n})$ será $\Phi(x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n})$.

Llamaremos S_n al conjunto de todas las permutaciones σ del intervalo inicial natural $\{1,\ldots,n\}$. Una aplicación n-lineal se dice **simétrica** si $\Phi(x_1,\ldots,x_n)=\Phi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ para todo $\sigma\in S_n$.

Todo polinomio n-homogéneo tiene asociada una aplicación n-lineal simétrica. En efecto, basta considerar para $x_1,\ldots,x_n\in E$

$$A(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\Phi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

Es claro que si Φ define al polinomio P, A también lo hace y además es simétrica. La Fórmula de Polarización, que damos a continuación, da una forma de recuperar, dado un polinomio, una aplicación n-lineal simétrica asociada a éste; con lo cual, la función n-lineal simétrica asociada a un polinomio es única.

Proposición 1.2 *Sea P un polinomio n-homogéneo y sea A una función n-lineal simétrica asociada a P. Entonces para todo $x_1,\ldots,x_n\in E$ se tiene*

$$A(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n P(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n)$$

Dem. Para cada elección de $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ tenemos

$$\begin{aligned}P(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n) &= A(\textstyle\sum_{i_1=1}^n\varepsilon_{i_1}x_{i_1},\ldots,\sum_{i_n=1}^n\varepsilon_{i_n}x_{i_n})\\ &= \displaystyle\sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_n=1}^n\varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_n}A(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})\end{aligned}$$

Llamamos m_j a la cantidad de repeticiones de x_j como argumento de A en cada sumando. Cada m_j toma valores entre 0 y n para todo $j=1,\ldots,n$. Sea $m=(m_1,\ldots,m_n)$ y $|m|=n$. Como A es simétrica podemos reordenar las sumas considerando $C_m=\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-m_1-m_2}{m_3}\cdots1$, el número de repeticiones de $A(x_1^{m_1},x_2^{m_2},\ldots,x_n^{m_n})$. Así tenemos

$$P(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n)=\sum_{|m|=n}C_m\varepsilon_1^{m_1}\ldots\varepsilon_n^{m_n}A(x_1^{m_1},x_2^{m_2},\ldots,x_n^{m_n})$$

y

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \quad & P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) \\ &= \sum_{|m|=n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \varepsilon_1^{m_1+1} \varepsilon_2^{m_2+1} \ldots \varepsilon_n^{m_n+1} C_m A(x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}) \qquad (1.0)\end{aligned}$$

Ahora, cada vez que $m_j \neq 1$, existe algún k con $m_k = 0$. Supongamos, para fijar ideas que $k = 1$. Luego, el sumando correspondiente a $m = (0, m_2, \ldots, m_n)$, es

$$\sum_{\varepsilon_1 \pm 1} \varepsilon_1 \Big(\sum_{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \varepsilon_2^{m_2+1} \ldots \varepsilon_n^{m_n+1} C_m A(x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n})\Big) = 0$$

Por tanto, en la igualdad (1.0) sólo queda el término de la suma para m_* la n-tupla con todos los m_j $'s$ iguales a 1. $C_{m_*} = n!$ y

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} C_{m_*} A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= 2^n n! A(x_1, x_2, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

igualdad que prueba la fórmula de polarización. ∎

Pondremos por $P(^nE; X)$ el espacio de polinomios n-homogéneos $P : E \to X$ que verifican $\sup_{x \in B_E} \|P(x)\| < \infty$. La aplicación $P \mapsto \|P\|$ define una norma sobre este espacio vectorial que lo hace un espacio de Banach.

En forma análoga $L(^nE; X)$ será el espacio de aplicaciones n-lineales $\Phi : E \times \cdots \times E \to X$ con $\sup_{x_1,\ldots,x_n \in B_E} \|\Phi(x_1, \ldots, x_n)\| < \infty$ y denotaremos con $L_s(^nE; X)$ al subespacio de funciones simétricas de $L(^nE; X)$. En ambos casos la aplicación $\Phi \mapsto \|\Phi\|$ define una norma que hace de cada uno un espacio de Banach. Más generalmente consideraremos, para $E_1, \ldots, E_n$ espacios de Banach, el espacio de funciones n-lineales $\Phi : E_1 \times \cdots \times E_n \to X$ con $\sup_{x_1 \in B_{E_1},\ldots,x_n \in B_{E_n}} \|\Phi(x_1, \ldots, x_n)\|$ finito. Notaremos a este conjunto por $L(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$. Se tienen las siguientes equivalencias.

Proposición 1.3 *Sea $\Phi : E_1 \times \cdots \times E_n \to X$ una aplicación n-lineal, son equivalentes*

(i) Φ *es separadamente continua.*

(ii) Φ *es separadamente continua en cero.*

(iii) $\sup\limits_{x_1 \in B_{E_1}, \dots, x_n \in B_{E_n}} \|\Phi(x_1, \dots, x_n)\| < \infty$.

(iv) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que, para todo* $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$,

$$\|\Phi(x_1, \dots, x_n)\| \leq C||x_1|| \cdots ||x_n||.$$

En el caso polinomial tenemos el mismo resultado que es análogo al de operadores lineales.

Proposición 1.4 *Sea* $P : E \to X$ *un polinomio* n*-homogéneo, son equivalentes*

(i) P *es continuo.*

(ii) P *es continuo en cero.*

(iii) $\sup\limits_{x \in B_E} \|P(x)\| < \infty$.

(iv) *Existe una constante* $C > 0$ *tal que, para todo* $x \in E$, $\|P(x)\| \leq C||x||^n$.

En cada caso el ínfimo de las constantes C que verifican (iv) da el valor de la norma.

Estos resultados junto con la fórmula de polarización nos dan la identificación natural entre $P(^nE; X)$ y $L_s(^nE; X)$ debido a las desigualdades

$$\|P\| \leq \|A\| \leq \frac{n^n}{n!}\|P\|. \tag{1.1}$$

donde P es un polinomio n-homogéneo y A es su aplicación n-lineal simétrica asociada.

Cuando el espacio X sea el cuerpo de escalares notaremos por $P(^nE)$, $L(^nE)$, $L_s(^nE)$ y $L(^nE_1 \times \cdots \times E_n)$ a los respectivos espacios.

Aplicaciones asociadas a un polinomio.

Definición 1.5 *Para $\Phi \in L({}^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$ pondremos por $T_{\Phi,i}$ al operador lineal de E_i en $L({}^{n-1}E_1 \times \cdots \times (i) \times \cdots E_n; X)$ que a cada x_i de E_i asigna la $(n-1)$-función lineal $T_{\Phi,i}(x_i)$ que verifica $T_{\Phi,i}(x_i)(x_1, \ldots, (i), \ldots, x_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Donde (i) indica, como es usual, que la coordenada i-ésima es la omitida.*

Para $A \in L_s({}^nE; X)$ todos los operadores $T_{A,i}$ coinciden. En este caso llamaremos T_A a dicho operador y diremos que $T_A : E \to L_s({}^{n-1}E; X)$ es el **operador lineal asociado a** A. Del mismo modo para $P \in P({}^nE; X)$ queda definido $T_E : E \to P({}^{n-1}E; X)$, el **operador lineal asociado a** P, dado por $T_P(x)(a) = T_A(x)(y, \ldots, y) = A(x, y, \ldots, y)$; donde A es la función n-lineal simétrica asociada a P.

Los operadores T_P y T_A asociados a P y a A respectivamente nos darán información sobre el polinomio o la multilineal asociada, como veremos en la sección siguiente.

Observación 1.6 *Sea $A \in L_s({}^nE; X)$ entonces, $\|A\| = \|T_A\|$.*

Dem.

$$\begin{aligned} \|T_A\| &= \sup_{x \in B_E} \|T_A(x)\| \\ &= \sup_{x \in B_E} \sup_{x_2, \ldots, x_n \in B_E} \|T_A(x)(x_2, \ldots, x_n)\| \\ &= \sup_{x \in B_E} \sup_{x_2, \ldots, x_n \in B_E} A(x, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \|P\|. \blacksquare \end{aligned}$$

Así como hemos definido el operador asociado a un polinomio $P \in P({}^nE; X)$ queda naturalmente definida la aplicación **diferencial de** P, $dP : E \to L(E; X)$. $dP(x)$ es un polinomio $(n-1)$-homogéneo que a cada elemento $y \in E$ le asigna el valor $dP(x)(y) = n\, A(\overbrace{x, \ldots, x}^{n-1}, y)$ donde A es la aplicación n-lineal simétrica asociada a P.

Por último queremos presentar una forma de linealizar polinomios a través del espacio producto tensorial simétrico. Esta técnica fue introducida por R. Ryan en [Ry$_2$]. El espacio producto tensorial permite tratar problemas de aplicaciones multilineales o polinomios traduciéndolos a problemas de aplicaciones lineales (con la desventaja de trabajar sobre espacios más complejos que el original).

Recordemos que el producto tensorial de n espacios vectoriales $E_0, \ldots, E_n$ puede construirse como el subespacio generado por el dual algebraico de $L_\star({}^n E_1 \times \cdots \times E_n)$ generado por los elementos de la forma:

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n(\Phi) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

para $x_i \in E_i, i = 1, \ldots, n$; y Φ función n-lineal a valores en $I\!K$, donde "$\star$" indica que el conjunto de funciones es también algebraico. Así un elemento $u \in E_4 \otimes \cdots \otimes E_n$ tendrá una escritura no única

$$u = \sum_{j=5}^{k} \lambda_j \; x_{1j} \otimes \cdots \otimes x_{nj}, \qquad \text{con} \;\; x_{ij} \in E_i \;\; \text{y} \quad \lambda_j \in I\!K.$$

Lema 1.7 *Doc elementos u y v serán iguales si y solo si para toda $\Phi \in L_\star({}^n E_1 \times \cdots \times E_n)$, $\Phi(u) = \Phi(v)$.*

La misma idea puede aplicarse a funciones n-lineales a valores en X. La aplicación $\rho : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ eh una forma n-lineal. Se define la forma lineal L_Φ tal que $L_\Phi \circ \rho = \Phi$. La buena definición de L_Φ se tiene en virtud de 1.7 y el siguiente diagrama resulta conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\rho"'] & X \\
\otimes_{j=1}^n E_j \arrow[ur, "L_\Phi"] &
\end{tikzcd}$$

Luego $L_\star({}^n E_1 \times \cdots \times E_n; X) \simeq L_\star(\otimes_{j=3}^n E_j; X)$, isomorfismo algebraico.

Para $E_1 = \ldots = E_n = E$ se define el espacio producto tensorial simétrico $\otimes_s^n E$, como el subespacio de $\otimes^n E$ generado por los elementos de la forma $x^{(n)} = x \otimes \cdots \otimes x$. En esta situación la aplicación $x \mapsto x \otimes \cdots \otimes x$ es un polinomio n-homogéneo con la propiedad de linealizar polinomios en el siguiente sentido.

Si P es un polinomio, no necesariamente continuo, n-homogéneo se define L_P, la **linealización de** P por $L_P(x) = L_A(x^{(n)})$ para todo $x \in E$, con A la forma n-lineal simétrica asociada a P. Los espacios $P_\star({}^n E; X)$ y $L_\star(\otimes_s^n E; X)$ son algebraicamente isomorfos. Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E \times \cdots \times E & \overset{P}{\to} & X \\ & {}^{L_P} & \\ \downarrow & & \nearrow \\ & & \\ \otimes_s^n E & & \end{array}$$

El espacio producto tensorial no es completo a menos que los espacios considerados sean de dimensión finita. Este espacio puede completarse con varias normas. A nuestros fines sólo introduciremos la norma inyectiva. Si $u \in \otimes_{i=1}^n E_i$, el producto tensorial de $E_1, \ldots, E_n$; $u = \sum_{j=1}^k \ x_{1j} \otimes \cdots \otimes x_{nj}$, se define

$$\|u\|_\epsilon = \sup\{|\sum_{j=3}^k \ \varphi_1(x_{1j}) \cdots \varphi_n(x_{9n})| \quad \text{tal que } \varphi_i \in B_{E_i'}\}$$

y para el producto tensorial simétrico si $u = \sum_{j=6}^k \ x_j \otimes \cdots \otimes x_j$, se define

$$\|u\|_\epsilon = \sup\{|\sum_{j=1}^k \ \varphi^n(x_j)| \quad \text{tal que } \varphi \in B_{E'}\}$$

Ambos supremos son independientes de la respresentación de u gracias al Lema 1.7.

La completación con esta norma es llamado el producto tensorial inyectivo (simétrico) y notaremos respectivamente $\hat{\otimes}_\epsilon^n E_i$ y $\hat{\otimes}_{s,\epsilon}^n E$. Ambos espacios son espacios de Banach con $\|.\|_\epsilon$.

1.2 Algunas subclases de polinomios y su relación con T_P.

El primer ejemplo natural de polinomio n-homogéneo es el dado por $P(x) = \varphi^n(x)y$, donde $y \in X$ y φ es una forma lineal sobre E. P será continuo si y solo si φ lo es. En tal caso $\|P\| = \|\varphi\|^n \|y\|$. Su aplicación n-lineal simétrica asociada es $A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)y$.

El espacio generado por combinaciones lineales finitas de polinomios del tipo $\varphi^n y$ será el espacio de **polinomios de tipo finito** que notaremos por $P_f(^nE; X)$.

Los polinomios n-homogéneos de tipo finito sobre E a valores en X podrán escribirse de la forma $\sum_{j=1}^N \varphi_j^n y_j$. Para $X = I\!K$ la escritura será $\sum_{j=1}^N \varphi_j^n$ en el caso complejo y $\sum_{j=1}^N \varphi_j^n - \sum_{k=1}^M \psi_k^n$ en el caso real.

Todo polinomio n-homogéneo de la forma $P(x) = \varphi_1(x) \cdots \varphi_n(x)y$ con $y \in X$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ es también un polinomio de tipo finito y admite una escritura como la mencionada.

Esta clase de polinomios no es cerrada en $(P(^nE; X), \|.\|)$. Su clausura, en norma, forma el espacio de **polinomios aproximables** que notaremos $P_a(^nE; X)$. Por su definición, los polinomios aproximables serán aquellos que admiten una aproximación, en norma, por polinomios de tipo finito.

Análogamente quedan definidas las subclases de $L(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$ de aplicaciones de tipo finito y aproximables, con las notaciones obvias. Las primeras serán combinaciones lineales finitas de expresiones de la forma $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)y$ donde $m \in X$ y $\varphi_k \in E'_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.8 *Sea $\Phi \in Z(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$. Entonces, Φ es de tipo finito si y solo si $T_{\Phi,i}$ es un operador de rango finito, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Dem. Es claro que si $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_{1k}(x_1) \cdots \varphi_{nk}(x_n)y_k$, cada $T_{\Phi,i}$ es un operador de rango finito.

Recíprocamente, supongamos que cada $T_{\Phi,i}$ es un operador de rango finito y llamemos $\Pi_i : E_i \to E_i/\ker(T_{\Phi,i})$ la respectiva aplicación al cociente.

Definimos $\tilde{\Phi} : E_1/\ker(T_{\Phi,1}) \times \ldots \times E_n/\ker(T_{\Phi,n}) \to X$ la aplicación $\tilde{\Phi}(\Pi_6(x_1), \ldots, \Pi_n(x_n)) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$. Veamos que $\tilde{\Phi}$ está bien definida. Sean $x_i, y_i \in E_i$ tales que $\Pi_i(x_i) = \Pi_i(y_i)$,

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \ldots, x_n) &= T_{\Phi,1}(x_1)(x_2, \ldots, x_n) = T_{\Phi,1}(y_1)(x_3, \ldots, x_n) \\ &= \Phi(y_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= T_{\Phi,2}(x_8)(y_1, x_1, \ldots, x_n) = T_{\Phi,2}(y_2)(y_1, x_3, \ldots, x_n) \\ &= \Phi(y_1, y_4, x_3, \ldots, x_n) \\ &= \cdots = \Phi(y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Como $E_i/\ker(T_{\Phi,i})$ es de dimensión finita, para todo $i = 1, \ldots, n$; $\tilde{\Phi}$ es una aplicación multilineal de tipo finito y en consecuencia Φ lo es. ■

Corolario 1.9 *Sea P en $P(^nE;X)$. Entonces, P es de tipo finito si y solo si T_P es de rango finito.*

Corolario 1.10 *Sea P en $P(^nE;X)$. Entonces, P es aproximable si y solo si T_P es aproximable por operadores de rango finito.*

Es natural considerar la clase de polinomios para los cuales T_P es compacto. Un resultado de Aron-Herves-Valdivia [AHV] establece su equivalencia con una subclase de polinomios que aprovechamos para introducir.

Definición 1.11 *Un polinomio P en $P(^nE;X)$ se dice* **débil continuo sobre acotados de** *E si y solo si para toda red acotada $(x_\alpha)_\alpha \subset E$ débilmente convergente, digamos $x_\alpha \overset{w}{\to} x$, se tiene que $P(x_\alpha) \to P(x)$ en la topología fuerte de X.*

Teorema 1.12 *[AHV] Sea P en $P(^nE;X)$. Entonces, P es débil continuo sobre acotados de E si y solo si T_P es compacto.*

Es claro, debido al teorema anterior y gracias al contraejemplo de P. Enflo al problema de aproximación [E], que la clase de polinomios aproximables difiere, en general, de la clase de polinomios débil continuos sobre acotados. En el próximo capítulo, Observación 2.19, veremos que la existencia de un polinomio w-continuo sobre acotados que no sea aproximable es equivalente a la condición de que el espacio falle en tener propiedad de aproximación.

Un polinomio P de $P(^nE;X)$ es débil continuo sobre E si y solo si es de tipo finito. Por este motivo diremos simplemente que P es débil-continuo (w-continuo) al referirnos a polinomios débil continuos sobre acotados y notaremos $P_w(^nE;X)$ a esta subclase.

Como la convergencia de sucesiones no caracteriza la topología débil sobre un espacio de Banach, a menos que éste sea Schur, otra clase de polinomios a considerar será la clase de polinomios *débil-secuencialmente continuos* que resumiremos escribiendo wsc.

Definición 1.13 *Un polinomio P en $P(^nE;X)$ se dice* **débil-secuencialmente continuo** **(**wsc**)** *si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ débilmente convergente, digamos $x_n \overset{w}{\to} x$, se tiene que $P(x_n) \to P(x)$ en X.*

Notaremos por $P_{wsc}(^nE;X)$ al espacio de polinomios *wsc*. No todo polinomio continuo es *wsc*. Un simple ejemplo de este hecho lo da el polinomio escalar 2-homogéneo definido sobre ℓ_2 $P(x) = \sum_{k\geq 1} x_k^2$; la base canónica de ℓ_2 $(e_j)_{j\in I\!N}$, converge débilmente a cero pero $P(e_j) = 1$, para todo $j \in I\!N$.

Hasta aquí tenemos formada la cadena de inclusiones, en general estrictas,

$$P_f(^nE;X) \subset P_a(^nE;X) \subset P_w(^nE;X) \subset P_{wsc}(^nE;X) \subset P(^nE;X) \tag{1.2}$$

Definición 1.14 *Un polinomio P en $P(^nE;X)$ se dice* **integral** *si existe una medida G de Borel regular y de variación acotada sobre $(B_{E'}, w^*)$ a valores en X tal que*

$$P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma^n(x)dG(\gamma).$$

En este caso diremos que G representa a P y notaremos por $P_I(^nE, X)$ al espacio de polinomios n-homogéneos integrales. Cuando $n = 1$ la definición corresponde a la de operadores Pietsch-integrales (ver [DU]).

Este espacio es un espacio de Banach con la norma

$$\|P\|_I = \inf\{|G|(B_{E'}) \ : G \text{ representa a } P\}.$$

Con las definiciones y notaciones de la sección anterior, se tiene:

Proposición 1.15 *[CZ] Los espacios $P_I(^nE)$ y $(\otimes^n_{s,\epsilon}E)'$ son isométricamente isomorfos.*

Definición 1.16 *[KR] Un polinomio P en $P(^nE;X)$ se dice* **extensible** *si P admite una extensión de E a F con valores en X, para todo espacio de Banach F que contenga a E. Este espacio será notado por $P_e(^nE;X)$.*

Para este espacio se define

$\|P\|_e = \inf\{\lambda > 0 : \forall \quad F \supseteq E$ existe una extensión de P a F con norma $\leq \lambda\}$.

El espacio $(P_e(^nE;X), \|.\|_e)$ es un espacio de Banach (ver [C].)

En este caso tenemos la no tan obvia cadena de inclusiones

$$P_f(^nE;X) \subset P_I(^nE,X) \subset P_e(^nE;X) \subset P_{wsc}(^nE;X) \subset P(^nE;X) \tag{1.3}$$

La primer inclusión se tiene al considerar para un polinomio de tipo finito $\sum_{j=1}^m \varphi_j^n y_j$ la medida μ de masas puntuales, $\mu(\varphi) = \displaystyle\sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|^n \delta_j(\varphi) y_j$, donde $\delta_j(\frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}) = 1$ y es nula en otro caso. La segunda fue probada para el caso escalar por D. Carando e I. Zalduendo, (ver [CZ], §2), quienes además mostraron un ejemplo de inclusión estricta, la generalización a valores vectoriales fue hecha en [C]. Finalmente, la tercera inclusión se debe a la inclusión de E en $C(B_{E'}, w^*)$ que al ser un espacio $C(K)$ con K conjunto compacto, tiene la propiedad Dunford-Pettis. Sobre un espacio con esta propiedad, todos los polinomios resultan wsc ([GG]). Entonces, todo polinomio sobre E extensible, se extiende a un polinomio sobre $C(B_{E'}, w^*)$ que resulta wsc y por lo tanto, el polinomio original (que es la restricción de éste) también lo es.

Tanto los polinomios integrales como los extensibles tienen asociado un operador w-compacto. Pero la clase de polinomios que tienen operador asociado w-compacto excede a los espacios mencionados. Un polinomio en esta clase se dice **regular.** Un ejemplo de polinomio regular no integral y no extensible es $P : \ell_2 \to \mathbb{C}, \quad P(x) = \sum_{k\geq 1} x_k^2$. Ya vimos que P no es wsc por lo tanto no es extensible ni integral, pero es regular puesto que su operador asociado corresponde a $Id : \ell_2 \to \ell_2,\ (x \mapsto x)$, que es w-compacta pues ℓ_2 es reflexivo.

1.3 Extensiones de Aron-Berner

En el Capítulo 3 de estas notas estudiaremos la relación entre los espacios de polinomios definidos sobre distintos espacios de Banach E y F con duales isomorfos. Para esto usaremos una construcción similar a la hecha por R. Aron y P. D. Berner en [AB], que presentamos aquí.

La extensión Aron-Berner de un polinomio definido sobre E al bidual E'' ha sido extensamente estudiada y ha sugerido diversas generalizaciones (ver por ejemplo [LR], [Z_1], [GGMM]).

Sea $A \in L_s(^nE; X)$. La extensión de Aron-Berner dará una aplicación n-lineal $\overline{A} \in L(^nE''; X'')$ tal que $\overline{A}(J_E(x_1), \ldots, J_E(x_n)) = A(x_1, \ldots, x_n)$, donde $J_E : E \to E''$ es la inclusión canónica.

Empezaremos describiendo el caso a valores escalares. Sea $k \leq n$. Cada elemento z de E'' define una aplicación lineal

$$\overline{z} : L_s(^kE) \to L_s(^{k-1}E)$$

de manera que $\overline{z}(B)(x_1, \ldots, x_{k-1}) = z(B_{x_1,\ldots,x_{k-1}})$, donde $B_{x_1,\ldots,x_{k-1}}$ es el elemento de E' que a cada $x \in E$ le asigna el valor $B(x_1, \ldots, x_{k-1}, x)$.

Se define para $z_1, \ldots, z_n \in E''$ la forma n-lineal, $\overline{A}(z_1, \ldots, z_n) = \overline{z_1} \circ \cdots \circ \overline{z_n}(A)$.

Para el caso vectorial se procede como sigue. Para cada $\varphi \in X'$; $z_1, \ldots, z_n \in E''$, será

$$\overline{A}(z_1, \ldots, z_n)(\varphi) = \overline{\varphi \circ A}(z_1, \ldots, z_n)$$

donde $\varphi \circ A$ es un elemento de $L_s(^kE)$ y la extensión empleada es la definida a valores escalares.

Equivalentemente se podría haber definido para cada elemento z de E'' la aplicación lineal

$$\tilde{z} : L_s(^kE; X'') \to L_s(^{k-1}E; X'')$$

por $\overline{z}(A)(x_1, \ldots, x_{k-1})(\varphi) = z(\varphi \circ A_{x_1,\ldots,x_{k-1}})$, donde $\varphi \circ A_{x_1,\ldots,x_{k-1}}$ es un elemento de E'. Ahora siguiendo como en el caso escalar se define $\overline{A}(z_1, \ldots, z_n) = \tilde{z_1} \circ \cdots \circ \tilde{z_n}(A)$.

Observación 1.17

a). Hemos conseguido $\overline{A}$ extendiendo en primer lugar la última variable hasta llegar a la primera. De la misma manera podríamos elegir cualquier orden de extensión. Las diferentes extensiones difieren en general unas de otras obteniendo así $n!$ extensiones Aron-Berner para A.

b). Todas las extensiones Aron-Berner de A coinciden sobre la diagonal z^n, pero en general, la propiedad de simetría de A no se traslada a $\overline{A}$. Considerar por ejemplo la forma bilineal $A : \ell_1 \times \ell_1 \to I\!K$,

$$\begin{aligned} A((x_k),(y_k)) = \quad & x_3y_2 + x_5(y_2+y_4) + \cdots + x_{2k+1}(y_2+\cdots+y_{2k}) + \cdots \\ & + y_3x_2 + y_5(x_2+x_4) + \cdots + y_{2k+1}(x_2+\cdots+x_{2k}) + \cdots \end{aligned}$$

Tenemos otro ejemplo al considerar para X un espacio de Banach, la forma bilineal simétrica asociada al polinomio 2-homogéneo P definido sobre $X \times X'$ por $P(x,x') = x'(x)$. Si $\rho : X''' \to X'$ es la restricción (i.e., la traspuesta de la inclusión natural $J_X : X \to X''$), la extensión Aron-Berner de A al bidual de $X \times X'$ es (ver [Z$_2$])

$$\overline{A}((x'',x''');(y'',y''')) = \frac{1}{2}[x''(\rho(y''')) + x'''(y'')],$$

que en general no es simétrica.

c). **Extensión de un polinomio.** Ahora estamos en condiciones de extender polinomios definidos sobre E a su bidual E''. Sea $P \in P(^nE;X)$ y sea A su aplicación n-lineal simétrica asociada, entonces se define $\overline{P} : E'' \to X''$ por $\overline{P}(z) = \overline{A}(z,\ldots,z)$.

Notar que $\overline{P}$ no resulta una extensión de P en el sentido de polinomios extensibles dado que en general, si X no es reflexivo, toma valores en X'' y no en X. Para operadores lineales $T : E \to X$ por el teorema de Gantmacher (ver, por ejemplo, [HP]) se tiene que $T'' : E'' \to X''$ tiene imagen en X si y solo si T es débilmente compacto. En este caso, $\overline{T} = T''$ es una extensión de T. Este hecho fue generalizado a polinomios *débilmente compactos* ($P : E \to X$ se dice débil compacto si $P(B_E)$ es un conjunto relativamente débilmente compacto en X), de la siguiente manera: *Si P es un polinomio n-homogéneo débilmente compacto, entonces $\overline{P}(z)$ es un elemento de X, para todo $z \in E''$*, (ver [C]).

d). Nuestro propósito es estudiar polinomios definidos sobre espacios de Banach. Por eso hemos elegido presentar la extensión de Aron-Berner que fue introducida para multilineales simétricas. Dado que se quiere establecer un morfismo entre espacios de polinomios, es necesario hacer una elección no arbitraria de una función n-lineal que lo defina. Este es el caso de la aplicación simétrica asociada al polinomio ya que es única.

Aún así, no queremos dejar de mencionar que puede darse una definición más general (ver [GV]) como sigue.

Sea $\Phi \in L(^nE_1 \times \cdots \times E_n;X)$. En este caso cualquier extensión Aron-Berner de Φ dará una aplicación n-lineal $\overline{\Phi} \in L(^nE_1'' \times \cdots \times E_2'';X'')$ tal que $\overline{\Phi}(J_{E_1}(x_1),\ldots,J_{E_n}(x_n)) = \Phi(x_1,\ldots,x_n)$.

A valores escalares se define para $k \leq n$, y z de E''_k la aplicación lineal

$$\overline{z} : L({}^k E_1 \times \cdots \times E_k) \to L({}^{k-1} E_1 \times \cdots \times E_{k-1})$$

con $\overline{z}(\Phi)(x_1, \ldots, x_{k-1}) = z(\Phi_{x_1,\ldots,x_{k-1}})$, donde $\Phi_{x_1,\ldots,x_{k-1}} \in E'_k$, se define de manera standard. Según lo hecho se define $\overline{\Phi}(z_1, \ldots, z_n) = \overline{z_1} \circ \cdots \circ \overline{z_n}(\Phi)$. El caso a valores vectoriales se obtiene del escalar como antes. Notar que también se obtienen $n!$ extensiones Aron-Berner para Φ.

e). Finalmente mencionamos otra forma usual de presentar este tipo de extensiones, esta construcción se debe a R. Arens [Ar]. Haremos la descripción para funciones bilineales ya que el caso n-lineal se generaliza naturalmente de este.

Para $\Phi : E_1 \times E_2 \to X$, se definen

$$\begin{array}{l} \Phi_1 : X' \times E_1 \to E'_2 \\ \Phi_2 : E''_2 \times X' \to E'_1 \\ \Phi_3 : E''_1 \times E''_2 \to X'' \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{lll} \Phi_1(\varphi, x_1) \in E'_2, & \Phi_1(\varphi, x_1)(x_2) = \varphi(\Phi(x_1, x_2)); & \forall x_2 \in E_2 \\ \Phi_2(z_2, \varphi) \in E'_1, & \Phi_2(z_2, \varphi)(x_1) = z_2(\Phi_1(\varphi, x_1)); & \forall x_1 \in E_1 \\ \Phi_3(z_1, z_2) \in X'', & \Phi_3(z_1, z_2)(\varphi) = z_1(\Phi_2(z_2, \varphi)); & \forall \varphi \in X' \end{array}$$

La aplicación bilineal deseada es $\overline{\Phi} = \Phi_3$.

Podríamos haber definido Φ_1, en forma análoga a lo hecho, con dominio $X' \times E_2$ e imagen en E'_1. En general las extensiones obtenidas dependen del orden de extensión de las variables que se haya elegido. Para una aplicación n-lineal las posibles distintas extensiones son $n!$.

Proposición 1.18 *Sea $A \in L_s({}^n E; X)$, su extensión Aron-Berner $\overline{A}$, verifica las siguientes propiedades.*

1. *$\overline{A}$ es w^*-w^*-continua en la última variable que se extiende.*

2. *Los elementos de E conmutan con los de E''.*

   Es decir, $\overline{A}(x, z_2, \ldots, z_n) = \overline{A}(z_2, x, \ldots, z_n) = \cdots = \overline{A}(z_2, \ldots, z_n, x)$ para todo $x \in E$, y todo $z_2, \ldots, z_n \in E''$.

3. *La extensión preserva normas, es decir $\|\overline{A}\| = \|A\|$ y $\|\overline{P}\| = \|P\|$.*

La propiedad 2 puede expresarse diciendo $\overline{z} \circ \overline{x}(A) = \overline{x} \circ \overline{z}(A)$, para todo $x \in E$, todo $z \in E''$ y toda función k-lineal simétrica A sobre E.

La propiedad 3, caso polinomial, se debe a A. Davie y T. Gamelin, ver [DG].

En su trabajo [Z_1], I. Zalduendo, dio una caracterización de cuando un polinomio sobre E'', a valores escalares, es la extensión Aron-Berner de un polinomio sobre E. El resultado que mencionamos a continuación es una generalización para polinomios a valores vectoriales (ver [C]).

Proposición 1.19 *Sea $Q \in P(^nE''; X'')$ tal que $Q|_E = P \in P(^nE; X)$. Entonces Q es la extensión Aron-Berner de P si y solo si se verifican*

(i) Para todo $x \in E$, $DQ(x) : E'' \to X''$ es w^*-w^*-continua.

(ii) Para todo $z \in E''$, y $(x_\alpha)_\alpha \subset E$ tal que $x_\alpha \overset{w^*}{\to} z$, $DQ(z)(x_\alpha) \overset{w^*}{\to} DQ(z)(z)$ en X''.

R. Arens [Ar] (ver también A. Ülger, [U]) fue uno de los primeros en observar la relación existente entre esta forma de extender formas bilineales de $E_1 \times E_2$ a $E_1'' \times E_2''$ y propiedades asociadas al operador lineal natural que estas formas definen de E_i en E_j'. Más específicamente, una forma bilineal continua Φ de $E_1 \times E_2$ tiene una extensión a $E_1'' \times E_2''$ separadamente w^*-continua si y solo si ambos operadores asociados $T_{\Phi,1}; T_{\Phi,2}$ son débilmente compactos. Esta propiedad se conoce como Arens-regularidad de funciones multilineales. Para formas bilineales simétricas se tiene:

Proposición 1.20 *Sea $A \in L_s(^2E)$. Son equivalentes*

(i) $\overline{A}$ es separadamente w^*-continua.

(ii) $\overline{A}$ es simétrica.

(iii) $T_A : E \to E'$ es débil-compacto.

Definición 1.21 *Un espacio de Banach E se dice* **Arens-regular**, *si todos los operadores lineales $E \to E'$ son débil-compactos. El espacio se dice* **simétricamente regular** *si lo son todos los operadores lineales y simétricos (ver [AGGM], [GI], [P]).*
($T : E \to E'$ es simétrico si $T(x)(y) = T(y)(x)$.)

Es claro que todo espacio reflexivo es Arens-regular, por tanto todo espacio ℓ_p, L_p con $1 < p < \infty$ y todo Hilbert lo es. También hay ejemplos de espacios de Banach no reflexivos como c_0 (ver [Ar]). Todo espacio $C(K)$ con K compacto es simétricamente Arens-regular. También el espacio de James T'_J modelado sobre el espacio original de Tsirelson T' (ver [AD]). Como ejemplo de espacio no regular tenemos el ejemplo típico ℓ_1, (ver [ACG$_1$]).

Proposición 1.22 *Sea E un espacio de Banach simétricamente regular. Sea $A \in L_s(^nE)$. Entonces todas las extensiones Aron-Berner de A coinciden y por tanto $\overline{A}$ es simétrica.*

Capítulo 2

K-Acotación

Para E definimos la clase $P_K(^nE; X)$ de polinomios K-acotados n-homogéneos, donde K es un subconjunto acotado de E'. Investigamos propiedades sobre K que relacionen el espacio $P_K(^nE; X)$ con subespacios usuales de $P(^nE; X)$. Probamos que polinomios K-acotados son aproximables cuando K es un conjunto compacto donde la identidad puede ser uniformemente aproximada por operadores de rango finito. Lo mismo es cierto cuando K está contenido en la cápsula convexa equilibrada de una sucesión básica débil-nula de E'. Más aún, en este caso probamos que todo polinomio K-acotado es extensible a cualquier otro espacio que contenga a E.

2.1 La subclase de funciones K-acotadas.

Si E es un espacio de Banach y K es un subconjunto acotado de su espacio dual, diremos que un polinomio n-homogéneo P sobre E es K-acotado si existe una constante positiva C tal que la desigualdad $||P(x)|| \leq C \sup\{|\gamma(x)|^N : \gamma \in K\}$ vale para todo $x \in E$. Notar que la continuidad es equivalente a la $B_{E'}$-acotación. También (ver Proposición 3.2) se tiene que los polinomios de tipo finito corresponden a K-acotados con K conjunto finito.

Un resultado de E. Toma [T] (ver también [ALRR]) establece que un polinomio homogéneo es w-continuo (sobre acotados) si y solo si es K-acotado para algún subconjunto compacto K.

Nuestro interés en polinomios K-acotados estuvo originalmente motivado por este hecho.

Como ya mencionamos la clausura del espacio de polinomios de tipo finito es el espacio de polinomios 'aproximables' que a su vez es un subespacio del espacio de polinomios que son débil-continuos (sobre acotados). Es por esto que tratamos de clarificar cual es la relación entre 'aproximables' y 'K-acotados' (con K un conjunto entre 'finito' y 'compacto'). Obtuvimos condiciones suficientes sobre la aproximabilidad de un polinomio que naturalmente nos llevaron a considerar el problema de extendibilidad de polinomios K-acotados para diferentes tipos de subconjuntos K de E'. Notar que todos los polinomios de tipo finito (y aún los polinomios integrales [CZ]) son extensibles, pero esto no se tiene para polinomios aproximables. Por ejemplo el polinomio escalar sobre ℓ_2 definido por $P(x) = \sum_{k\geq 1} x_k^2$ de ser extensible tendría que poder extenderse a $C[0,1]$ donde todos los polinomios resultan *wsc* por tener $C[0,1]$ propiedad de Dunford-Pettis. Entonces su restricción a ℓ_2, que coincide con P, sería *wsc* pero no lo es.

Si K un subconjunto acotado de E' definimos para $x \in E$,

$$\|x\|_K = \sup_{\gamma\in K} |\gamma(x)|$$

que resulta una seminorma continua sobre E.

Definición 2.1 *Decimos que un polinomio P, n-homogéneo es K-**acotado** si existe una constante positiva C tal que*

$$\|P(x)\| \leq C\,\|x\|_K^n \tag{2.1}$$

para todo x en E. La menor constante C que verifica (2.1) *será notada $\|P\|_K$.*

Como $\|\cdot\|_K$ es una seminorma continua sobre E, todo polinomio K-acotado es continuo. El espacio de polinomios n-homogéneos K-acotados será denotado por $P_K(^nE;X)$. Sobre $P_K(^nE;X)$, $\|\cdot\|_K$ es una norma y $(P_K(^nE;X), \|\cdot\|_K)$ es un espacio de Banach.

Para $K_i \subseteq E_i'$ subconjuntos acotados diremos que una forma n-lineal $\Phi : E_1\times\cdots\times E_n \to X$ es $K_1\times\cdots\times K_n$-acotada si existe una constante positiva C tal que

$$\|\Phi(x_1,\ldots,x_n)\| \leq C\,\|x_1\|_{K_1}\cdots\|x_n\|_{K_n} \tag{2.2}$$

para todo $x_i, \in E_i,\ i=1,\ldots,n$ y $\|\Phi\|_K$ será la menor de las constantes C verificando (2.2); donde por K entenderemos $K_1\times\cdots\times K_n$.

Por Observación 2.3 una aplicación multilineal $\Phi \in L(^nE;X)$ que es $K_1 \times \cdots \times K_n$-acotada resultará $K \times \cdots \times K$-acotada al considerar $K = \cup K_i$. Así cuando $E_1 = \cdots = E_n = E$, hablaremos simplemente de funciones multilineales K-acotadas. Notaremos respectivamente $L_{K_1\times\cdots\times K_n}(^nE_1 \times \cdots \times E_n;X)$ y $L_K(^nE;X)$ a estos espacios.

Claramente, toda $\Phi \in L(^nE;X)$ K-acotada es continua. De la fórmula de polarización, obtenemos las desigualdades análogas a (1.1)

$$\|P\|_K \leq \|A\|_K \leq \frac{n^n}{n!}\|P\|_K$$

donde A es la función multilineal simétrica asociada a P.

En consecuencia hay una correspondencia uno a uno entre polinomios n-homogéneos K-acotados y funciones n-lineales simétricas K-acotadas.

2.2 Propiedades Elementales

Observación 2.2 Si $\Phi \in L_{K_1\times\cdots\times K_n}(^nE_1 \times \cdots \times E_n;X)$ entonces todo operador $T_{\Phi,i}$ asociado a Φ es K_i-acotado y toma valores en $L_{K_1\times\cdots\times(i)\times\cdots K_n}(^{n-1}E_1 \times \cdots \times (i) \times \cdots E_n;X)$. Esto es consecuencia inmediata de la definición de $T_{\Phi,i}$ y la desigualdad (2.2).

Observación 2.3 Como $K \subset L \subset E'$ implica que $\|x\|_K \leq \|x\|_L$ para todo $x \in E$, entonces todo polinomio P, K-acotado resulta L-acotado y además

$$\|P\|_L \leq \|P\|_K.$$

También, si $K \subset E'$ y $\widehat{K} = \overline{\Gamma(K)}$ es su cápsula convexa equilibrada y cerrada entonces $\|x\|_K = \|x\|_{\widehat{K}}$ para todo $x \in E$. En efecto, sea $\gamma_0 \in \Gamma(K)$, pongamos $\gamma_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i$, donde $\gamma_i \in K$, $\alpha_i \in I\!K$ para $i = 1,\ldots,n$ y $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1$. Así, para todo $x \in E$, tenemos

$$|\gamma_0(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\gamma_i(x)\right| \leq \sup_{j=1,\ldots,n} |\gamma_j(x)| \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \sup_{\gamma\in K} |\gamma(x)| = \|x\|_K$$

y

$$\|x\|_{\widehat{K}} = \sup_{\gamma\in\widehat{K}} |\gamma(x)| = \sup_{\gamma\in\Gamma(K)} |\gamma(x)| \leq \|x\|_K.$$

Esto junto con el hecho $K \subset \widehat{K}$, nos da $\|x\|_K = \|x\|_{\widehat{K}}$. Por lo tanto, $P_K(^nE; X) = P_{\widehat{K}}(^nE)$ con $\|P\|_K = \|P\|_{\widehat{K}}$.

Los mismos resultados se tienen para $\Phi \in L_{K_1 \times \cdots \times K_n}(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$ tanto si se considera $K_i \subseteq L_i \subseteq E_i'$ como si se toma $\widehat{K} = \widehat{K_1} \times \cdots \times \widehat{K_n}$.

Observación 2.4 Sea $\Phi \in L_{K_1 \times \cdots \times K_n}(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$ y sean $x_i,\ y_i \in E_i$ tales que $\|x_i - y_i\|_{K_i} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$; entonces $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(y_1, \ldots, y_n)$.

En efecto, el resultado se sigue de la desigualdad:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x_1, \ldots, x_n) - \Phi(y_1, \ldots, y_n)\| &\leq \|\Phi(x_1, \ldots, x_n) - \Phi(y_1, x_2, \ldots, x_n)\| \\
&\quad + \|\Phi(y_1, x_2, \ldots, x_n) - \Phi(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)\| \\
&\quad + \cdots + \|\Phi(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) - \Phi(y_1, \ldots, y_n)\| \\
&\leq \|\Phi\|_K \, \|x_1 - y_1\|_{K_1} \, \|x_2\|_{K_2} \cdots \|x_n\|_{K_n} \\
&\quad + \|\Phi\|_K \, \|x_2 - y_2\|_{K_2} \, \|y_1\|_{K_1} \, \|x_3\|_{K_3} \cdots \|x_n\|_{K_n} \\
&\quad + \cdots + \|\Phi\|_K \, \|x_n - y_n\|_{K_n} \, \|y_1\|_{K_1} \cdots \|y_{n-1}\|_{K_{n-1}}.
\end{aligned}$$

En el caso polinomial, si A es la forma n-lineal simétrica asociada a P, para $x, y \in E$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\|P(x) - P(y)\| &= \|A(x, \ldots, x) - A(y, \ldots, y)\| \\
&\leq n \, \|A\|_K \, \|x - y\|_K \, \max\{\|x\|_K, \|y\|_K\}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Con lo cual $P(x) = P(y)$ si $P \in P_K(^nE; X)$ y $\|x - y\|_K = 0$.

Terminaremos esta sección de propiedades básicas mostrando una relación entre la clase de funciones multilineales o polinomios K-acotados (es decir continuos para la seminorma $\|.\|_K$) y un espacio de funciones multilineales o polinomios $\|.\|$-continuos sobre un Banach, para cada K-fijo.

Considerando la seminorma continua $\|\cdot\|_K$ sobre E, se tiene que $^\circ K = \{x \in E : \ \|x\|_K = 0\}$ es un subespacio cerrado de E. Ahora, sobre $E/^\circ K$, definimos la siguiente norma

$$|||\Pi(x)||| = \|x\|_K$$

donde $\Pi : E \to E/^\circ K$ es la aplicación al cociente. La completación de $E/^\circ K$, $(E_K, |||\cdot|||)$ resulta un espacio de Banach. En caso de trabajar con diferentes espacios de Banach E_i pondremos por E_{K_i} al espacio que resulta de completar $E_i/^\circ K_i$.

Lema 2.5 *Sean K_i conjuntos acotados de E_i', $i = 1, \ldots, n$. Entonces los espacios $(L_{K_1\times\cdots\times K_n}(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X), \|\cdot\|_K)$ y $(L(^nE_{K_1} \times \cdots \times E_{K_n}; X), \|\cdot\|)$ son isométricamente isomorfos.*

Dem. Para $\Phi \in L_{K_1\times\cdots\times K_n}(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$ definimos Ψ de $E_1/^\circ K_1 \times \cdots \times E_n/^\circ K_n$ en X,

$$\Psi(\Pi_1(x_1), \ldots, \Pi_n(x_n)) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{para todo } x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n;$$

donde $\Pi_i : E_i \to E_i/^\circ K_i$ es la respectiva aplicación al cociente. La buena definición de Ψ es consecuencia de la Observación 2.4. Además, Ψ es una forma n-lineal y

$$\begin{aligned}
\|\Psi\| &= \sup\{\|\Psi(y_1, \ldots, y_n)\| : \ y_i \in E_i/^\circ K_i, |||y_i||| = 1, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n\} \\
&= \sup\{\|\Psi(\Pi_1(x_1), \ldots, \Pi_n(x_n))\| : \ x_i \in E_i, |||\Pi_i(x_i)||| = 1\} \\
&= \sup\{\|\Phi(x_1, \ldots, x_n)\| : \ x_i \in E_i, \|x_i\|_{K_i} = 1\} \\
&= \|\Phi\|_K.
\end{aligned}$$

Luego Φ es continua y puede extenderse, coordenada a coordenada, en forma continua a una forma n-lineal sobre $E_{K_1} \times \cdots \times E_{K_n}$ con la misma norma. Seguiremos notando Φ a esta extensión.

Recíprocamente, sea $\Psi \in L(^nE_{K_1} \times \cdots \times E_{K_n}; X)$. Es claro que definiendo, $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Psi(\Pi_1(x_1), \ldots, \Pi_n(x_n))$ se tiene una forma n-lineal sobre $E_1 \times \cdots \times E_n$ a valores en X que resulta $K_1 \times \cdots \times K_n$-acotada con $\|\Phi\|_K = \|\Psi\|$. ■

Corolario 2.6 *Sea K un conjunto acotado de E'. Entonces $(P_K(^nE; X), \|\cdot\|_K)$ y $(P(^nE_K; X), \|\cdot\|)$ son espacios isométricamente isomorfos.*

En este caso dado $P \in P_K(^nE; X)$ debe definirse el polinomio $Q : E/^\circ K \to X$, $Q \circ \Pi = P$, con $\Pi : E \to E/^\circ K$ la proyección al cociente. La extensión continua de Q a E_K resulta un polinomio de $P(^nE_K; X)$.

2.3 Extensión Aron-Berner de polinomios K-acotados.

Dedicaremos esta sección a estudiar la extensión Aron-Berner de polinomios K-acotados. Es sabido, en el caso escalar, que esta extensión preserva normas [DG]. Además, en [AG, corollary 8] R. Aron y P. Galindo probaron que la extensión Aron-Berner de una forma n-lineal $K_1\times\cdots\times K_n$-acotada es a su vez otra forma $K_1\times\cdots\times K_n$-acotada, cuando los conjuntos K_i son débilmente compactos en E_i' respectivamente. Usando la construcción del lema anterior, daremos otra prueba, para polinomios, de este hecho generalizando el resultado a valores vectoriales. Más aún, mostraremos que el morfismo de Aron-Berner es una $\|\cdot\|_K$-isometría. Cuando las aplicaciones tengan por dominio E'' consideraremos $K\subset E'$ como subconjunto de E'''.

Proposición 2.7 *Sea K un subconjunto de E' relativamente débil-compacto. Entonces el morfismo de extensión de Aron-Berner es una isometría entre los espacios $(P_K({}^nE;X),\ \|\cdot\|_K)$ y $(P_K({}^nE'';X''),\ \|\cdot\|_K)$ cualquiera sea $n\in I\!N$.*

Dem. Para $P\in P_K({}^nE;X)$, sea $Q\in P({}^nE_K;X)$ como en Corolario 2.6, sea $\overline{Q}\in P({}^nE_K'';X'')$ la extensión Aron-Berner de Q. Pongamos $R=\overline{Q}\circ\Pi'':E''\to X''$ donde Π'' es la bitraspuesta de Π. Supongamos que hemos mostrado que $R=\overline{P}$, veamos que $\overline{P}$ es K-acotado con $\|\overline{P}\|_K=\|P\|_K$. Sea $x''\in E''$,

$$\begin{aligned}\|\overline{P}(x'')\| &= \|\overline{Q}(\Pi''(x''))\|\le\|\overline{Q}\|\ |||\Pi''(x'')|||^n=\|P\|_K\ |||\Pi''(x'')|||^n\\ &= \|P\|_K\sup_{\beta\in B_{E_K'}}|\Pi''(x'')(\beta)|^n=\|P\|_K\sup_{\beta\in B_{E_K'}}|x''(\Pi'(\beta))|^n \end{aligned}\tag{2.3}$$

Afirmamos que $\Pi'(B_{E_K'})$ está contenido en $\overline{\Gamma(K)}$, la cápsula convexa equilibrada cerrada de K. Para ver esto, pongamos $\beta\in B_{E_K'}$, entonces

$$|\Pi'(\beta)(x)|=|\beta(\Pi(x))|\le\|\beta\|\ |||\Pi(x)|||\le\|x\|_K=\sup_{\gamma\in K}|\gamma(x)|\qquad\text{para todo } x\in E$$

Por el teorema de Hahn-Banach, $\Pi'(\beta)$ pertenece a la w^*-clausura de $\Gamma(K)$, $\overline{\Gamma(K)}^{w^*}$. Por ser K relativamente débil-compacto, $\overline{\Gamma(K)}$ resulta débil-compacto. Entonces, $\overline{\Gamma(K)}$ es w^*-compacto y se tiene que $\overline{\overline{\Gamma(K)}}^{w^*} = \overline{\Gamma(K)}$. Por lo tanto, $\Pi'(B_{E'_K}) \subset \overline{\Gamma(K)}$. Volviendo a (2.3),

$$\|\overline{P}(x'')\| \leq \|P\|_K \sup_{\varphi \in \overline{\Gamma(K)}} |x''(\varphi)|^n = \|P\|_K \sup_{\varphi \in K} |x''(\varphi)|^n = \|P\|_K \, \|x''\|_K^n$$

Así, $\overline{P}$ es K-acotado y $\|\overline{P}\|_K = \|P\|_K$.

Solo resta mostrar que $R = \overline{P}$. Para esto veremos que se verifican ambas condiciones de la Proposición 1.19.

Es claro que $R(x) = \overline{Q}(\Pi''(x)) = \overline{Q}(\Pi(x)) = P(x)$. Sea B la función multilineal simétrica que define a Q. Así, $\overline{Q}(z) = \overline{B}(z, \ldots, z)$ y

$$\begin{aligned} D(\overline{Q} \circ \Pi'')(x) &= n\, \overline{B}(\Pi''(x), \ldots, \Pi''(x),\ .\ ) \circ \Pi'' \\ &= n\, \overline{B}(\Pi(x), \ldots, \Pi(x),\ .\ ) \circ \Pi''. \end{aligned}$$

Por ser Π'' una aplicación w^*-w^* continua, para toda red (z_α) que converge a z en E'' con la topología $\sigma(E'', E')$ tenemos $\Pi''(z_\alpha) \xrightarrow{w^*} \Pi''(z)$ en X'' y por tanto, para toda $\varphi \in X'$ tenemos

$$\begin{aligned} D(\overline{Q} \circ \Pi'')(x)(z_\alpha)(\varphi) &= n\, \overline{B}(\Pi(x), \ldots, \Pi(x), \Pi''(z_\alpha))(\varphi) \\ &= n\, \overline{\varphi \circ B}(\Pi(x), \ldots, \Pi(x), \Pi''(z_\alpha)) \end{aligned}$$

Como la extensión Aron-Berner es w^*-continua en la primer variable y las variables del espacio conmutan con aquellas del bidual (Proposición 1.18) se tiene que $D(\overline{Q} \circ \Pi'')(x)(z_\alpha)(\varphi)$ converge a $n\, \overline{\varphi \circ B}(\Pi(x), \ldots, \Pi(x), \Pi''(z)) = D(\overline{Q} \circ \Pi'')(x)(z)(\varphi)$. Lo que muestra que se cumple la primera condición.

Para la segunda condición, sean $z \in E''$, $(x_\alpha) \subseteq E$ tales que $x_\alpha \xrightarrow{w^*} z$, luego $\Pi''(x_\alpha) = \Pi(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} \Pi''(z)$. Ahora, para toda $\varphi \in X'$ tenemos

$$\begin{aligned} D(\overline{Q} \circ \Pi'')(z)(x_\alpha)(\varphi) &= n\, \overline{\varphi \circ B}(\Pi''(z), \ldots, \Pi''(z), \Pi''(x_\alpha)) \\ &= n\, \overline{\varphi \circ B}(\Pi(x_\alpha), \Pi''(z), \ldots, \Pi''(z)) \end{aligned}$$

Usando nuevamente las propiedades mencionadas en Proposición 1.18 vemos que $D(\overline{Q} \circ \Pi'')(z)(x_\alpha)(\varphi)$ converge a $n\, \overline{\varphi \circ B}(\Pi''(z), \Pi''(z), \ldots, \Pi''(z)) = D(\overline{Q} \circ \Pi'')(z)(z)(\varphi)$, lo que termina la prueba. ∎

Este resultado junto con el resultado de [CD] que caracteriza los polinomios definidos sobre un dual w^*-continuos sobre acotados como aquellos que son K-acotados para K un compacto del predual, nos da otra prueba del hecho: *La extensión Aron-Berner de un polinomio w-continuo es w^*-continuo.*

2.4 Funciones Multilineales y Polinomios K-acotados, según K.

Empezaremos con el estudio de funciones multilineales $K_1 \times \cdots \times K_n$-acotadas, (resp. polinomios K-acotados) considerando subconjuntos finito dimensionales de E' que estarán relacionados con funciones multilineales (resp. polinomios) de tipo finito. Luego nos abocaremos al estudio de polinomios K-acotados correspondientes a diferentes clases de conjuntos K tratando de dar algunas respuestas a la relación entre K-acotación y aproximabilidad de polinomios.

2.4.1 Funciones Multilineales y Polinomios de tipo finito

Nuestro primer resultado será estipulado para formas n-lineales, ya que nos permitirá llegar, con teoría de K-acotación, a un resultado de R. Aron y J. B. Prolla. El subespacio generado por combinaciones lineales finitas de elementos de K se notará por gen(K).

Proposición 2.8 *Sean $K_i \subset E_i'$ conjuntos acotados. Entonces si los subespacios gen(K_i) son finito dimensionales, para todo $i = 1, \ldots, n$; toda forma n-lineal $K_1 \times \cdots \times K_n$-acotada de $L(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$ es de tipo finito.*

Dem. Procederemos por inducción en n. Sea $\Phi : E \to Y$ operador lineal K-acotado con E, Y espacios de Banach cualesquiera, $K \subseteq E'$ un conjunto acotado tal que gen(K) es de dimensión finita. Sea $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subset E'$ una base de gen(K) tal que $K \subset \Gamma(\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\})$. Si $u : E \to I\!K^m$ se define por $u(x) = (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_m(x))$, entonces u es una aplicación lineal continua que satisface $\|u(x)\|_\infty \geq \|x\|_K$. Definimos $\Psi : \mathrm{Im}(u) \to Y$; $\Psi(u(x)) = \Phi(x)$, cuya buena definición esta dada por la Observación 2.4 ya que, gracias a la desigualdad de normas, $u(x) = u(y)$ implica $\|x - y\|_K = 0$; con lo cual $\Phi(x) = \Phi(y)$.

La función Ψ está definida en $\mathrm{Im}(u)$, subespacio cerrado de $I\!K^m$. Consideremos $\widehat{\Psi} : I\!K^m \to Y$; $\widehat{\Psi} = \Psi \circ \Pi$ con Π la proyección de $I\!K^m$ sobre $\mathrm{Im}(u)$. Ahora, si $(e_j)_{j=1}^m$ es la base canónica de

$I\!K^m$ y $\widehat{\Psi}(e_j) = y_j$ podemos escribir

$$\widehat{\Psi}(\alpha_1, \dots \alpha_m) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, y_j.$$

Así, $\Phi(x) = \Psi(u(x)) = \widehat{\Psi}(u(x)) = \widehat{\Psi}(\gamma_1(x), \dots, \gamma_m(x)) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(x) \, y_j$. En particular, Φ es una aplicación de tipo finito.

Supongamos ahora que toda función $(n-1)$-lineal de $E_2 \times \cdots \times E_n$ en X que es $K_2 \times \cdots \times K_n$-acotada con gen$(K_i)$ de dimensión finita para todo $i = 2, \dots, n$; es de tipo finito. Consideremos $T_{\Phi,1}$ que por Observación 2.2 resulta $T_{\Phi,1} : E_1 \to L_{K_2 \times \cdots \times K_n}({}^{n-1}E_2 \times \cdots \times E_n; X)$ un operador lineal K_1-acotado con gen(K_1) finito dimensional. Luego por el caso $n = 1$ se tiene que $T_{\Phi,1}$ es de tipo finito, es decir, existe $m \in I\!N$ tal que

$$T_{\Phi,1}(x) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(x) \, \Psi_j$$

donde $\Psi_j \in L_{K_2 \times \cdots \times K_n}({}^{n-1}E_2 \times \cdots \times E_n; X)$ y $\gamma_j \in E_1'$, para todo $j = 1, \dots, m$.

Ahora, por hipótesis inductiva, cada Ψ_j es de tipo finito y por lo tanto Φ lo es. ■

Para establecer un resultado recíproco necesitaremos asumir alguna condición adicional. Usaremos la identificación dada en Lema 2.5. En estos términos acabamos de probar que si la dimensión de los subespacios gen(K_i) es finita para todo $i = 1, \dots, n$; entonces toda función $\Psi \in L({}^nE_{K_1} \times \cdots \times E_{K_n}; X)$ es de tipo finito. Para proseguir necesitaremos la siguiente

Observación 2.9 Si $K \subset E'$ es un conjunto acotado entonces, dim(gen(K)) es finita si y solo si dim(E_K) es finita.

En efecto, supongamos de dim$(E_K)= m$. Entonces $E/{}^\circ K$ es cerrado y codim$({}^\circ K)= m$. Digamos que $E = [e_1, \dots, e_m] \oplus {}^\circ K$ y definamos $\Theta : \text{gen}(K) \to I\!K^m; \varphi \mapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m))$. Θ es una aplicación lineal, veamos que es inyectiva. Sea $\varphi \in \ker(\Theta)$, se tiene que $\varphi(e_i) = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$. Como todo $x \in E$ admite una escritura de la forma $x = z + w$ con $z \in [e_1, \dots, e_m]$ y $w \in {}^\circ K$; se tiene $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in E$, para todo $\varphi \in$ gen(K). En consecuencia dim(gen(K))$\leq m$. La otra implicación es inmediata.

Lema 2.10 *Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios de Banach tales que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $j \neq i$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ con $E_i = E_j$. Entonces $L_f(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$ es cerrado en $L(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$, cualquiera sea X espacio de Banach, si y solo si E_i es de dimensión finita, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Dem. Si E_i es de dimensión finita, para todo $i = 1, \ldots, n$; entonces toda función n-lineal sobre $E_1 \times \cdots \times E_n$ es de tipo finito. Para la recíproca supongamos que existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ con $\dim(E_i) = \infty$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $i = 1$ y que $E_2 = E_1$. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E_1$ una sucesión básica normalizada de constante M, y sea $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E'_1$ una sucesión ortogonal a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, con lo cual $\|x'_k\| \leq 2M$, (ver [LT]).

Sea $v \in X$, $\|v\| = 1$ y sean $\varphi_j \in E'_j$, $\|\varphi_j\| = 1$, para todo $j = 3, \ldots, n$. Consideremos $v_k = \frac{v}{2^k}$ y definamos $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x'_k(x_1)x'_k(x_2)\varphi_3(x_3)\ldots\varphi_n(x_n)\, v_k$. Como

$$\|\sum_{k\geq N} x'_k\, x'_k\, \varphi_3 \ldots \varphi_n\, v_k\| \leq \sum_{k\geq N} \|x'_k\|^2\, \|v_k\| \leq (2M)^2 \sum_{k\geq N} \frac{1}{2^k} \xrightarrow{N} 0,$$

se tiene que Φ está en la clausura de $L_f(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$. Afirmamos que Φ no es de tipo finito puesto que $T_{\Phi,1}$ no tiene rango finito. En efecto, veamos que $\{T_{\Phi,1}(x_j) : j \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

$T_{\Phi,1}(x_j) = x'_j\, \varphi_3 \ldots \varphi_n\, v_j \in L(^{n-1}E_2 \times \cdots \times E_n; X)$. Sean $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}$ un subconjunto finito y $(a_l)_{l\in\mathcal{F}}$; escalares tales que $0 = \sum_{l\in\mathcal{F}} a_l T_{\Phi,1}(x_l)$. Pongamos $y_2 = x_k$ y elijamos $y_i \in E_i$ tal que $\varphi_i(y_i) = 1$, para todo $i = 3, \ldots, n$. Variando k sobre $\mathcal{F}$ se tiene que

$$0 = \sum_{l\in\mathcal{F}} a_l T_{\Phi,1}(x_l)(y_2, \ldots, y_n) = a_k\, v_k; \qquad \text{para todo } k \in \mathcal{F}.$$

Por tanto $a_k = 0$ para todo $k \in \mathcal{F}$ y $\dim(\mathrm{R}(\mathrm{T}_{\Phi,1})) = \infty$. ■

En lo que sigue pondremos por E_{K_i} al espacio que resulta de completar $E_i/{}^\circ K_i$.

Proposición 2.11 *Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios de Banach y sean $K_i \subset E'_i$ conjuntos acotados tales que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $j \neq i$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ con $E_{K_i} = E_{K_j}$. Entonces si toda forma n-lineal de $L(^nE_1 \times \cdots \times E_n; X)$ $K_1 \times \cdots \times K_n$-acotada es de tipo finito; los subespacios gen(K_i) son finito-dimensionales, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Dem. Por Lema 2.5 consideremos $\Psi \in L(^n E_{K_1} \times \cdots \times E_{K_n}; X)$ una forma n-lineal cualquiera. Probaremos que Ψ es de tipo finito con lo cual por Lema 2.10 cada E_{K_i} será finito-dimensional y el resultado se sigue de Observación 2.9.

Sea $\Phi \in L(^n E_1 \times \cdots \times E_n; X)$ $K_1 \times \cdots \times K_n$-acotada la forma n-lineal correspondiente a Ψ. Por hipótesis Φ es de tipo finito. Sea $T_{\Psi,i} : E_{K_i} \to L(^{n-1} E_{K_1} \times \cdots \times (i) \times \cdots \times E_{K_n}; X)$. Si $\Pi_i : E_i \to E_{K_i}$ es la proyección natural, se tiene que $T_{\Psi,i} \circ \Pi_i = \theta_i \circ T_{\Phi,i}$ donde $T_{\Phi,i} : E_i \to L(^{n-1} E_1 \times \cdots \times (i) \times \cdots \times E_n)$ es el operador asociado a Φ y θ_i es el isomorfismo entre $L_{K_1 \times \cdots \times (i) \times \cdots \times}(^{n-1} E_1 \times \cdots \times (i) \times \cdots \times E_n; X)$ y $L(^n E_{K_1} \times \cdots \times (i) \times \cdots \times E_{K_n}; X)$.

Luego por Proposición 1.8, $T_{\Phi,i}$ tiene rango finito y por tanto $T_{\Psi,i}$ es de rango finito, para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces Ψ es de tipo finito. ∎

Así tenemos como corolarios,

Corolario 2.12 *Sea $K \subset E'$ un conjunto acotado. Entonces, si $n > 1$ toda función n-lineal K-acotada es de tipo finito si y solo si el subespacio generado por K es de dimensión finita.*

Corolario 2.13 *Sea $K \subset E'$ un conjunto acotado. Entonces, si $n > 1$ todo polinomio n-homogéneo K-acotado es de tipo finito si y solo si el subespacio generado por K es de dimensión finita.*

Observación 2.14 Como consecuencia de la demostración de la Proposición 2.11, tenemos que toda función multilineal perteneciente a $L_K(^n E; X)$ y todo polinomio de K-acotado de tipo finito puede escribirse en términos de funcionales K-acotadas.

En efecto, para el caso multilineal se escribió $\Phi = \Psi \circ \Pi$ donde $\Pi : E \to E_K$ es la proyección al cociente. Probamos que Ψ es de tipo finito. Para obtener la funcionales deseadas, basta componer con la proyección cada funcional de la escritura de Ψ. La continuidad sobre E_K hace K-acotada a la composición.

Observación 2.15 La condición de tener al menos dos copias de cada espacio pedida en el Lema 2.10 es necesaria para obtener el resultado.

En efecto, sea E un espacio de Banach de dimensión finita y sea F otro de dimensión infinita. Entonces toda forma bilineal de $E \times F$ a valores escalares es de tipo finito. Esto es claro ya que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E y $\{e_1', \dots, e_n'\}$ es su base dual; para toda bilineal Φ, todo $x = \sum_{j=1}^n \alpha_i e_i \in E$ y todo $y \in F$ se tiene

$$\Phi(x, y) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi(e_j, y) = \sum_{j=1}^n e_j'(x) \Phi_{e_j}(y).$$

Para finalizar el estudio relacionado con funciones multilineales y polinomios de tipo finito queremos mencionar que todo operador de rango finito es claramente K-acotado para algún K subconjunto finito del dual. Usaremos este hecho sin aclararlo explícitamente.

2.4.2 Funciones Multilineales y Polinomios aproximables

R. Aron y J. B. Prolla probaron en [AP] que el espacio de polinomios débilmente continuos sobre acotados de E a valores en X coincide con el espacio de polinomios aproximables cuando E' tiene propiedad de aproximación. A continuación daremos una demostración de este hecho para formas multilineales (a valores escalares) usando técnicas de K-acotación.

Proposición 2.16 *Sean $E_1, \dots, E_n$ espacios de Banach tales que E_i' tiene propiedad de aproximación para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces toda función multilineal w-continua de $L(^n E_1 \times \cdots \times E_n)$ es aproximable por funciones multilineales de tipo finito.*

Dem. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\Phi \in L_w(^n E_1 \times \cdots \times E_n)$. Existen $K_i \subseteq E_i'$, $i = 1, \dots, n$ subconjuntos compactos de tales Φ es $K_1 \times \cdots \times K_n$-acotada (ver [AG], Corollary 3.)

Consideremos $T_1 = T_{\Phi,1}$ el operador asociado a Φ. T_1 es compacto y por Observación 2.2 resulta K_1-acotado con imagen en $L_{K_2 \times \cdots \times K_n}(^{n-1} E_2 \times \cdots \times E_n)$. Como E_1' tiene propiedad de aproximación, existe $S_1 : E_1 \to L_{K_2 \times \cdots \times K_n}(^{n-1} E_2 \times \cdots \times E_n)$ un operador de rango finito tal que $\|S_1 - T_1\| < \frac{\varepsilon}{n}$. Sea $L_1 \subseteq E_1'$ un subconjunto finito para el cual S_1 es L_1-acotado.

Ahora, consideremos $\Phi_1 : E_1 \times \cdots \times E_n \to I\!K$, la función multilineal que verifica $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n) = S_1(x_1)(x_2, \ldots, x_n)$. Como

$$\|\Phi_1(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \|S_1(x_1)\| \|x_2\|_{K_2} \cdots \|x_n\|_{K_n} \leq \|S_1\|_{L_1} \|x_1\|_{L_1} \|x_2\|_{K_2} \cdots \|x_n\|_{K_n}$$

Φ_1 es $L_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$-acotada y $\|\Phi - \Phi_1\| < \frac{\varepsilon}{n}$.

Haciendo lo mismo para Φ_1 obtenemos Φ_2 una forma n-lineal y $L_2 \subseteq E_2'$ un conjunto finito tales que Φ_2 es $L_1 \times L_2 \times K_3 \times \cdots \times K_n$-acotada y $\|\Phi_1 - \Phi_2\| < \frac{\varepsilon}{n}$. Así siguiendo en n pasos obtenemos Φ_n una forma $L_1 \times \cdots \times L_n$-acotada con $L_1, \ldots, L_n$ subconjuntos finitos tales que $\|\Phi_{k+1} - \Phi_k\| < \frac{\varepsilon}{n}$, para todo $k = 0, \ldots n-1$; considerando $\Phi_0 = \Phi$.

Así, Φ_n es de tipo finito gracias a la Proposición 2.8 y $\|\Phi - \Phi_n\| < \varepsilon$ ■

En lo que sigue trabajaremos con polinomios n-homogéneos a valores escalares. Consideramos la cadena de inclusiones

$$P_f(^nE) \subset P_a(^nE) \subset P_w(^nE) \subset P(^nE) \tag{2.4}$$

Como todo polinomio de tipo finito es K-acotado para algún conjunto finito K, tenemos

$$P_f(^nE) = \bigcup_{\substack{K \subset E' \\ K \text{finito}}} P_K(^nE).$$

Por otra parte, ya mencionamos que en [T, ALRR] se prueba que

$$P_w(^nE) = \bigcup_{\substack{K \subset E' \\ K \text{compacto}}} P_K(^nE)$$

y claramente para $K = B_{E'}$ se tiene

$$P(^nE) = P_{B_{E'}}(^nE).$$

Teniendo en cuenta las inclusiones dadas en (2.4), trataremos de dar $K \subset E'$ para los cuales los polinomios K-acotados sean aproximables.

Como los polinomios aproximables son w-continuos, empezamos considerando subconjuntos compactos K de E'. El hecho de que los polinomios w-continuos son aproximables cuando E' tiene propiedad de aproximación sugiere la siguiente proposición:

Proposición 2.17 *Sea $K \subset E'$ un conjunto compacto tal que la identidad $\mathrm{Id} : E' \to E'$ se aproxima uniformemente sobre K por operadores de rango finito. Entonces todo polinomio n-homogéneo K-acotado es aproximable.*

Dem. Sin pérdida de generalidad, supondremos $K \subset B_{E'}$. Sean $P \in P_K({}^nE)$, $dP \in P({}^{n-1}E; E')$ su diferencial y $Q \in P({}^nE_K)$ como en Corolario 2.6. Tenemos

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{dP} & E' \\ \Pi \downarrow & & \uparrow \Pi' \\ E_K & \xrightarrow{dQ} & E'_K \end{array}$$

Notar que

$$dP(B_E) = \Pi'(dQ(\Pi(B_E))) \subset \Pi'(dQ(B_{E_K})) \subset \|dQ\|\Pi'(B_{E'_K}) \subset \|dQ\|\overline{\Gamma(K)}$$

(esta última inclusión fue explicada en Proposición 2.7). Más aún, $K_1 = \|dQ\|\overline{\Gamma(K)}$ es un conjunto compacto de E' sobre el cual la identidad también se aproxima uniformemente por operadores de rango finito. Así, para cada $k \in I\!N$, existe un operador de rango finito $I_k : E' \to E'$ verificando

$$\|I_k(\gamma) - \gamma\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } \gamma \in K_1$$

entonces

$$\|I_k(dP(x)) - dP(x)\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{para todo } x \in B_E.$$

Definimos $P_k(x) = \frac{1}{n}I_k(dP(x))(x)$. Como $dP_k = I_k \circ dP$ y $T_{P_k}(x)(y) = \frac{1}{n}\left(dP_k(y)\right)(x)$ entonces T_{P_k} tiene rango finito lo que implica, por Corolario 1.9, que P_k es un polinomio de tipo finito. También tenemos

$$|P_k(x) - P(x)| = \left|\frac{1}{n}(I_k(dP(x))(x) - \frac{1}{n}dP(x)(x)\right| \leq \frac{1}{n}\frac{1}{k} \quad \text{para todo } x \in B_E.$$

Por tanto, P es aproximable. ■

Se tiene (ver, por ejemplo, [LT]) que un subconjunto K of E' es compacto si y solo si está contenido en la cápsula convexa equilibrada cerrada de una sucesión nula. Por Observación 2.3,

$$P_w(^nE) = \bigcup_{\substack{K \subset E' \\ K \text{compacto}}} P_K(^nE) = \bigcup_{\substack{K = \{\gamma_k\}_k \subset E' \\ \|\gamma_n\| \longrightarrow 0}} P_K(^nE)$$

Consideremos $K = \{\gamma_k\}_{k\in I\!N} \subset E'$ donde $\|\gamma_k\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Definimos el operador lineal $u : E \to c_0$,

$$u(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_k(x), \ldots) \tag{2.5}$$

que resulta compacto. Este hecho nos permitirá probar que todo polinomios K-acotado es aproximable, si asumimos alguna condición adicional sobre la imagen de u.

Proposición 2.18 *Sea $K = \{\gamma_k\}_{k\in I\!N} \subset E'$ donde $\|\gamma_k\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y pongamos u como en* (2.5)*. Si $\overline{\mathrm{Im}(u)}$ tiene propiedad de aproximación, entonces todo polinomio homogéneo K-acotado es aproximable.*

Dem. Sea $n \in I\!N$, y $P \in P_K(^nE)$. Definimos $Q : \mathrm{Im}(u) \to I\!K$; $Q(u(x)) = P(x)$, aplicación que está bien definida por Observación 2.4 y es un polinomio n-homogéneo, continuo con

$$\|Q\| = \sup\{|Q(u(x))| : \|u(x)\|_\infty \leq 1\} = \sup\{|P(x)| : \|x\|_K \leq 1\} = \|P\|_K$$

Extendemos Q a un polinomio n-homogéneo y continuo sobre $\overline{\mathrm{Im}(u)}$ con la misma norma, que seguiremos llamando Q. Así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{\mathrm{Im}(u)} \\ & \overset{u}{\nearrow} & \downarrow \mathrm{Q} \\ E & \overset{P}{\to} & I\!K \end{array}$$

Como $\overline{u(B_E)} \subset \overline{\mathrm{Im}(u)}$, u es compacta y $\overline{\mathrm{Im}(u)}$ tiene propiedad de aproximación, existen operadores de rango finito $T_k : \overline{\mathrm{Im}(u)} \to \overline{\mathrm{Im}(u)}$ tales que

$$\|T_k(u(x)) - u(x)\|_\infty < \frac{1}{k} \qquad \text{para todo } x \in B_E.$$

Hemos conseguido polinomios de tipo finito $\{P_k\}_{k\in I\!N} \subset P_f(^nE)$, dados por $P_k(x) = (Q \circ T_k \circ u)(x)$, que aproximan a P. En efecto,

$$|P(x) - P_k(x)| = |Q(u(x)) - Q(T_k(u(x)))| \leq M\|u(x) - T_k(u(x))\|_\infty \leq M\frac{1}{k}$$

para todo $x \in B_E$, donde la constante M puede elegirse independientemente de $x \in B_E$ y $k \in I\!N$ (ver Observación 2.4 caso polinomial) ∎

Como consecuencia de esta proposición deducimos el siguiente resultado que Grothendieck probó (ver [LT]) mientras estudiaba la existencia de espacios sin propiedad de aproximación:

Si existe un espacio de Banach sin propiedad de aproximación entonces existe un subespacio de c_0 sin propiedad de aproximación.

Para ver esto, sea X un espacio de Banach sin propiedad de aproximación. Procedemos como en [ACG$_2$]. Existe un espacio de Banach Z y un operador compacto $T : Z \to X$ que no puede aproximarse por operadores de rango finito. Si $Y = Z \oplus X'$, definimos $S : Y \to Y'$; $S(z, x') = (T'x', Tz)$, donde $z \in Z$, $x' \in X'$ y T' es la traspuesta de T. Así S es un operador compacto que no puede ser aproximado por operadores de rango finito. En efecto, la existencia de operadores de rango finito aproximando a S con dominio en Y a valores en Y' implicaría la existencia de operadores de rango finito de Z en X'' aproximando a T. Por ser T compacto sería posible construir operadores de rango finito de Z en X que aproximen a T (ver [LT, Lema 1.e.6]) y ésta es una contradicción. Ahora, por la compacidad de S, el polinomio 2-homogéneo $P \in P(^2Y)$, $P(y) = S(y)(y)$, es w-continuo [AHV] pero no aproximable. Por tanto, P es K-acotado, para algún $K = \{\gamma_k\}_{k\in I\!N} \subset Y'$, con $\|\gamma_k\| \to 0$. Definiendo u como en 2.5, en virtud de la Proposición 2.18 el subespacio $\overline{\mathrm{Im}(u)}$ de c_0 falla en tener propiedad de aproximación.

Observación 2.19 *De la demostración que acabamos de dar podemos deducir que, la existencia de un espacio de Banach sin propiedad de aproximación es equivalente a la existencia de un polinomio homogéneo w-continuo no-aproximable.*

Todo espacio de Hilbert tiene propiedad de aproximación. Pero en general no hay un método que nos permita establecer si un espacio de Banach tiene o no esta propiedad. En este contexto si consideramos $K = \{\gamma_k\}_{k\in I\!N} \subset E'$ con $\sum_{k=1}^{\infty} \|\gamma_k\|^2 < \infty$, podemos modificar la construcción (2.5) quedando $u : E \to \ell_2$, $u(x) = (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_k(x), \ldots)$ un operador también compacto. Definimos el polinomio $Q : \mathrm{Im}(u) \subset \ell_2 \to I\!\!K$; $Q(u(x)) = P(x)$. En este caso tenemos

$$|Q(u(x))| \leq \|P\|_K \|u(x)\|_\infty^n \leq \|P\|_K \|u(x)\|_2^n$$

Como $\overline{\mathrm{Im}(u)}$ es un espacio de Hilbert, podemos proceder como en Proposición 2.18 y concluir que todo polinomio K-acotado es aproximable. Más aún, por trabajar sobre un espacio de Hilbert podemos establecer un resultado de extensión. Tenemos:

Proposición 2.20 *Sea $K = \{\gamma_k\}_{k \in I\!\!N} \subset E'$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|\gamma_k\|^2 < \infty$. Entonces todo polinomio K-acotado $P \in P_K(^nE)$ es aproximable. Más aún, si F es un espacio de Banach que contiene a E, existe $\widetilde{P} \in P(^nF)$ una extensión de P.*

Dem. Probaremos la segunda afirmación puesto que la primera quedó explicada en el párrafo previo. Si $E \subset F$, para cada $k \in I\!\!N$, tenemos una extensión de γ_k, $\widetilde{\gamma}_k \in F'$, de igual norma. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \|\widetilde{\gamma}_k\|^2 < \infty$, el operador $\widetilde{u} : F \to \ell_2$, $\widetilde{u}(x) = (\widetilde{\gamma}_1(x), \ldots, \widetilde{\gamma}_k(x), \ldots)$ es una extensión de u. Sea $\widetilde{Q} : \overline{\mathrm{Im}(\widetilde{u})} \to I\!\!K$, $\widetilde{Q}(y) = Q(\Pi(y))$, donde Π es la proyección ortogonal sobre $\overline{\mathrm{Im}(u)}$.

Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\widetilde{u}} & \overline{\mathrm{Im}(\widetilde{u})} & & \\ & & & \overset{\widetilde{Q}}{\searrow} & \\ i \uparrow & & \downarrow \Pi & & \\ E & \xrightarrow{u} & \overline{\mathrm{Im}(u)} & \xrightarrow{Q} & I\!\!K \end{array}$$

Podemos definir $\widetilde{P} : F \to I\!\!K$, $\widetilde{P}(x) = \widetilde{Q}(\widetilde{u}(x))$. Así $\widetilde{P} \in P(^nF)$ y resulta una extensión de P. ■

La Proposición 2.20 establece que al considerar $K = \{\gamma_k\}_{k \in I\!\!N} \subset E'$ con $\sum_{k=1}^{\infty} \|\gamma_k\|^2 < \infty$, todo polinomio K-acotado es extensible (ver definición 1.16). Más aún, para cada $F \supset E$, existe un morfismo de extensión

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : P_K(^nE) & \longrightarrow & P(^nF) \\ P & \longmapsto & Q \circ \Pi \circ \widetilde{u} \end{array}$$

Ahora investigaremos aquellos subconjuntos acotados K de E' para los cuales todo polinomio K-acotado es extensible y si la extensión que resulta es $\widetilde{K}$-acotada, donde $\widetilde{K} = \{\widetilde{\gamma} : \gamma \in K\}$ y

$\widetilde{\gamma}$ es una extensión a F de γ que preserva la norma. Más aún, queremos establecer condiciones para la existencia de un morfismo de extensión. Este análisis se hará sumado al estudio del problema de aproximabilidad de polinomios K-acotados.

Notar que existen polinomios aproximables no-extensibles. Por ejemplo, $P \in P(^2\ell_2)$, dado por $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{k}$, es aproximable pero no nuclear, por lo tanto no puede ser extensible [KR, Proposition 8].

Es sabido que todo polinomio homogéneo sobre c_0 es aproximable. Más aún, si $Q \in P(^n c_0)$, existe una sucesión de escalares $\{a_{i_1,\ldots,i_n}\}_{(i_1,\ldots,i_n)\in D}$ tal que

$$Q = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in D} a_{i_1,\ldots,i_n}\, e'_{i_1} \ldots e'_{i_n} \tag{2.6}$$

donde $D = \{(i_1, \ldots, i_n) \in I\!N^n : i_1 \geq \ldots \geq i_n\}$ está ordenado por el *square ordering*, $\{e'_k\}_{k\in I\!N}$ es la base canónica de $c'_0 = \ell_1$, y la convergencia de la serie (2.6) es en la norma de $P(^n c_0)$ (ver [DZ]).

Para algunos conjuntos K, podremos factorizar polinomios homogéneos K-acotados sobre E por polinomios homogéneos sobre c_0. Esto nos permitirá 'levantar' la propiedad que tienen los polinomios sobre c_0 de ser aproximables a polinomios K-acotados sobre E. También nos permitirá obtener resultados de extensión, como lo hecho en Proposición 2.20.

Proposición 2.21 *Sea $\{\gamma_k\}_{k\in I\!N} \subset E'$ una sucesión básica tal que $\gamma_k \xrightarrow{w} 0$ y sea $K = \{\gamma_k\}_{k\in I\!N}$. Si $P \in P_K(^n E)$ entonces P es aproximable y extensible. Más aún, si $E \subset F$, entonces existe un morfismo de extensión $\Lambda : P_K(^n E) \to P_{\widetilde{K}}(^n F)$, donde $\widetilde{K} = \{\widetilde{\gamma}_k\}_{k\in I\!N}$, con $\widetilde{\gamma}_k$ una extensión de γ_k que preserva la norma. El morfismo es una isometría si consideramos las normas $\|\cdot\|_K$ y $\|\cdot\|_{\widetilde{K}}$ respectivamente.*

Dem. Como en (2.5), sea $u : E \to c_0$, $u(x) = (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_k(x), \ldots)$. Por ser $\{\|\gamma_k\|\}_{k\in I\!N}$ un conjunto acotado, $u \in L(E; c_0)$ y $\|u(x)\| = \|x\|_K$. Sea $\overline{u} : E'' \to c_0$, $\overline{u}(z) = (z(\gamma_1), \ldots, z(\gamma_k), \ldots)$. Otra vez, $\overline{u} \in L(E''; c_0)$ y $\|\overline{u}(z)\| = \|z\|_K$, para todo $z \in E''$.

Como $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en E', existe una sucesión $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E''$ tal que $z_k(\gamma_m) = \delta_{km}$ y por tanto $\overline{u}(z_k) = e_k$, donde $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de c_0, en consecuencia $\mathrm{Im}(\overline{u})$ es un subespacio denso de c_0.

Sea $P \in P_K({}^nE)$. Por Proposición 2.7, su extensión de Aron-Berner $\overline{P}$ pertenece a $P_K({}^nE'')$. Consideramos $Q : \mathrm{Im}(\overline{u}) \to \mathbb{K}$ definido por $Q(\overline{u}(z)) = \overline{P}(z)$. Q es un polinomio continuo n-homogéneo con $\|Q\| = \|\overline{P}\|_K = \|P\|_K$. Podemos extender Q a un polinomio n-homogéneo continuo sobre c_0, que seguiremos notando Q y que tiene la misma norma. Así se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[dr, "\overline{P}"] & c_0 \arrow[d, "Q"] \\ E \arrow[u, "J_E"] \arrow[r, "P"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Por ser un polinomio n-homogéneo y continuo sobre c_0, Q admite una representación como en (2.6). Por lo tanto

$$P = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in D} a_{i_1,\dots,i_n}\, \gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_n} \tag{2.7}$$

Puede verse que la serie (2.7) converge en ambas normas, tanto la de $P({}^nE)$ como en la de $P_K({}^nE)$. Más aún, del isomorfismo isométrico entre $P_K({}^nE)$ y $P({}^nc_0)$ se sigue que la sucesión $\{\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_n}\}_{(i_1,\dots,i_n)\in D}$ (con el *square ordering*) es una base de Schauder de $(P_K({}^nE), \|\cdot\|_K)$. Ahora que hemos probado que P es aproximable, prestemos atención al morfismo de extensión.

Sea $F \supset E$ y $\widetilde{u} : F \to \ell_\infty$ dados por $\widetilde{u}(y) = (\widetilde{\gamma}_1(y),\dots,\widetilde{\gamma}_k(y),\dots)$, con $\widetilde{\gamma}_k \in F'$ una extensión de γ_k que preserva la norma. Consideremos $\overline{Q} \in P({}^n\ell_\infty)$ la extensión de Aron-Berner de $Q \in P({}^nc_0)$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\widetilde{u}"] & \ell_\infty \arrow[dr, "\overline{Q}"] & \\ E \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u"] & c_0 \arrow[u, "J"] \arrow[r, "Q"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

donde J es la inclusión canónica de c_0 en ℓ_∞.

Si definimos $\widetilde{P} : F \to I\!K$ por $\widetilde{P}(y) = \overline{Q}(\widetilde{u}(y))$ obtenemos una extensión de P a F con

$$|\widetilde{P}(y)| = |\overline{Q}(\widetilde{u}(y))| \leq \|\overline{Q}\| \ \|\widetilde{u}(y)\|^n = \|P\|_K \ \|y\|^n_{\widetilde{K}} \quad \text{para todo } y \in F$$

Esto implica que $\widetilde{P}$ es $\widetilde{K}$-acotado y $\|\widetilde{P}\|_{\widetilde{K}} = \|P\|_K$. Por tanto, el morfismo de extensión

$$\begin{aligned} \Lambda : P_K(^nE) &\longrightarrow P_{\widetilde{K}}(^nF) \\ P &\longmapsto \overline{Q} \circ \widetilde{u} \end{aligned}$$

es una isometría. ∎

Observación 2.22 Notar que, en la proposición anterior, K es una sucesión w-nula, aunque en estas notas estuvimos trabajando principalmente con sucesiones nulas en norma. En el caso de sucesiones que tienden a cero en norma, el resultado es más fuerte puesto que $\widetilde{K}$ resulta también una sucesión que tiende a cero en norma. En el caso general, cuando $\gamma_k \xrightarrow{w} 0$, es posible elegir $\widetilde{\gamma}_k$ que converja débil a cero pero, desafortunadamente, el morfismo de extensión no resulta una isometría.

La condición que asumimos sobre $\{\gamma_k\}_{k\in I\!N}$ de ser una sucesión básica w-nula puede ser reemplazada por otras condiciones que nos permitan proceder como en la demostración anterior.

Ovsepian y Pelczynski probaron (ver [LT], por ejemplo) que todo espacio de Banach separable infinito dimensional verifica que, para cada $\varepsilon > 0$, existen dos sucesiones $\{x_k\}_{k\in I\!N} \subset E$ y $\{\gamma_k\}_{k\in I\!N} \subset E'$ tales que

(i) $\gamma_k(x_m) = \delta_{km}$ para todo $k, m \in I\!N$.

(ii) $\|x_k\| = 1$; $\|\gamma_k\| \leq 1 + \varepsilon$ para todo $k \in I\!N$.

(iii) $E = \overline{[\{x_k\}_{k\in I\!N}]}$.

(iv) $\{\gamma_k\}_{k\in I\!N}$ es un sistema total sobre E, i.e. $\gamma_k(x) = 0$ para todo $k \in I\!N$ implica que $x = 0$.

Un par de sucesiones en estas condiciones será llamada un *sistema O-P*. Notar que $\{\gamma_k\}_{k\in I\!N}$ es una sucesión w^*-nula.

Proposición 2.23 *Sea E un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Sean $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ y $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E'$ un sistema O-P. Si $K = \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ entonces todo polinomio n-homogéneo K-acotado P es aproximable y extensible a todo espacio mayor $F \supset E$ por un morfismo de extensión.*

Dem. Sea $u : E \to c_0$ como en (2.5), que está bien definido por ser $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión w^*-nula. Como $u(x_k) = e_k$, $\mathrm{Im}(u)$ es un subespacio denso de c_0 y podemos definir $Q : c_0 \to \mathbb{K}$ tal que $Q(u(x)) = P(x)$ para todo $x \in E$. Así P es aproximable con una representación como en (2.7). El resultado de extensión se deriva de la proposición anterior. ■

Capítulo 3

E' y su relación con los polinomios sobre E.

Mostraremos bajo condiciones de regularidad que si E' es isomorfo a F' entonces los espacios de polinomios homogéneos sobre E y F a valores en un Banach X, son isomorfos. Aún no se ha resuelto la respuesta con total generalidad, tampoco para el caso de polinomios a valores escalares. Sin embargo, mostraremos que algunos subespacios de polinomios, cuya definición está relacionada en forma más directa a la estructura dada por el espacio dual (débil-continuos, integrales, regulares), resultan isomorfos sin hipótesis adicionales sobre E, F o X.

3.1 Construcción del morfismo

Un espacio de Banach E se dice **estable** si es isomorfo a su cuadrado $E \times E$. J. C. Díaz y S. Dineen mostraron en [DD] que los espacios $L(^nE)$ y $L_s(^nE)$ son isomorfos si E es estable. También mostraron que la condición de estabilidad no era necesaria. Si E es un espacio de Banach tal que E' es estable y tiene propiedad de aproximación con la propiedad adicional de que todo operador de E en E' es compacto, el resultado se tiene para formas bilineales, es decir, los espacios $L(^2E)$ y $L_s(^2E)$ son isomorfos. Un ejemplo de espacio no estable satisfaciendo estas últimas hipótesis lo da $C(\Omega)$ para Ω el conjunto de todos los ordinales menores o iguales que el primer ordinal no numerable ([DD]). Este ejemplo los condujo a la pregunta:

Sean E y F dos espacios de Banach con duales isomorfos. ¿Son isomorfos los espacios $P(^nE)$ y $P(^nF)$ para todo $n \in I\!N$?

La primer respuesta positiva fue dada en ese mismo trabajo, donde fue probado el resultado: *si E' es isomorfo a F', y además E' es Schur y tiene propiedad de aproximación, entonces cualquiera sea n los espacios de polinomios n-homogéneos sobre E y F son isomorfos.*

El propósito de este capítulo es el de investigar condiciones que aseguren la existencia de isomorfismos entre los espacios de polinomios, dada la condición $E' \simeq F'$.

También hemos considerado si las distintas subclases de polinomios son preservadas o no por estos isomorfismos, dado que consideramos que el mero hecho de que dos espacios de polinomios sean isomorfos no aporta datos suficientes sobre la estructura de los mismos. Notar por ejemplo que $P(^kI\!R^n)$ es isomorfo a $P(^{n-1}I\!R^{k+1})$.

En estas notas presentamos una generalización de los resultados obtenidos en [LZ]. Aquí trabajamos con funciones multilineales y polinomios a valores vectoriales, mientras que en [LZ] lo hicimos a valores escalares.

Abordaremos el problema via la siguiente construcción. Todo operador lineal y continuo $s : E' \to F'$ induce un morfismo lineal y continuo

$$\overline{s} : P(^nE) \to P(^nF)$$

de la siguiente manera. Todo elemento y de F define el morfismo lineal

$$\widetilde{y} : L_s^k(E) \to L_s^{k-1}(E)$$

dado por $\widetilde{y}(B)(x_1, \ldots, x_{k-1}) = s(B_{x_1 \ldots x_{k-1}})(y)$, donde $B_{x_1 \ldots x_{k-1}}$ es un elemento de E' obtenido de fijar las $k-1$ variables $x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Ahora si P es un polinomio n-homogéneo sobre E y A es su forma n-lineal simétrica asociada, puede asignarse a A una forma n-lineal $\widetilde{s}(A)$ sobre F poniendo

$$\widetilde{s}(A)(y_1, \ldots, y_n) = (\widetilde{y_1} \circ \cdots \circ \widetilde{y_n})(A).$$

Notar que $\widetilde{s}(A)$ no es necesariamente simétrica. De todas formas queda bien definido el polinomio n-homogéneo sobre F dado por $\overline{s}(P)(y) = \widetilde{s}(A)(y, \ldots, y)$.

Para polinomios a valores vectoriales seguiremos notando $\widetilde{s}$ al morfismo de $L_s({}^nE; X)$ en $L({}^nF; X'')$ y $\overline{s}(P)$ a la aplicación entre $P({}^nE; X)$ y $P({}^nF; X'')$ ya que esto no se prestará a confusión. Para $y_1, \ldots, y_n \in F$ y $x' \in X'$ queda definido

$$\widetilde{s}(A)(y_1, \ldots, y_n)(x') = \tilde{s}(x' \circ A)(y_1, \ldots, y_n).$$

donde $\tilde{s}(x' \circ A)$ es la función que resulta de aplicar el morfismo definido a valores escalares. De forma natural queda definido, a valores en X'', $\overline{s}(P)(y) = \widetilde{s}(A)(y, \ldots, y)$.

Cuando $s = J_{E'} : E' \to E'''$ (la inclusión natural), el morfismo $\overline{s}$ obtenido es la extensión de Aron-Berner. En efecto, para cada z en $E'' = F$ se verifica $\widetilde{z}(B)(x_1, \ldots, x_{k-1})(\varphi) = J_{E'}(\varphi \circ B_{x_1 \ldots x_{k-1}})(z) = z(\varphi \circ B_{x_1 \ldots x_{k-1}})$ (ver Capítulo 1, sección 1.3.)

En este caso seguiremos usando la notación $\overline{P}$ y $\overline{A}$ para $\overline{s}(P)$ y $\widetilde{s}(A)$ respectivamente.

Teniendo en cuenta que queremos estudiar la existencia de isomorfismos entre espacios de polinomios, nos interesa la composición de morfismos del tipo '$\overline{s}$.' Para definir $\overline{s}(P)$ consideramos la función n-lineal simétrica asociada a P. Para calcular la composición, una vez obtenido $\overline{s}(P)$, necesitaríamos considerar la aplicación simétrica asociada a este polinomio. Por la similitud de esta construcción con la de Aron y Berner la falta de simetría de $\overline{A}$ es el centro del problema que nos concierne.

3.2 $\overline{s}$ y la extensión de Aron-Berner.

Por todo lo que ya fue estudiada la extensión de Aron-Berner encontramos conveniente dar una escritura de $\overline{s}$ y $\widetilde{s}$ en términos de ésta. Eso es lo que hacemos en el siguiente lema.

Lema 3.1 *Para todo $y_1, \ldots, y_n$ en F, y toda forma n-lineal y simétrica A de E en X,*

$$\widetilde{s}(A)(y_1, \ldots, y_n) = \overline{A}(s'(J_F(y_1)), \ldots, s'(J_F(y_n))).$$

En particular, $\overline{s}(P) = \overline{P} \circ s' \circ J_F$.

Dem. Probaremos primero el caso escalar $X = I\!\!K$, y procedemos por inducción en n. Si $A \in E'$, se tiene $\widetilde{s}(A)(y) = s(A)(y) = J_F(y)(s(A)) = s'(J_F(y))(A) = \overline{A}(s'(J_F(y)))$. Supongamos el resultado cierto para formas $(n-1)$-lineales. Primero mostraremos que la forma $(n-1)$-lineal sobre E'' obtenida de $\overline{A}$ fijando $s'(J_F(y_n))$ en la última variable coincide con la extensión Aron-Berner de $\widetilde{y_n}(A)$:

Sean $z_1, \ldots, z_{n-1} \in E''$. Tenemos

$$\overline{A}(z_1, \ldots, z_{n-1}, s'(J_F(y_n))) = (\widetilde{z_1} \circ \cdots \circ \widetilde{z_{n-1}})(s'(\widetilde{J_F(y_n)})(A))$$

y

$$\overline{\widetilde{y_n}(A)}(z_1, \ldots, z_{n-1}) = (\widetilde{z_1} \circ \cdots \circ \widetilde{z_{n-1}})(\widetilde{y_n}(A))$$

(donde las tildes sobre los elementos de E'' se refieren a $J_{E'}$). Así, será suficiente corroborar que las formas $(n-1)$-lineales sobre E, $s'(\widetilde{J_F(y_n)})(A)$ y $\widetilde{y_n}(A)$, coinciden. Sean $x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$. Entonces

$$\begin{aligned} s'(\widetilde{J_F(y_n)})(A)(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= s'(J_F(y_n))(A_{x_1 \ldots x_{n-1}}) \\ &= J_F(y_n)(s(A_{x_1 \ldots x_{n-1}})) \\ &= s(A_{x_1 \ldots x_{n-1}})(y_n) \\ &= \widetilde{y_n}(A)(x_1, \ldots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Usando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned} \widetilde{s}(A)(y_1, \ldots, y_n) &= (\widetilde{y_1} \circ \cdots \circ \widetilde{y_n})(A) \\ &= (\widetilde{y_1} \circ \cdots \circ \widetilde{y_{n-1}})(\widetilde{y_n}(A)) \\ &= \widetilde{s}(\widetilde{y_n}(A))(y_1, \ldots, y_{n-1}) \\ &= \overline{\widetilde{y_n}(A)}(s'(J_F(y_1)), \ldots, s'(J_F(y_{n-1}))) \\ &= \overline{A}(s'(J_F(y_1)), \ldots, s'(J_F(y_n))). \end{aligned}$$

Ahora, cualquiera sea $x' \in X'$ se tiene,

$$\begin{aligned} \widetilde{s}(A)(y_1, \ldots, y_n)(x') &= \widetilde{s}(x' \circ A)(y_1, \ldots, y_n) \\ &= \overline{x' \circ A}(s'(J_F(y_1)), \ldots, s'(J_F(y_n))) \\ &= \widetilde{s}(A)(s'(J_F(y_1)), \ldots, s'(J_F(y_n))(x'), \end{aligned}$$

igualdad que prueba el enunciado. ∎

En lo que sigue escribiremos, sin mencionarlo explícitamente, y en lugar de $J_F(y)$, para $y \in F$ aún cuando sean considerados como elementos de F'' via la inclusión natural.

Corolario 3.2 *Si $\overline{A}$ es simétrica, entonces $\overline{\widetilde{s}(A)} = \overline{A} \circ (s' \times \cdots \times s')$. Así $\overline{\widetilde{s}(A)}$ es también simétrica y si P es el polinomio homogéneo asociado a A, entonces $\overline{\overline{s}(P)} = \overline{P} \circ s'$.*

Dem. Claramente $\widetilde{s}(A)$ es simétrica por ser

$$\widetilde{s}(A)(y_1, \ldots, y_n) = \overline{A}(s'(y_1), \ldots, s'(y_n)).$$

Sean $y_1, \ldots, y_n$ elementos de F, y sean $w_1, \ldots, w_n$ elementos de F''. Mostraremos, por inducción en k, que

$$\overline{\widetilde{s}(A)}(w_1, \ldots, w_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) = \overline{A}(s'(w_1), \ldots, s'(w_k), s'(y_{k+1}), \ldots, s'(y_n)).$$

Recordemos (Proposición 1.18) que la extensión Aron-Berner de cualquier forma n-lineal y simétrica, a valores vectoriales, es w^*-w^*-continua en su primera variable. Recordemos también que los elementos de F y F'' siempre conmutan. También, s' es $w^* - w^*$-continua. Consideremos una red (y_α) de elementos de F, w^*-convergente a w_1. Entonces para $k = 1$,

$$\begin{array}{rcl} \overline{\widetilde{s}(A)}(w_1, y_2, \ldots, y_n) & = & w^* - \lim_\alpha \overline{\widetilde{s}(A)}(y_\alpha, y_2, \ldots, y_n) \\ & = & w^* - \lim_\alpha \widetilde{s}(A)(y_\alpha, y_2, \ldots, y_n) \\ & = & w^* - \lim_\alpha \overline{A}(s'(y_\alpha), s'(y_2), \ldots, s'(y_n)) \\ & = & \overline{A}(s'(w_1), s'(y_2), \ldots, s'(y_n)). \end{array}$$

Ahora supongamos que la igualdad se tiene para $k - 1$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \overline{\widetilde{s}(A)}(w_1, \ldots, w_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) & = & w^* - \lim_\alpha \overline{\widetilde{s}(A)}(y_\alpha, w_2, \ldots, w_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) \\ & = & w^* - \lim_\alpha \overline{\widetilde{s}(A)}(w_2, \ldots, w_k, y_\alpha, y_{k+1}, \ldots, y_n) \\ & = & w^* - \lim_\alpha \overline{A}(s'(w_2), \ldots, s'(w_k), s'(y_\alpha), s'(y_{k+1}), \ldots, s'(y_n)) \\ & = & w^* - \lim_\alpha \overline{A}(s'(y_\alpha), s'(w_2), \ldots, s'(w_k), s'(y_{k+1}), \ldots, s'(y_n)) \\ & = & \overline{A}(s'(w_1), s'(w_2), \ldots, s'(w_k), s'(y_{k+1}), \ldots, s'(y_n)). \end{array}$$

Por lo tanto $\overline{\widetilde{s}(A)}(w_1, \ldots, w_n) = \overline{A}(s'(w_1), \ldots, s'(w_n))$ y $\overline{\overline{s}(P)}(w) = \overline{P}(s'(w))$. ■

Corolario 3.3 *Sea $P \in P(^nE; X)$ y sea A su forma n-lineal simétrica asociada. Supongamos que $s : E' \to F'$ es un isomorfismo. Entonces si $\overline{A}$ es simétrica, $(\widetilde{s^{-1} \circ \widetilde{s}})(A) = A$ y $(\overline{s^{-1} \circ \overline{s}})(P) = P$.*

Dem. Notar que la caracterización dada en el Lema 3.1 asegura que $\widetilde{s}(A) = \overline{A} \circ (s' \circ J_E)^n$ es simétrica. Por Corolario 3.2, para $x_1, \ldots, x_n \in E$, tenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{s^{-1}}(\widetilde{s}(A))(x_1,\ldots,x_n) &= \overline{\widetilde{s}(A)}((s^{-1})'(x_1),\ldots,(s^{-1})'(x_n))\\ &= \overline{A}(s'((s^{-1})'(x_1)),\ldots,s'((s^{-1})'(x_n)))\\ &= \overline{A}(x_1,\ldots,x_n)\\ &= A(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

Como $\widetilde{s}(A)$ es la forma n-lineal simétrica asociada a $\overline{s}(P)$, para todo $x \in E$ se tiene $\overline{s^{-1}}(\overline{s}(P))(x) = P(x)$. ∎

Observar que $\widetilde{s}(A)$ es un elemento de $L(^nF; X'')$ y por lo tanto $\widetilde{s^{-1}}$ considerado como morfismo con ese dominio tiene imagen en $L(^nE; X^{iv})$. Sin embargo el resultado obtenido asegura que $\widetilde{s^{-1}}(\widetilde{s}(A)) \in L_s(^nE; X)$, cuando $\overline{A}$ es simétrica.

La versión a valores escalares del siguiente teorema fue obtenida, en forma independiente, en [CSCG].

Teorema 3.4 *Sean E y F espacios de Banach simétricamente Arens-regulares y supongamos que E' y F' son isomorfos (resp. isométricos), entonces para todo $n \in I\!N$, los espacios $P(^nE; X)$ y $P(^nF; X)$ son isomorfos (resp. isométricos).*

Dem. Sea $s : E' \to F'$ el isomorfismo entre los espacios duales. Como E es simétricamente Arens-regulares, para toda forma n-lineal y simétrica A sobre E, por Proposición 1.22 se tiene que $\overline{A}$ es simétrica. Así, para todo polinomio n-homogéneo P sobre E, $(\overline{s^{-1}} \circ \overline{s})(P) = P$. Análogamente, para todo polinomio n-homogéneo Q sobre F, $(\overline{s} \circ \overline{s^{-1}})(Q) = Q$. Observar también que

$$\|\overline{s}(P)\| = \|\overline{P} \circ s'\| \leq \|P\| \|s\|^n,$$

y lo mismo ocurre para s^{-1} y Q. De la desigualdad de las normas se deduce que siendo s isometría, $\overline{s}$ también lo es. ∎

Si notamos por $H_b(E)$ al espacio de funciones holomorfas y acotadas sobre los acotados de E a valores escalares y consideramos sobre éste la topología dada por la convergencia uniforme sobre los acotados, tenemos como consecuencia del Teorema 3.4 que *si E y F son espacios simétricamente Arens-regulares y si E' y F' son isomorfos (resp. isométricos), entonces los espacios $H_b(E)$ y $H_b(F)$ son isomorfos (resp. isométricos);* (ver [D]).

Observación 3.5 *Si se tienen morfismos entre espacios duales $s : E' \to F'$ y $t : F' \to G'$ entonces para toda función n-lineal y simétrica A y todo polinomio n-homogéneo P se tiene que $(\widetilde{t} \circ \widetilde{s})(A) = A$ y $(\overline{t} \circ \overline{s})(P) = \overline{t \circ s}(P)$.*

La funtorialidad se debe a la simetría de $\overline{A}$.

Observación 3.6 *Si E' y F' son isomorfos, y uno de ellos es Arens-regular, entonces el otro también lo es. Por lo tanto la hipótesis del Teorema 3.4 de regularidad simétrica en ambos espacios puede ser reemplazada por regularidad de uno solo de ellos.*

En efecto, digamos que $s : E' \to F'$ es un isomorfismo y F es Arens-regular. Si $T : E \to E'$ es una aplicación lineal, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "T'"] & E' \arrow[d] \\ F'' \arrow[u] \arrow[r, "L''"] & F' \\ F \arrow[u] \arrow[ur, "L"] & \end{tikzcd}$$

donde $L = s \circ T' \circ s' \circ J_F$. Como L es una aplicación débil compacta, su bitraspuesta L'' tiene rango en F', por el teorema de Gantmacher. Así, $T' = (s')^{-1} \circ L'' \circ s^{-1}$ es débil compacta, dado que L'' lo es. Entonces T lo es.

Notar que al probar la igualdad $\overline{\widetilde{s}(A)}(w_1, \ldots, w_n) = \overline{A}(s'(w_1), \ldots, s'(w_n))$, cuando $\overline{A}$ es simétrica, hemos probado que $\overline{\widetilde{s}(A)}$ es un elemento de $L(^nF''; X'')$ aunque en principio debiera ser un elemento a valores en X^{iv}. Así, basta que $\overline{A}$ sea simétrica para que la doble extensión Aron-Berner de A, $\overline{\overline{A}}$, tome valores en X''.

Observación 3.7 *Si $s = J_{E'}$, el Corolario 3.2 recupera el siguiente resultado de [AGGM]: Si E es simétricamente regular, entonces $\overline{\overline{P}} = \overline{P} \circ \rho$, donde $\rho : E^{iv} \to E''$ es el morfismo restricción; así no hay nuevas 'evaluaciones' para $\overline{\overline{P}}$ más allá de las dadas por puntos de E''.*

Observación 3.8 *Para que $\overline{A}$ sea simétrica alcanza con que $s'(F) \subseteq E$. Sin embargo esta situación implica que s es un operador traspuesto. Así, de ser E' isomorfo a F' resulta ser E isomorfo a F y este caso carece de interés para nuestro estudio.*

Asumamos que $s'(F) \subseteq E$ y probemos la afirmación hecha. Llamemos $\alpha = s'|_F$.

El siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} F'' & \xrightarrow{s'} & E'' \\ \uparrow & & \uparrow \\ F & \xrightarrow{\alpha} & E \end{array}$$

Como $s' \circ J_F = J_E \circ \alpha$, se tiene $J'_F \circ s'' = \alpha' \circ J'_E$. Veamos que $\alpha' = s$.

Si $x' \in E'$, $x' = J'_E(J_{E'}(x'))$. Luego

$$\alpha'(x') = \alpha'(J'_E(J_{E'}(x'))) = J'_F(s''(J_{E'}(x'))) = J'_F(s(x')) = s(x') \circ J_F$$

y para todo $y \in F$ tenemos $\alpha'(x')(y) = (s(x') \circ J_F)(y) = s(x')(y)$.

3.3 $\overline{s}$ y algunos subespacios de polinomios.

Dado que $s : E' \to F'$ es un morfismo entre espacios duales de Banach, es natural esperar que aquellas clases de polinomios sobre E que están cercanamente relacionadas a E' sean preservadas por el morfismo $\overline{s} : P(^nE; X) \to P(^nF; X'')$.

3.3.1 Polinomios de tipo finito - nucleares - aproximables

La fórmula $\overline{s}(P) = \overline{P} \circ s' \circ J_F$ que probamos en el Lema 3.1 muestra que las clases de polinomios de tipo finito, nuclear y aproximables son todas preservadas por $\overline{s}$.

En efecto si P es un polinomio n-homogéneo de tipo finito P admite una escritura de la forma $\sum_{j=1}^m \varphi_j^n w_j$ con $w_j \in X$ y $\varphi_j \in E'$ para $j = 1, \ldots, m$.

Así,

$$\overline{s}(P) = \sum_{j=1}^m \overline{s}(\varphi_j^n\, w_j) = \sum_{j=1}^m (\overline{\varphi_j}^{\,n} \circ s' \circ J_F)\, w_j = \sum_{j=1}^m (s'(\varphi_j))^n\, w_j.$$

Con lo cual no sólo tenemos que $\overline{s}$ preserva la clase de polinomios de tipo finito, sino que además $\overline{s} : P_f(^nE; X) \to P_f(^nF; X)$.

Esta verificación da la correspondiente para los polinomios aproximables. Notar además que, en este caso, se tendrán polinomios $P_k \in P_f(^nE;X)$ aproximando a $P \in P_a(^nE;X)$ con lo cual, por la continuidad de $\overline{s}$, $\overline{s}(P_k)$ aproximará a $\overline{s}(P)$. Ahora bien, los polinomios definidos sobre F, $\overline{s}(P_k)$, tienen imagen en X y aproximan en norma a $\overline{s}(P)$ de donde deducimos que $\overline{s} : P_a(^nE;X) \to P_a(^nF;X)$.

Recordemos que un polinomio n-homogéneo $P \in P(^nE;X)$, se dice **nuclear** si existe una sucesión acotada $(w_j)_{j\in I\!N} \subseteq X$ y una sucesión de funcionales lineales $(\varphi_j)_{j\in I\!N} \subseteq E'$ con $\sum_{j\geq 1} \|\varphi_j\|^n < \infty$ verificando

$$P(x) = \sum_{j\geq 1} \varphi_j^n(x)\, w_j \qquad \text{para todo } x \in E.$$

El espacio de polinomios n-homogéneos nucleares es notado usualmente por $P_N(^nE;X)$ y resulta un espacio de Banach al considerarse la norma

$$\|P\|_N = \inf\{\sum_{j\geq 1} \|\varphi_j\|^n\, \|w_j\|, \quad \text{donde } \sum_{j\geq 1} \varphi_j^n\, w_j \text{ es una representación para } P\}$$

Como $\|P\| \leq \|P\|_N$, la inclusión de $P_N(^nE;X)$ en $P(^nE;X)$ es continua.

Retomando, si P es un polinomio nuclear y $\sum_{j\geq 1} \varphi_j^n\, w_j$ es una representación, a valores en X, para P entonces $\sum_{j\geq 1} s(\varphi_j)^n\, w_j$ es una representación para $\overline{s}(P)$ gracias a la convergencia en norma de la serie $\sum_{j\geq 1} \|\varphi_j\|^n\, \|w_j\|$. Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned} \|\overline{s}(P)\|_N &\leq \inf\{\sum_{j\geq 1} \|s(\varphi_j)\|^n\, \|w_j\|, \quad \text{donde } \sum_{j\geq 1} \varphi_j^n\, w_j \text{ es una representación para } P.\} \\ &\leq \|s\|^n\, \|P\|_N. \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos que $\overline{s} : P_N(^nE;X) \to P_N(^nF;X)$ es un operador continuo.

Antes de proceder con el estudio de otras subclases de polinomios establecemos el siguiente lema, que si bien abarca varias de ellas (ver Capítulo 1, sección 2), es de contenido más general.

Lema 3.9 *Sea $A \in L_s(^nE;X)$. Si $T_A : E \to L_s(^{n-1}E;X)$ es un operador débil-compacto entonces, $\overline{A}$ es simétrica.*

Dem. Sea P el polinomio asociado a A. Para cada $x' \in X'$ queda definido $Q_{x'}$ el polinomio sobre E a valores en $I\!K$ dado por $Q_{x'}(x) = (x' \circ P)(x)$. Para $Q_{x'}$ se tiene $T_{Q_{x'}} = (x' \circ T_P)$ con lo cual $T_{Q_{x'}}$ resulta un operador débil-compacto. Por el resultado a valores escalares $\overline{x' \circ A}$, que es la extensión Aron-Berner de la forma n-lineal asociada a $Q_{x'}$, es simétrica. Es decir, $\overline{z_1} \circ \ldots \circ \overline{z_n}(x' \circ A) = \overline{z_{\sigma(1)}} \circ \ldots \circ \overline{z_{\sigma(n)}}(x' \circ A)$, para todo $z_1, \ldots, z_n \in E''$ y toda σ permutación en S_n.

Luego, $\overline{A}(z_1, \ldots, z_n)(x') = \overline{A}(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)})(x')$, para todo $z_1, \ldots, z_n \in E''$, para todo $x' \in X'$, para todo $\sigma \in S_n$. ∎

A todo polinomio P en $P_f({}^nE; X)$ o en $P_a({}^nE; X)$ o en $P_N({}^nE; X)$ le corresponde un operador T_P débil-compacto. Por esto, gracias al lema anterior, si $s : E' \to F'$ es un isomorfismo podemos asegurar que los siguientes tres pares de espacios de polinomios $P_f({}^nE; X)$ y $P_f({}^nF; X)$, $P_a({}^nE; X)$ y $P_a({}^nF; X)$, y $P_N({}^nE; X)$ y $P_N({}^nF; X)$ son isomorfos via $\overline{s}$. El isomorfismo es una isometría cuando s lo es.

3.3.2 Polinomios débil-continuos sobre acotados

Para un espacio de Banach E tal que E' tiene la propiedad de aproximación, fue probado en [AHV] que $P_w({}^nE; X) \equiv \overline{P_f({}^nE) \otimes X}$. Si consideramos un espacio F tal que E' es isomorfo a F' tendremos

$$P_w({}^nE; X) \equiv \overline{P_f({}^nE) \otimes X} \cong \overline{P_f({}^nF) \otimes X} \equiv P_w({}^nF; X)$$

igualdad que se tiene por ser $P_f({}^nE)$ isomorfo a $P_f({}^nF)$ y por tener F' la propiedad de aproximación. De aquí, es natural formular la pregunta:

¿Será $P_w({}^nE; X) \cong P_w({}^nF; X)$ en el caso general?

En lo que sigue mostraremos que esto es cierto no sólo para la clase de polinomios débil continuos sobre acotados sino también para la clase de polinomios integrales. Esto es, si E' y F' son isomorfos, entonces $P_w({}^nE; X)$ es isomorfo a $P_w({}^nF; X)$ y $P_I({}^nE; X)$ es isomorfo a $P_I({}^nF; X)$, sin imponer condiciones sobre E, F o X; donde el isomorfismo resulta una isometría si los espacios duales son isométricos.

El mismo resultado es cierto para las subclases de polinomios extensibles y regulares. Quizá sorprendentemente, la clase de polinomios *wsc* (débil-secuencialmente continuos) no es, en general, preservada por $\overline{s}$. Mostraremos un ejemplo de esta situación en la última sección.

Ahora sí, empezaremos con la subclase de polinomios débil-continuos. Recordemos que éstos pueden caracterizarse [ALRR] como aquellos para los cuales existe un conjunto K compacto de E' tal que P es K-acotado.

Lema 3.10 *Si $P \in P(^nE;X)$ es K-acotado ($K \subseteq E'$), entonces $\overline{s}(P) \in P(^nF;X'')$ es $s(K)$-acotado ($s(K) \subseteq F'$) y*

$$\|\overline{s}(P)\|_{s(K)} \leq \|P\|_K.$$

Dem. Como vimos en Proposición 2.7 $\overline{P}$ es K-acotado si P lo es. Además $\|\overline{P}\|_K \leq \|P\|_K$. Así para todo $y \in F$,

$$\begin{aligned}
\|\overline{s}(P)(y)\| &= \|(\overline{P} \circ s' \circ J_F)(y)\| \\
&\leq \|\overline{P}\|_K \sup_{\gamma \in K} \mid \gamma((s' \circ J_F)(y)) \mid^n \\
&\leq \|P\|_K \sup_{\gamma \in K} \mid s(\gamma)(y) \mid^n \\
&= \|P\|_K \|y\|^n_{s(K)}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Notar que el lema anterior vale cualquiera sea $s : E' \to F'$, operador continuo. Además se tiene para P, un polinomio débil-continuo, que la imagen por $\overline{s}$ resulta un polinomio débil-continuo, sin embargo $\overline{s}(P)$ toma valores en X''.

Proposición 3.11 *Si $s : E' \to F'$ es un isomorfismo (resp. isometría), entonces*

$$\overline{s} : P_w(^nE;X) \to P_w(^nF;X)$$

es un isomorfismo (resp. isometría).

Dem. Por el lema anterior $\overline{s} : P_w(^nE;X) \to P_w(^nF;X'')$. Dado $P \in P_w(^nE;X)$, su operador lineal asociado $T_P : E \to P(^{n-1}E;X)$ es compacto [AHV]. Luego la extensión Aron-Berner de su forma n-lineal asociada es simétrica y por Corolario 3.3, $(\overline{s^{-1}} \circ \overline{s})(P) = P$. Análogamente, para $Q \in P_w(^nF;X)$, se tiene $(\overline{s} \circ \overline{s^{-1}})(Q) = Q$. Notar además que

$$\|\overline{s}(P)\| = \|\overline{P} \circ s'\| \leq \|P\| \|s\|^n,$$

y lo mismo se tiene para s^{-1} y Q. Otra vez la desigualdad de las normas asegura que $\overline{s}$ es una isometría cuando s lo es. ∎

Notar que en la demostración anterior se tiene para P en $P_w({}^nE;X)$ que $\overline{s^{-1}}$ se aplica sobre $\overline{s}(P)$ que es un elemento de $P_w({}^nF;X'')$ por lo que su imagen debiera ser a valores en X^{iv}, aunque el resultado de la composición muestra que este no es el caso.

3.3.3 Polinomios integrales

Ahora estudiaremos el comportamiento de $\overline{s}$ sobre la subclase de polinomios n-homogé- neos integrales. Recordemos que D. Carando e I. Zalduendo demostraron en [CZ] que la extensión Aron-Berner de un polinomio integral, a valores escalares, es a su vez integral. Más aún, probaron que si μ es una medida representando a $P : E \to I\!\!K$, y se define

$$U : L^1(\mu) \to E'$$

por

$$U(f)(x) = \int_{B_{E'}} f(\gamma)\gamma(x)d\mu(\gamma),$$

U es una aplicación de norma uno y la extensión Aron-Berner de P puede escribirse

$$\overline{P}(z) = \int_{B_{E'}} U'(z)^n d\mu, \tag{3.1}$$

y $\|\overline{P}\|_I = \|P\|_I$.

El resultado que sigue es una generalización del hecho anterior para polinomios a valores vectoriales, es decir, la extensión Aron-Berner de un polinomio integral sobre E a valores en X, es un polinomio integral sobre E'' a valores en X'', aunque se pierde, eventualmente, el carácter de isometría.

El primer resultado que necesitamos es el Lema 3.12. Para su demostración deberíamos diferenciar entre las definiciones de operador Pietsch-integral o $\mathcal{P}$-integral (que es la que corresponde a la Definición 1.14 cuando P es un polinomio 1-homogéneo) y la de operador Grothendieck-integral o $\mathcal{G}$-integral. Omitiremos entrar en detalles, dado que el tema es vasto y a nuestros propósitos solo nos permitiría dar una demostración citando resultados ya conocidos. Esto nos lleva a omitir también la prueba del lema.

Combinando los Corolarios 10 y 11 de [DU] (Cap. VIII, 2.) obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.12 *Sea $T : X \to Y$ un operador $\mathcal{P}$-integral. Entonces $T'' : X'' \to Y''$ es un operador $\mathcal{P}$-integral y además $\|T\|_I = \|T''\|_I$.*

En lo que sigue haremos uso del espacio producto tensorial inyectivo entre espacios de Banach, como describimos en el Capítulo 1.

El resultado que mencionamos a continuación es reciente y pertenece a I. Villanueva [V]. El enunciado que damos fue simplificado para nuestros propósitos.

Lema 3.13 *([V] Proposition 2.12) Los espacios $P_I(^nE, X)$ y $L_I(\otimes^n_{s,\epsilon}E, X)$ son isomorfos.*

Ahora estamos en condiciones de probar que la extensión Aron-Berner de un polinomio integral a valores vectoriales en un polinomio integral.

Teorema 3.14 *Si $P \in P_I(^nE, X)$ entonces $\overline{P} \in P_I(^nE''; X'')$. Además $\|\overline{P}\|_I \leq \|P\|_I$.*

Dem. Si $P : E \to X$ es un polinomio integral, su linealización $L_P : \otimes^n_{s,\epsilon}E \to X$ es un operador integral (ver [CD]). Entonces por Lema 3.12 L''_P es un operador integral. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\otimes^n_{s,\epsilon}E)'' & \overset{L''_P}{\rightarrow} & X'' \\ i\uparrow & \overset{L}{\nearrow} & \\ \otimes^n_{s,\epsilon}E'' & & \end{array}$$

donde la aplicación $i : \otimes^n_{s,\epsilon}E'' \hookrightarrow (\otimes^n_{s,\epsilon}E)''$ es la inclusión dada por la identificación hecha en [CZ]. Es decir, para un vector elemental de $\otimes^n_{s,\epsilon}E''$, digamos $z^{(n)} = z \otimes \ldots \otimes z$, $i(z^{(n)})$ es una forma lineal $e_z \in (P_I(^nE))'$ que verifica para cada polinomio integral R, a valores escalares, $i(z^{(n)})(R) = e_z(R) = \overline{R}(z)$, con $\overline{R} \in P_I(^nE'')$ la extensión Aron-Berner de R.

Definimos $Q : E'' \to X''$ el polinomio $Q(z) = L(z \otimes \ldots \otimes z) = L''_P(i(z^{(n)}))$. Por Lema 3.13 Q es integral. Queremos ver que $Q = \overline{P}$. Consideremos $x' \in X'$ entonces,

$$Q(z)(x') = L''_P(i(z^n))(x') = i(z^n)(L'_P(x'))$$

Ahora, $L'_P(x') \in (\otimes^n_{s,\epsilon} E)'$ que visto como polinomio es $x' \circ P$. Luego, para todo $x' \in X'$

$$Q(z)(x') = i(z^n)(x' \circ P) = \overline{x' \circ P}(z) = \overline{P}(z)(x').$$

Falta ver la desigualdad de las normas integrales. La misma demostración hecha en [DU] (VI. 3 - Proposition 9), para probar que los operadores integrales forman un ideal (bilátero) puede adaptarse para probar que $P \circ t$ es un polinomio integral si P lo es y t es un operador continuo. Con este resultado y el Lema 3.12 tenemos,

$$\|\overline{P}\|_I = \|Q\|_I = \|L''_P \circ i\|_I \leq \|L''_P\|_I \|i\| = \|L_P\|_I = \|P\|_I. \blacksquare$$

Antes de proseguir, haremos dos comentarios sobre el carácter de isometría esta extensión.

Observación 3.15 *Si $P \in P_I(^nE, X)$ y X es un espacio dual entonces $\|\overline{P}\|_I = \|P\|_I$.*

Dem. Digamos que $X = Y'$ con Y un espacio de Banach. Sea $\rho : Y''' \to Y'$ la proyección natural que hace a Y' un espacio 1-complementado en su bidual. Entonces $P = \rho \circ \overline{P} \circ J_E$ y por tanto se obtiene la otra desigualdad $\|P\|_I \leq \|\rho\| \|\overline{P}\|_I \|J_E\|^n \leq \|\overline{P}\|_I$. $\blacksquare$

El siguiente ejemplo, alumbra de alguna manera, la posibilidad de que a valores vectoriales se pierda la igualdad de normas.

Ejemplo 3.16 *Existe un espacio de Banach E y un operador $T \in L(E; E)$ que no es integral pero T'' si lo es.*

En efecto, el espacio de Banach a considerar es el espacio E introducido por T. Figiel y W. B. Johnson en [FJ]. Se prueba en [DF] la existencia de un operador $T : E \to E$ que no es integral, cuyo transpuesto T' es un operador nuclear y por tanto integral. Así, $T'' = \overline{T}$ es integral con $\|\overline{T}\|_I$ finita y $\|T\|_I$ es infinita.

Nuestro próximo paso será probar que todo morfismo $\overline{s}$ preserva la subclase de polinomios integrales en el siguiente sentido.

Lema 3.17 *Si $P \in P(^nE; X)$ es integral, entonces $\overline{s}(P) \in P(^nF; X'')$ es integral, y*

$$\|\overline{s}(P)\|_I \leq \|s\|^n \|P\|_I.$$

Dem. Por Lema 3.1, $\overline{s}(P) = \overline{P} \circ s' \circ J_F$. El resultado se sigue del hecho mencionado en la demostración anterior: los polinomios integrales forman un ideal a derecha.

En cuanto a las normas, por Teorema 3.14, tenemos

$$\|\overline{s}(P)\|_I = \|\overline{P} \circ s' \circ J_F\|_I \leq \|\overline{P}\|_I \|s\|^n = \|P\|_I \|s\|^n. \blacksquare$$

Ahora probaremos para espacios E, F cuyos duales sean isomorfos, que existe un isomorfismo entre los espacios de polinomios integrales definidos sobre éstos y a valores vectoriales, sin condiciones adicionales sobre los espacios.

Proposición 3.18 *Si $s : E' \to F'$ es un isomorfismo (resp. isometría), entonces*

$$\overline{s} : P_I(^nE, X) \to P_I(^nF; X)$$

es un isomorfismo (resp. isometría).

Dem. Para obtener la igualdad $\overline{s^{-1}} \circ \overline{s}(P) = P$ cuando P es un polinomio integral de E en X, basta probar que T_P es un operador débil-compacto. La composición en el otro sentido será análoga. Consideremos A la función n-lineal y simétrica asociada a P. A es una función multilineal integral. Para ver que T_A, y por tanto T_P, es débil-compacto basta probar que $T_A : E \to L_I(^{n-1}E; X)$ es un operador integral (ver [DF]).

Para esto procederemos como en [V] donde el resultado fue probado para funciones bilineales. Consideraremos $E \times \cdots \times E$ como espacio producto con la norma infinita. Pondremos subíndices $i = 1, \ldots, n$ para indicar la posición de los espacios E en dicho producto.

Por ser A una función multilineal integral existe G una medida de Borel regular y de variación acotada sobre $B_{E'_1} \times \cdots \times B_{E'_n}$ a valores en X tal que

$$A(x_1,\dots,x_n)=\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}}\gamma_1(x_1)\cdots\gamma_n(x_n)\ dG(\gamma_1,\dots,\gamma_n).$$

Además, si $\|G\|=|G|(B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'})$, la medida G puede elegirse de forma que $\|G\|\leq\|A\|_I+\varepsilon$ (ver, por ejemplo, [A]). Para cada $x\in E_1$ definimos G_x una función a valores en X definida sobre los borelianos de $B_{(E_2\times\cdots\times E_n)'}=B_{E_2'}\times\cdots\times B_{E_n'}$ (por la norma considerada) como

$$G_x(\Omega)=\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}}x\chi_\Omega\ dG=\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}}\gamma_1(x)\chi_\Omega(\gamma_2,\dots,\gamma_n)\ dG(\gamma_1,\dots,\gamma_n).$$

Es fácil ver que G_x resulta una medida de Borel regular y de variación acotada y que para todo $y=(x_2,\dots,x_n)\in E_2\times\cdots\times E_n$

$$\int_{B_{E_2'}\times\cdots\times B_{E_n'}}y\ dG_x=\int_{B_{E_2'}\times\cdots\times B_{E_n'}}\gamma_2(x_2)\dots\gamma_n(x_n)\ dG_x(\gamma_2,\dots,\gamma_n)=T_A(x)(x_2,\dots,x_n),$$

de donde se tiene la primera afirmación hecha: la imagen de T_A es un subespacio de $L_I({}^{n-1}E;X)$.

Mostremos ahora que T_A es un operador integral. Para esto consideremos μ_G una función definida sobre los borelianos de $B_{E_1'}$ a valores en el conjunto de las medidas borelianas regulares de variación acotada sobre $B_{E_2'}\times\cdots\times B_{E_n'}$ en X dada por

$$\mu_G(\Delta)(\Omega)=G(\Delta\times\Omega).$$

Otra vez, μ_G es una medida regular boreliana y además un cálculo sencillo de supremos y particiones muestra que $\|\mu_G\|=|\mu_G|(B_{E_1'})=\|G\|$.

Ahora, si a cada medida ν sobre los borelianos de $B_{E_2'}\times\cdots\times B_{E_n'}$ en X le asignamos la función $(n-1)$ lineal I_ν, definida por $I_\nu(x_2,\dots,x_n)=\int_{B_{E_2'}\times\cdots\times B_{E_n'}}\gamma_2(x_2)\cdots\gamma_n(x_n)\ d\nu(\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ tenemos una aplicación suryectiva de norma menor o igual a 1. Llamemos $\Upsilon:\nu\mapsto I_\nu$ a dicha aplicación.

Por último, consideremos $\Upsilon \circ \mu_G$, que es una medida regular boreliana y de variación acotada por ser Υ una función $(n-1)$-lineal y μ_G una medida con las propiedades mencionadas. Para esta medida se tiene que

$$T_A(x) = \int_{B_{E'_1}} \gamma_1(x) d(\Upsilon \circ \mu_G)(\gamma_1),$$

Luego T_A es un operador integral. Además se tiene que $\|T_A\|_I \leq \|\Upsilon \circ \mu_G\| \leq \|\Upsilon\| \, \|\mu_G\| \leq \|G\| \leq \|A\|_I + \varepsilon$, y por tanto $\|T_A\|_I \leq \|A\|_I$.

Hemos probado que T_A y por lo tanto T_P es un operador débil-compacto. Luego, por Lema 3.9, $\overline{A}$ es simétrica y por Corolario 3.3 se sigue el resultado. ∎

Por último, para concluir con esta subclase de polinomios queremos mostrar cómo la caracterización hecha en [CZ], expresada en (3.1), permite en el caso escalar, dar la siguiente demostración del Lema 3.17.

Lema 3.19 *Si $P \in P(^nE)$ es integral, entonces $\overline{s}(P) \in P(^nF)$ es integral, y*

$$\|\overline{s}(P)\|_I \leq \|s\|^n \|P\|_I.$$

Dem. Para $y \in F$,

$$\overline{s}(P)(y) = \overline{P}(s'(J_F(y))) = \int_{B_{E'}} U'(s'(J_F(y)))^n d\mu = \int_{B_{E'}} \left[(s \circ U)' \circ J_F\right]^n (y) d\mu.$$

Así, $\overline{s}(P)$ es integral, y

$$\|\overline{s}(P)\|_I \leq \|(s \circ U)' \circ J_F\|^n \mid \mu \mid \leq \|s\|^n \mid \mu \mid .$$

La desigualdad se obtiene para cualquier medida μ representando a P luego, $\|\overline{s}(P)\|_I \leq \|s\|^n \|P\|_I$. ∎

En el caso escalar la Proposición 3.18 admite la siguiente demostración.

Proposición 3.20 *Si $s : E' \to F'$ es un isomorfismo (resp. isometría), entonces*

$$\overline{s} : P_I(^nE) \to P_I(^nF)$$

es un isomorfismo (resp. isometría).

Dem. Por Lema 3.19, $\overline{s}$ y $\overline{s^{-1}}$ son ambos morfismos entre espacios de polinomios integrales. Mostraremos ahora que $\overline{\overline{s}(P)} = \overline{P} \circ s'$. Claramente $\overline{P} \circ s'$ coincide con $\overline{s}(P)$ cuando es restringido a F. Por lo tanto será suficiente [Z$_1$] verificar que las diferenciales de primer orden de $\overline{P} \circ s'$ tienen las propiedades

a) Para todo $y \in F$, $D(\overline{P} \circ s')(y)$ es w^* -continuo.

b) Para todo $w \in F''$ e $(y_\alpha) \subset F$, w^*-convergente a w,

$$D(\overline{P} \circ s')(w)(y_\alpha) \to D(\overline{P} \circ s')(w)(w).$$

Pero como $(\overline{P} \circ s')(w) = \int U'(s'(w))^n d\mu$, al diferenciar tenemos

$$D(\overline{P} \circ s')(w)(v) = n \int_{B_{E'}} U'(s'(w))^{n-1} U'(s'(v)) d\mu,$$

que es w^*-continuo en la variable v.

Ahora

$$\begin{aligned} \overline{s^{-1}}(\overline{s}(P)) &= \overline{\overline{s}(P)} \circ (s^{-1})' \circ J_E \\ &= \overline{P} \circ s' \circ (s^{-1})' \circ J_E \\ &= \overline{P} \circ J_E = \overline{P} \mid_E \\ &= P. \end{aligned}$$

Análogamente, para $Q \in P_I(^nF)$, se tiene $(\overline{s} \circ \overline{s^{-1}})(Q) = Q$. Las normas de $\overline{s}$ y $\overline{s^{-1}}$ están controladas por la desigualdad en Lema 3.19. ■

El mismo tipo de resultado que se da en las proposiciones anteriores puede obtenerse para cualquier subespacio de polinomios si la extensión Aron-Berner de las funciones n-lineales simétricas asociadas a dichos polinomios son simétricas y la extensión de Aron-Berner preserva la clase. Aunque en cada caso habrá que verificar que $\overline{s}$ también preserva la clase.

Esto es lo que sucede, por ejemplo, con las clases de polinomios extensibles y regulares (ver definiciones en Capítulo 1, Sección 1.2).

3.3.4 Polinomios extensibles

Para el caso extensible necesitamos los siguientes dos resultados:

Proposición 3.21 *([C], Th. 3.4) Si $P : E \to X$ es un polinomio n-homogéneo extensible y $T : F \to E$ es un operador lineal continuo, entonces $P \circ T : E \to X$ es extensible y $\|P \circ T\|_e \leq \|P\|_e \; \|T\|^n$.*

Teorema 3.22 *([C], Th. 3.6) Si $P \in P_e(^nE; X)$, entonces $\overline{P} \in P_e(^nE''; X'')$ y $\|\overline{P}\|_e \leq \|P\|_e$.*

Proposición 3.23 *Si $s : E' \to F'$ es un isomorfismo (resp. isometría), entonces*

$$\overline{s} : P_e(^nE; X) \to P_e(^nF; X)$$

es un isomorfismo (resp. isometría).

Dem. Por Lema 3.1 $\overline{s}(P) = \overline{P} \circ (s' \circ J_F)$ entonces combinando Teorema 3.22 y Proposición 3.21 se tiene que $\overline{s}(P)$ es un polinomio extensible de F en X''.

Veamos que la extensión Aron-Berner de la forma n-lineal simétrica A, asociada a P es también simétrica. Para esto, recordemos que todo espacio de Banach E puede verse como subespacio de $(C(B_{E'}), w^*)$ via la inclusión isométrica $I_E : x \mapsto e_x$ donde $e_x(\gamma) = \gamma(x)$, para toda $\gamma \in B_{E'}$. Como P es extensible, existe $Q : C(B_{E'}) \to X$ una extensión de P. Consideremos B la forma n-lineal simétrica asociada a Q, $B(I_E(x), \dots, I_E(x)) = P(x)$ luego por unicidad $A = B \circ (I_E \times \cdots \times I_E)$ y $\overline{A} = \overline{B} \circ (I_E'' \times \cdots \times I_E'')$. Como B está definida en un espacio Arens-regular ($C(K)$ con K compacto) su extensión Aron-Berner es simétrica y por tanto lo es $\overline{A}$.

Ahora, por Corolario 3.3, $\overline{s^{-1}} \circ \overline{s}(P) = P$ y además

$$\|\overline{s}(P)\|_e \leq \|\overline{P}\|_e \; \|s' \circ J_F\|^n \leq \|P\|_e \; \|s\|^n.$$

La composición en el otro sentido es análoga, de donde se sigue el resultado. ∎

3.3.5 Polinomios regulares

Para la subclase de polinomios regulares, usaremos la construcción hecha por J. A. Jaramillo, A. Prieto e I. Zalduendo en [JPZ], a través de la cual cada elemento del bidual de $P(^kE)$ puede verse como un polinomio k-homogéneo sobre E''.

A valores vectoriales, se tiene:

$$\beta : (P(^kE;X))'' \to P(^kE'';X'')$$

$\beta(\Lambda)(z)(x') = \Lambda(x' \circ e_z)$, para toda $\Lambda \in (P(^nE;X))''$ donde $e_z : P(^kE;X) \to X''$ es la aplicación que verifica $e_z(P) = \overline{P}(z)$ para todo P, polinomio k-homogéneo.

Con estas definiciones y el diagrama

$$E'' \xrightarrow{T''_P} (P(^{n-1}E;X))'' \xrightarrow{\beta} P(^{n-1}E'';X'')$$

tenemos el siguiente lema.

Lema 3.24 $T_{\overline{P}} = \beta \circ T''_P$.

Dem. Para cada $z, w \in E''$ y cada $x' \in X'$ vale:

$$(\beta \circ T''_P(z))(w)(x') = T''_P(z)(x' \circ e_w) = z(T'_P(x' \circ e_w)). \tag{3.2}$$

Ahora, para cada $x \in E$,

$$\begin{aligned} T'_P(x' \circ e_w)(x) &= x' \circ e_w(T_P(x)) = \overline{T_P(x)}(w)(x') \\ &= \overline{x' \circ T_P(x)}(w) = \overline{w} \circ \cdots \circ \overline{w}(x' \circ T_P(x)) \\ &= \overline{w} \circ \cdots \circ \overline{w}(x' \circ A_x) = \overline{w} \circ \cdots \circ \overline{w}(x' \circ A)(x). \end{aligned}$$

Como la extensión Aron-Berner de A es w^*-continua en su primer variable, de la ecuación (3.2), se tiene que $(\beta \circ T''_P(z))(w)(x') = z(\overline{w} \circ \cdots \circ \overline{w}(x' \circ A)) = \overline{A}(z, w, \ldots, w)(x') = (T_{\overline{P}}(z))(w)(x')$, como queríamos probar. ∎

Si notamos por $P_R(^nE;X)$ a la clase de polinomios n-homogéneos regulares sobre E a valores en X, considerado con la norma usual de polinomios, obtenemos como corolario del lema anterior que la extensión Aron-Berner de un polinomio regular es también regular es decir:

Proposición 3.25 *Si* $P \in P_R(^nE;X)$ *entonces* $\overline{P} \in P_R(^nE'';X'')$.

Dem. El resultado es inmediato del Lema 3.24 ya que la trasposición y composición de operadores débilmente compactos es débilmente compacta. ∎

Proposición 3.26 *Si* $s : E' \to F'$ *es un isomorfismo (resp. isometría), entonces*

$$\overline{s} : P_R(^nE;X) \to P_R(^nF;X)$$

es un isomorfismo (resp. isometría).

Dem. Veamos primero que $\overline{s}(P)$ es un polinomio en $P_R(^nF;X'')$, es decir que $T_{\overline{s}(P)}$ es un polinomio w-compacto. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{rcl} F & \xrightarrow{T_{\overline{s}(P)}} & P(^{n-1}F;X'') \\ s' \circ J_F \downarrow & & \uparrow \\ E'' & \xrightarrow{T_{\overline{P}}} & P(^{n-1}E'';X'') \end{array}$$

Para $y_0, y \in F$ tenemos, por Lema 3.1, que $(T_{\overline{s}(P)}(y_0))(y) = (T_{\overline{P}}(s' \circ J_F)(y_0))((s' \circ J_F)(y))$. Por otra parte, el morfismo $Q \mapsto Q \circ (s' \circ J_F)$ es un operador lineal y continuo del espacio $P(^{n-1}E'';X'')$ en $P(^{n-1}F;X'')$ que completa el diagrama anterior de manera que resulta conmutativo; de donde se obtiene la w-compacidad para $T_{\overline{s}(P)}$.

El resultado se sigue del Lema 3.9, gracias a la fórmula de polarización, y el Corolario 3.3. ∎

3.4 Ejemplos.

En esta sección damos tres ejemplos. El primero muestra que $\overline{\overline{s}(P)}$ puede diferir de $\overline{P} \circ s'$. El segundo que $\overline{v \circ s}$ puede ser distinto a $\overline{v} \circ \overline{s}$, lo que muestra la no funtorialidad de $s \mapsto \overline{s}$, y el tercero que, aun siendo $s : X' \to Y'$ un isomorfismo, $\overline{s}$ puede no preservar la clase de polinomios débil-secuencialmente continuos.

Antes de proceder con los ejemplos mencionaremos algunos hechos y fijaremos notación. Si X es un espacio de Banach, consideramos el polinomio 2-homogéneo P definido en Observación 1.17

(item c), sobre $X \times X'$, $P(x, x') = x'(x)$. Puede verse fácilmente que P es débil-secuencialmente continuo si y solo si X tiene la propiedad de Dunford-Pettis. También, puede verificarse, ver [Z2], que la extensión Aron-Berner de P a $X'' \times X'''$ es

$$\overline{P}(x'', x''') = \frac{1}{2}[x'''(x'') + x''(\rho(x'''))],$$

donde $\rho : X''' \to X'$ es la restricción (i.e., la traspuesta de la inclusión natural $J_X : X \to X''$). Para los dos primeros ejemplos usaremos la notación

$$E = X \times X' \qquad F = X'' \times X' \qquad G = X'' \times X''' \, (= E'').$$

Sobre E y F consideramos los polinomios

$$P(x, x') = x'(x) \qquad Q(x'', x') = x''(x')$$

y definimos los morfismos

$$s : E' \to F' \qquad t : F' \to G'$$

$s = J_{X'} \oplus id_{X''}$, $t = id_{X'''} \oplus J_{X''}$. También denotaremos $r = J'_{X'}$.

Ejemplo 3.27 $\overline{\overline{s}(P)} \neq \overline{P} \circ s'$.

Primero calculamos $\overline{s}(P)$. Para $(x'', x') \in F$, tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{s}(P)(x'', x') &= (\overline{P} \circ s')(J_{X''}(x''), J_{X'}(x')) \\
&= \overline{P}(r(J_{X''}(x'')), J_{X'}(x')) \\
&= \overline{P}(x'', J_{X'}(x')) \\
&= \frac{1}{2}[J_{X'}(x')(x'') + x''(\rho(J_{X'}(x')))] \\
&= \frac{1}{2}[x''(x') + x''(x')] \\
&= Q(x'', x').
\end{aligned}$$

Así $\overline{s}(P) = Q$. Ahora calculamos $\overline{\overline{s}(P)}$ y $\overline{P} \circ s'$:

$$\overline{\overline{s}(P)}(x^{iv}, x''') = \overline{Q}(x^{iv}, x''') = \frac{1}{2}[x^{iv}(x''') + x'''(r(x^{iv}))]$$

$$\begin{aligned}
(\overline{P} \circ s')(x^{iv}, x''') &= \overline{P}(r(x^{iv}), x''') \\
&= \frac{1}{2}[x'''(r(x^{iv})) + r(x^{iv})(\rho(x'''))].
\end{aligned}$$

Entonces $\overline{\overline{s}(P)} = \overline{P} \circ s'$ si y solo si $x^{iv}(x''') = r(x^{iv})(\rho(x'''))$, pero esto sólo ocurre para X espacio reflexivo.

Notar que hemos visto que $\overline{s}(P) = Q$. Si X tiene la propiedad Dunford-Pettis pero no X', entonces P es débil-secuencialmente continuo, pero no Q. También tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.28 *Si X es un espacio de Banach infinito-dimensional con propiedad de Dunford-Pettis, entonces $X \times X'$ contiene a l^1.*

Dem. Si $E = X \times X'$ no contuviera a l^1 entonces todo polinomio débil-secuencialmente continuo sería débil continuo sobre acotados [FGLl] . Por lo tanto el operador $E \to E'$ asociado al polinomio P de arriba sería compacto, su correspondiente $\overline{A}$ sería simétrica, y $\overline{\overline{s}(P)} = \overline{P} \circ s'$ forzando a X a ser reflexivo, y en consecuencia finito-dimensional. ∎

Ejemplo 3.29 $\overline{t \circ s} \neq \overline{t} \circ \overline{s}$.

Primero calculemos $t' \circ J_G$:

$$\begin{aligned} (t' \circ J_G)(x'', x''') &= t'(J_{X''}(x''), J_{X'''}(x''')) \\ &= (J_{X''}(x''), J'_{X''}(J_{X'''}(x'''))) \\ &= (J_{X''}(x''), x'''). \end{aligned}$$

Ya hemos calculado $\overline{\overline{s}(P)}$, y usando dicho cálculo tenemos

$$\begin{aligned} (\overline{t} \circ \overline{s})(P)(x'', x''') &= (\overline{\overline{s}(P)} \circ t' \circ J_G)(x'', x''') \\ &= \overline{\overline{s}(P)}(J_{X''}(x''), x''') \\ &= \frac{1}{2}[J_{X''}(x'')(x''') + x'''(r(J_{X''}(x'')))] \\ &= x'''(x''). \end{aligned}$$

Por otra parte $t \circ s = J_{X'} \oplus J_{X''} = J_{E'}$ con lo cual

$$\begin{aligned} (\overline{t \circ s})(P)(x'', x''') &= \overline{P}(x'', x''') \\ &= \frac{1}{2}[x'''(x'') + x''(\rho(x'''))], \end{aligned}$$

luego $\overline{t \circ s} = \overline{t} \circ \overline{s}$ si y solo si $x''(\rho(x''')) = x'''(x'')$, pero otra vez, esto sólo sucede para X espacio reflexivo.

Ejemplo 3.30 *Un isomorfismo $s : X' \to Y'$ tal que $\overline{s}$ no preserva la clase polinomios débil-secuencialmente continuos.*

Empezaremos con el conocido ejemplo de Stegall ([St]) de espacios de Banach X e Y con duales isomorfos, tales que X tiene propiedad Dunford-Pettis pero no Y:

$$X = (\sum_{n\geq 1} l_2^n)_1 \qquad \text{y} \qquad Y = X \oplus l_2.$$

Llamemos $s : X' \to Y'$ al isomorfismo, y consideremos el polinomio 2-homogéneo Q sobre Y definido por $Q(x, a) = \sum_{n\geq 1} a_n^2$. El operador $Y \to Y'$ asociado a Q manda (x, a) a $(0, a)$ y es por tanto débil-compacto. Entonces $(\overline{s} \circ \overline{s^{-1}})(Q) = \overline{s \circ s^{-1}}(Q) = Q$. Como X tiene la propiedad Dunford-Pettis, todos los polinomios sobre X son débil-secuencialmente continuos [Ry$_1$], en particular $(\overline{s^{-1}})(Q)$ lo es. Luego $\overline{s}$ manda este polinomio débil-secuencialmente continuo a Q, que no es débil-secuencialmente continuo ($Q(0, e_n) = 1$ for all n).

Proposición 3.31 *Sean E y F espacios de Banach, tales que E' es isomorfo a F'. Supongamos que $E \not\supseteq \ell_1$ y que tiene base de Schauder achicante ('shrinking'). Entonces los espacios $P_{wsc}(^nE)$ y $P_{wsc}(^nF)$ son isomorfos.*

Dem. Como $E \not\supseteq \ell_1$ se tiene que $P_{wsc}(^nE) = P_w(^nE)$ (ver [AHV] Prop. 2.12.) Supongamos que $F \supseteq \ell_1$ entonces F' es no separable y en consecuencia E' es no separable por lo que E no puede tener base achicante (ver [Di]). ■

El mismo resultado de la proposición anterior se tiene si E tiene base de Schauder incondicional y achicante ya que en este caso no puede contener una copia de ℓ_1 (ver [Di]).

Dedicaremos el resto de este capítulo a $\tilde{s}$ y la extensión de Nicodemi. Trabajaremos solamente con aplicaciones a valores escalares. Para E, F espacios de Banach con $s : E' \to F'$ un operador continuo, se construye para aplicaciones a valores escalares (ver [CSCG]) el morfismo $\hat{s} : L(^nE) \to L(^nF)$ de la siguiente manera:

Para $1 \leq j \leq n$ se define,

$$s_j : L({}^n\overbrace{F \times \ldots \times F}^{j-1} \times \overbrace{E \times \ldots \times E}^{n-j+1}) \to L({}^n\overbrace{F \times \ldots \times F}^{j} \times \overbrace{E \times \ldots \times E}^{n-j})$$

como el morfismo que resulta de la composición de los morfismos naturales y $\theta_s : B \mapsto (\theta_s(B) : (a_1, \ldots, a_{n-1}) \mapsto s(B(a_1, \ldots, a_{n-1}))$.

$$\begin{array}{lcl} L({}^n\overbrace{F \times \ldots \times F}^{j-1} \times \overbrace{E \times \ldots \times E}^{n-j} \times E) & \overset{\alpha_1}{\equiv} & L({}^n\overbrace{F \times \ldots \times F}^{j-1} \times \overbrace{E \times \ldots \times E}^{n-j}; E') \quad \overset{\theta_s}{\to} \\ \overset{\theta_s}{\to} \quad L({}^n\overbrace{F \times \ldots \times F}^{j-1} \times \overbrace{E \times \ldots \times E}^{n-j}; F') & \overset{\alpha_2}{\equiv} & L({}^nF \times \overbrace{F \times \ldots \times F}^{j-1} \times \overbrace{E \times \ldots \times E}^{n-j}). \end{array}$$

Finalmente se define

$$\hat{s} = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_1.$$

Es claro de la construcción que si s es un isomorfismo entonces $\hat{s}$ también lo es. Esto no indica que el isomorfismo inverso sea necesariamente el que resulta de la construcción hecha con s^{-1}.

Probaremos que $\hat{s}$ y $\tilde{s}$ coinciden sobre las formas n-lineales simétricas. Después de esto estaremos en condiciones de dar un ejemplo que muestra la no funtorialidad de $s \mapsto \hat{s}$.

Introducimos la siguiente notación: Para B una forma n-lineal $B^{a_j \cdots a_n}$ será la forma $(j-1)$-lineal que se obtiene de B fijando las últimas $n-j$ variables $a_j, \ldots, a_n$ es decir, $B^{a_j \cdots a_n}(x_1, \ldots, x_{j-1}) = B(x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, \ldots, a_n)$.

Sea A una forma n-lineal simétrica A, procederemos por inducción en j. Probaremos que

$(s_j \circ s_{j-1} \circ \ldots \circ s_1)(A)(y_1, \ldots, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \overline{A}(x_{j+1}, \ldots, x_n, s'(y_1) \ldots s'(y_j))$.

Para $j = 1$, siendo A simétrica, tenemos $\alpha_1(A)(x_2, \ldots, x_n)(x) = A(x_2, \ldots, x_n, x) = A(x, x_2, \ldots, x_n)$. Por lo tanto para $z \in E''$ se tiene que $z(\alpha_1(A)(x_2, \ldots, x_n)) = \overline{A}(z, x_2, \ldots, x_n)$. Por otra parte, $\alpha_2(B)(y, x_2, \ldots, x_n) = B(x_2, \ldots, x_n)(y)$.

$$\begin{aligned} \text{Así,} \quad s_1(A)(y, x_2, \ldots, x_n) &= \theta_s(\alpha_1(A))((x_2, \ldots, x_n))(y) \\ &= s(\alpha_1(A)(x_2, \ldots, x_n))(y) \\ &= s'(y)(\alpha_1(A)(x_2, \ldots, x_n)) \\ &= \overline{A}(s'(y), x_2, \ldots, x_n) \\ &= \overline{A}(x_2, \ldots, x_n, s'(y)). \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que las variables de E y las de E'' conmutan en $\overline{A}$.

Supongamos cierto el resultado para $j-1$, es decir, $(s_{j-1}\circ\ldots\circ s_1)(A)(y_2,\ldots,y_j,x_{j+1},\ldots,x_n,x)$ $=\overline{A}(x_{j+1},\ldots,x_n,x,s'(y_2)\ldots s'(y_j))$ y probémoslo para j. Notar que la variable x puede intercambiarse con $x_{j+1},\ldots,x_n$ y ser considerada la primer variable de $\overline{A}$. Para facilitar la escritura pongamos $B=(s_{j-1}\circ\ldots\circ s_1)(A)$.

$$\begin{aligned}
s_j(B)(y_1,y_2\ldots y_j,x_{j+1}\ldots x_n) &= \theta_s(\alpha_1(B))(y_2,\ldots,y_j,x_{j+1}\ldots x_n)(y_1)\\
&= s(\alpha_1(B)(y_2,\ldots,y_j,x_{j+1}\ldots x_n))(y_1)\\
&= s'(y_1)(\alpha_1(B)(y_2,\ldots,y_j,x_{j+1}\ldots x_n))\\
&= s'(y_1)(\overline{A}(.\,,x_{j+1},\ldots,x_n,s'(y_2)\ldots s'(y_j))\\
&= \overline{A}(s'(y_1),x_{j+1},\ldots,x_n,s'(y_2)\ldots s'(y_j))\\
&= \overline{A}(x_{j+1},\ldots,x_n,s'(y_1),s'(y_2),\ldots,s'(y_j)).
\end{aligned}$$

Finalmente la composición de los n morfismos $s_j\ 's$ y el Lema 3.1 dan, para A simétrica, el resultado deseado

$$\hat{s}(A)(y_1,\ldots,y_n)=(s_n\circ\ldots\circ s_1)(A)(y_1,\ldots,y_n)=\overline{A}(s'(y_1),\ldots,s'(y_n))=\tilde{s}(A)(y_1,\ldots,y_n).$$

Ejemplo 3.32 $\widehat{t\circ s}\neq\hat{t}\circ\hat{s}$.

Usaremos $\tilde{s}$ en lugar de $\hat{s}$ ya que trabajaremos con formas simétricas.

En las condiciones de los Ejemplos 3.27 y 3.29 tenemos las bilineales simétricas A y B asociadas a los polinomios $2P$ y $2Q$ respectivamente, definidas por

$$A((x,x');(y,y'))=x'(y)+y'(x)\qquad \text{y} \qquad B((x'',x');(y'',y'))=x''(y')+y''(x')$$

Ambas formas están definidas en forma similar, por lo que alcanza con conocer la extensión Aron-Berner de una de ellas para conocer la de ambas. Es claro que $\overline{A}$ no será la forma simétrica que se obtiene de $\overline{P}$ via la fórmula de polarización puesto que de ser así $\overline{A}$ sería simétrica y por lo tanto $\overline{s(P)}=\overline{P}\circ s'$ pero el Ejemplo 3.27 muestra que esto no es cierto. Calculamos $\overline{A}$ via el morfismo $J_{E'}$ donde $E=X\times X'$.

Notemos que $A_{(x,x')} = (x', J_X(x))$ como elemento de $X' \times X''$.

Así,

$$\begin{aligned}
\widetilde{(y'', y''')}(A)(x, x') &= J_{E'} A_{(x,x')}(y'', y''') \\
&= (y'', y''')(x', J_X(x)) \\
&= y''(x') + y'''(J_X(x)) \\
&= (\rho(y'''), y'')(x, x').
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{A}((x'', x'''); (y'', y''')) &= \widetilde{(x'', x''')}(\rho(y'''), y'') \\
&= J_{E'}(\rho(y'''), y'')(x'', x''') \\
&= x''(\rho(y''')) + x'''(y'').
\end{aligned}$$

Calculamos $\widetilde{s}(A)$

$$\begin{aligned}
\widetilde{s}(A)((x'', x'); (y'', y')) &= \overline{A}((x'', J_{X'}(x')); (y'', J_{X'}(y'))) \\
&= x''(\rho(J_{X'}(y'))) + J_{X'}(x')(y'') \\
&= x''(y') + y''(x') \\
&= B((x'', x'); (y'', y')).
\end{aligned}$$

Ahora calculamos $\hat{t}(\hat{s}(A))$ que por ser $\widetilde{s}(A)$ una forma simétrica resulta $\hat{t}(\hat{s}(A)) = \widetilde{t}(\widetilde{s}(A))$. Esto junto con el cálculo anterior nos da que $\hat{t}(\hat{s}(A)) = \widetilde{t}(B) = \overline{B} \circ t' \circ J_G$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}(\widetilde{s}(A))((x'', x'''); (y'', y''')) &= \overline{B}((J_{X''}(x''), x'''); (J_{X''}(y''), y''')) \\
&= x'''(r \circ J_{X''}(y'')) + J_{X''}(x'')(y''') \\
&= x'''(y'') + y'''(x'').
\end{aligned}$$

Por otra parte, por ser A simétrica, se tiene que $\widehat{t \circ s}(A) = \widetilde{t \circ s}(A) = \overline{A}$, donde la última igualdad resulta de ser $t \circ s = J_{E'}$. Luego, $\widehat{t \circ s}(A) = \hat{t} \circ \hat{s}(A)$ si y solo si $x''(\rho(y''') = y'''(x'')$ para todo x'' en X'' y todo y''' en X''', lo que ocurre si y solo si X es reflexivo.

Capítulo 4

Una topología débil-polinomial sobre espacios de Banach

En este capítulo consideraremos espacios de Banach reales E y polinomios continuos a valores escalares con dominio en E. En las secciones 2 y 3 trabajaremos sobre reticulados de Banach reales, para lo cual recordaremos las definiciones y propiedades elementales sobre el tema.

4.1 Seminormas dadas por polinomios.

Sobre E tenemos definidas, en términos de convergencia de redes, las topologías:

- ▷ *Fuerte* ($\|.\|$), dada por la convergencia en norma: $x_\alpha \to x$ si y solo si $||x_\alpha - x|| \to 0$.
- ▷ *Débil* (w), dada por la convergencia bajo las formas lineales: $x_\alpha \stackrel{w}{\to} x$ si y solo si $\varphi(x_\alpha - x) \to 0$, para todo $\varphi \in E'$.
- ▷ *Débil polinomial* (wp), dada por la convergencia bajo polinomios: $x_\alpha \stackrel{wp}{\to} x$ si y solo si $P(x_\alpha - x) \to 0$, para todo $P \in P(^nE)$, para todo $n \in I\!N$; (ver [CCG]).

Se tienen las siguientes implicaciones

$$x_\alpha \to x \quad \Rightarrow \quad x_\alpha \stackrel{wp}{\to} x \quad \Rightarrow \quad x_\alpha \stackrel{w}{\to} x.$$

Por otra parte, en todo espacio complejo de Hilbert infinito-dimensional H, la wp-topología no es lineal (ver [ACG$_1$]). Otros ejemplos tanto en espacios de Banach reales como complejos donde la wp-topología es no lineal fueron dados en [BJL] y [CGG].

La falta de linealidad de la topología wp muestra que, en general, las tres topologías mencionadas son diferentes. Aún así existen ejemplos, que mencionaremos luego, para los cuales se verifica $w = wp$ o $wp = \|.\|$, con lo cual en estos casos wp sí es lineal.

Con el objeto de obtener una topología polinomial y lineal *cercana* a la wp en [GJLl] se introduce la topología $\mathcal{T}$. Para definirla necesitamos presentar la siguiente familia de seminormas.

Definición 4.1 *[GJLl] Para cada $P \in P(^nE)$ se define $\tilde{d}_P : E \times E \to I\!R_{\geq 0}$,*

$$\tilde{d}_P(x,y) = \inf_{\substack{k-cadenas \\ k \in Z\!\!Z, k \geq 0}} \{|P(x-z_1)|^{\frac{1}{n}} + |P(z_1-z_2)|^{\frac{1}{n}} + \cdots + |P(z_k-y)|^{\frac{1}{n}}\}$$

donde por una $k-cadena$ entendemos el conjunto ordenado $\{z_1,\ldots,z_k\}$ si $k \geq 1$ y el conjunto vacío si $k = 0$.

Mencionamos a continuación algunas propiedades elementales

Proposición 4.2 *Para P un polinomio n-homogéneo se tiene*

(i) $\tilde{d}_P(x,y) \leq |P(x-y)|^{\frac{1}{n}}$.

(ii) $\tilde{d}_P(x,y) = \tilde{d}_P(y,x)$, *para todo* $x,y \in E$.

(iii) $\tilde{d}_P(x,y) \leq \tilde{d}_P(x,z) + \tilde{d}_P(z,y)$, *para todo* $x,y,z \in E$.

(iv) $\tilde{d}_P(x+h,y+h) = \tilde{d}_P(x,y)$, *para todo* $x,y,h \in E$. *(invariancia por traslaciones)*

(v) $\tilde{d}_P(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|\tilde{d}_P(x,y)$, *para todo* $x,y \in E$, *y todo* $\lambda \in I\!R$.

Dem. La primera propiedad se obtiene al considerar la cadena vacía. La simetría es clara. La desigualdad triangular es consecuencia de tomar ínfimo sobre todas las k-cadenas variando k. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, si $\{z_1,\ldots,z_m\}$, $\{w_1,\ldots,w_l\}$ son cadenas verificando

$$|P(x-z_1)|^{\frac{1}{n}} + |P(z_1-z_2)|^{\frac{1}{n}} + \cdots + |P(z_k-z)|^{\frac{1}{n}} < \tilde{d}_P(x,z) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y}$$

$$|P(x-w_1)|^{\frac{1}{n}} + |P(w_1-w_2)|^{\frac{1}{n}} + \cdots + |P(w_l-y)|^{\frac{1}{n}} < \tilde{d}_P(z,y) + \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces $\{z_1,\ldots,z_m,z,w_1,\ldots,w_l\}$ es una $(m+l+1)$-cadena que verifica que $\tilde{d}_P(x,y) \leq \tilde{d}_P(x,z) + \tilde{d}_P(z,y) + \varepsilon$, cualquiera sea $\varepsilon > 0$. En el mismo, sentido siendo h fijo, $\{z_1,\ldots,z_k\}$ es una k-cadena para $x+h$ e $y+h$ si y solo si $\{z_1-h,\ldots,z_k-h\}$ es una k-cadena para x e y; de donde se obtiene la invariancia por traslaciones. Finalmente, para todo λ escalar no nulo, $\{z_1,\ldots,z_k\}$ es una k-cadena para λx y λy si y solo si $\{\frac{z_1}{\lambda},\ldots,\frac{z_k}{\lambda}\}$ es una k-cadena para x e y. Como P es un polinomio n-homogéneo y cada término de las sumas consideradas está afectado por la potencia $\frac{1}{n}$ la última propiedad es inmediata. ∎

El siguiente paso, siguiendo [GJLl], es definir $d_P(x) = \tilde{d}_P(x,0)$, para todo $x \in E$. De la Proposición 4.2 se tiene el siguiente lema.

Lema 4.3 *Dado $P \in P(^nE)$, la aplicación $d_P : E \to I\!R_{\geq 0}$ es una seminorma continua sobre E.*

La continuidad se debe a la Proposición 4.2, propiedad (i), $d_P(x) \leq |P(x)|^{\frac{1}{n}} \leq \|P\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x\|$.

Definición 4.4 *[GJLl] Sea $\mathcal{T}$ la topología definida sobre E dada por la familia $(d_P)_P$ cuando P varía sobre todos los polinomios continuos n-homogéneo sobre E a valores escalares, y n varía sobre $I\!N$.*

Esta topología $\mathcal{T}$ es convexa y lineal. Más aún, para todo $\varphi \in E'$ tenemos $d_\varphi(x) = |\varphi(x)|$, así $w \leq \mathcal{T} \leq wp \leq \|.\|$.

Para espacios como c_0, el espacio de Tsirelson T^* y $C(K)$ (para compactos dispersos K), las topologías w y wp coinciden sobre los conjuntos acotados. Entonces $w = \mathcal{T} = wp$ sobre conjuntos acotados para estos espacios. Un polinomio se dice *separante* si existe una constante $C > 0$ tal que $|P(x)| \geq C$ para todo x con $\|x\| = 1$. Si E tiene un polinomio separante, como ℓ_2, entonces E tiene un polinomio n-homogéneo separante P, (ver [FPWZ]). Es decir, existe un polinomio n-homogéneo P y una constante $C > 0$ tal que $|P(x)| \geq C\|x\|^n$, para todo $x \in E$, para ese polinomio tenemos

$$d_P(x) \geq C^{\frac{1}{n}} \inf\{\|x-z_1\| + \|z_1-z_2\| + \cdots + \|z_k\|\} \geq C^{\frac{1}{n}}\|x\|.$$

Luego, $C^{\frac{1}{n}}\|x\| \leq d_P(x) \leq K\|x\|$ y d_P resulta una norma equivalente a la norma dada sobre E. En este caso $\mathcal{T} = wp = \|.\|$.

4.2 Polinomios ortogonalmente aditivos

En la línea de [GJLl] estudiaremos la topología dada por aquellas seminormas que corresponden a una clase particular y no por ello pequeña de polinomios. En las dos secciones siguientes, centraremos nuestro estudio en los espacios de sucesiones y de funciones, vistos como reticulados de Banach, ℓ_p y $L_p([0,1],\mu)$ con μ la medida de Lebesgue, $1 \leq p < \infty$.

Para esto recordaremos la definición de reticulados de Banach y la estructura natural de reticulados de Banach que tienen los espacios ℓ_p y L_p.

Definición 4.5 *Un espacio de Banach real E, parcialmente ordenado se dice un* **reticulado de Banach** *si se verifican:*

(i) $x \leq y$ *implica* $x + z \leq y + z$, *para todo* $x, y, z \in E$.

(ii) $\lambda x \geq 0$, *para todo* $x \geq 0$ *y todo* $\lambda \in I\!R_{\geq 0}$.

(iii) Para todo $x, y \in E$ *existe una cota superior mínima* $x \vee y$ *y una cota inferior máxima* $x \wedge y$.

(iv) $\|x\| \leq \|y\|$ *si* $|x| \leq |y|$, *donde el valor absoluto* $|x|$ *de* $x \in E$ *se define por* $|x| = x \vee (-x)$.

Dos elementos x e y se dicen **ortogonales** o **mutuamente disjuntos** si verifican $|x| \wedge |y| = 0$, en cuyo caso notaremos, como es usual, $x \perp y$.

Todo espacio de Banach con base incondicional $\{e_k\}_{k \in I\!N}$ de constante 1, es un reticulado de Banach con el orden dado por $\sum_{k \geq 1} a_k e_k \geq 0$ si y solo si $a_k \geq 0$ para todo $k \in I\!N$. Este orden es llamado el orden dado por la base incondicional. Notar que dos elementos cualesquiera de soportes disjuntos son ortogonales. Cuando la constante de la base no es 1, puede modificarse el axioma (iv) de la definición de modo que el espacio admite una norma equivalente que lo hace un reticulado de Banach. Hay reticulados importantes, como los espacios $C(K)$ para K conjunto compacto y $L_p(\mu)$ cuyo orden está dado por el producto puntual, aunque L_p tiene como base incondicional la de Haar para $1 < p < \infty$. En estos casos también vale que dos funciones de soporte disjunto son ortogonales. Para más detalles ver ([LT] II.)

Estudiaremos la topología τ definida, sobre reticulados de Banach E, por la familia de seminormas $(d_P)_P$, cuando P varía sobre $P_o(^nE)$, el conjunto de polinomios ortogonalmente aditivos definidos sobre E.

La topología τ está cercanamente relacionada con la topología débil-polinomial estudiada entre otros artículos en [BJLl], [DG], [GGLl], [GLl]. En las secciones que siguen damos una caracterización esta topología τ para los espacios ℓ_p y L_p.

Definición 4.6 *Sea E un reticulado de Banach, se dice que una función $f : E \to I\!R$ es ortogonalmente aditiva si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ siempre que $x \perp y,\ x, y \in E$.*

Ejemplo 4.7 *[Su] Sea $E = \ell_p,\ 1 \leq p < \infty$. Para $n \geq p$, $P_o(^nE)$ es isométricamente isomorfo a ℓ_∞ via el morfismo $P \leftrightarrow \xi = (a_j = P(e_j))_{j \in I\!N}$.*

Notar que en este caso el conjunto $\bigcup_{n \geq p} P_o(^nE)$ contiene un conjunto no separable y coincide con el conjunto de polinomios diagonales sobre ℓ_p, con $n \geq p$.

Ejemplo 4.8 *[Su] Sea $E = L_p[0, 1],\ 1 \leq p < \infty$ y μ la medida de Lebesgue.*

Para $1 \leq n < p$, $P \in P_o(^nE) \Leftrightarrow \exists!\ \xi \in L_{\frac{p}{p-n}}$ tal que $P(x) = \int_0^1 \xi x^n d\mu$.

Para $n = p$, $P \in P_o(^nE) \Leftrightarrow \exists!\ \xi \in L_\infty$ tal que $P(x) = \int_0^1 \xi x^n d\mu$.

Para $n > p$, $P \in P_o(^nE) \Leftrightarrow P \equiv 0$.

La aplicación $P \leftrightarrow \xi$ es un isomorfismo entre los espacios $P_o(^nE)$ y $L_{\frac{p}{p-n}}$ o L_∞ según el caso. En particular, $\bigcup_{n \geq p} P_o(^nE)$ contiene un conjunto no separable si p es un número natural.

Ahora, definimos la topología τ y la topología débil-polinomial asociada a este conjunto.

Definición 4.9 *Sea τ la topología definida sobre E por la familia de seminormas $(d_P)_P$ cuando P recorre $P_o(^nE)$ y n varía sobre $I\!N$.*

Definición 4.10 *Decimos que una red $(x_\alpha)_\alpha \subset E$ converge a $x \in E$ en la topología wp_o si y solo si para todo $n \in I\!N$ y para todo P polinomio n-homogéneo ortogonalmente aditivo $P(x_\alpha - x) \to 0$.*

Nuestro problema principal es el de caracterizar la convergencia de redes acotadas en la τ-topología y su relación con la wp_o-topología, para los espacios ℓ_p y L_p.

4.3 τ sobre los espacios ℓ_p.

Daremos una caracterización de aquellas redes acotadas $(x_\alpha)_\alpha \subset \ell_p$ verificando que $x_\alpha \stackrel{\tau}{\to} x$. Con este propósito vamos a describir d_P para P un polinomio ortogonalmente aditivo sobre ℓ_p. Es claro que $x_\alpha \stackrel{\tau}{\to} x$ implica $x_\alpha \stackrel{w}{\to} x$ debido a la igualdad $|\varphi(a)| = d_\varphi(a)$. Teniendo en cuenta que $d_P(x) \leq |P(x)|^{\frac{1}{n}}$, aquellos polinomios que son w-continuos sobre acotados no aportan información adicional, a la que dan los elementos de E', a la τ-convergencia. Esto permite que prestemos antención sólo a polinomios ortogonalmente aditivos que no son w-continuos sobre conjuntos acotados de E, cuando esto sea oportuno.

Por otra parte se tiene que todo polinomio de grado menor que p sobre ℓ_p es w-continuo sobre acotados (ver [BF] y [Ll], Th. 4.4.7 y Th. 4.5.9). Luego, cuando sea conveniente, restringiremos nuestra descripción de d_P al conjunto de polinomios ortogonalmente aditivos n-homogéneos con $n \geq p$; en otras palabras, al conjunto de polinomios n-homogéneos diagonales con $n \geq p$.

Sea P un polinomio ortogonalmente aditivo n-homogéneo con $n \geq p$. Digamos $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$, con $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, ver Ejemplo 4.7. Notar que si $a_j \neq 0$, sólo para un número finito de $j's$, entonces P es de tipo finito y en consecuencia w-continuo sobre acotados. Por lo tanto, consideraremos aquellos P para los que $a_j \neq 0$ para un número infinito de $j's$.

Empezaremos con un ejemplo particular porque a través del estudio de este caso hemos dado alcance a la caracterización general para polinomios ortogonalmente aditivos, no w-continuos, de grado impar.

Lema 4.11 *Sea $1 \leq p < \infty,\ n = 3,\ n \geq p$. Si $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^3$ entonces $d_P(x) = 0$ para todo $x \in \ell_p$.*

Dem. Mostraremos que $d_P(e_1) = 0$. La misma demostración puede adaptarse para cada elemento e_j de la base canónica de ℓ_p.

Como d_P es una seminorma tenemos, para cualquier suma finita, que $d_P(\sum_{j=1}^{N} x_j e_j) \leq$

$\sum_{j=1}^{N}|x_j|d_P(e_j)$. Por lo que, probando que $d_P(e_j) = 0$, para todo $j \in I\!N$, el resultado se extiende a todo elemento de soporte finito. Luego, por continuidad y densidad se tiene que $d_P(x) = 0$ para todo x en ℓ_p.

Un Bosquejo: Por Proposición 4.2 (i), se tiene que $d_P(e_1) \leq |P(e_1)|^{\frac{1}{3}} = 1$. Estimaremos $d_P(e_1)$ usando $k-$ *cadenas* con "$k-$ *ceros*".

> $1-$ *cadena* con "$1-$ *cero*" : Sea $z_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \ldots)$. Entonces $P(z_1) = 0$ y $d_P(e_1) \leq |P(e_1 - z_1)|^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} < 1$.
>
> $2-$ *cadenas* con "$2-$ *ceros*" : Sean $z_1 = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, \ldots)$, y $z_2 = (\frac{2}{4}, -\frac{2}{4}, 0, 0, 0, \ldots)$. Luego, $P(z_1 - z_2) = P(z_2) = 0$ y $d_P(e_1) \leq |P(e_1 - z_1)|^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4} < \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.
>
> $3-$ *cadenas* con "$3-$ *ceros*" : Sean $z_1 = (\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0, \ldots)$, $z_2 = (\frac{4}{6}, -\frac{2}{6}, -\frac{2}{6}, 0, 0, \ldots)$ y $z_3 = (\frac{2}{6}, -\frac{2}{6}, 0, 0, \ldots)$.
> Así, $P(z_1 - z_2) = P(z_2 - z_3) = P(z_3) = 0$ y $d_P(e_1) \leq \frac{\sqrt[3]{6}}{6} < \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

Podríamos continuar en este sentido y obtener $d_P(e_1) \leq \frac{\sqrt[3]{2k}}{2k}$, eligiendo elementos de soporte finito. Si hacemos tender k a infinito se tiene el resultado deseado.

La Prueba: Obtendremos la misma estimación $d_P(e_1) \leq \frac{\sqrt[3]{2k}}{2k}$ con una sucesión doble de $2-$ *cadenas* con "$2-$ *ceros*".

Para cada $k \in I\!N$ se definen

$$z_1^k = (\tfrac{2k-1}{2k}, \quad -\tfrac{1}{2k}, \quad \ldots, \quad -\tfrac{1}{2k}, \quad -\tfrac{1}{2k}, \quad -\tfrac{1}{2k}, \quad -\tfrac{1}{2k}, \quad \ldots, \quad -\tfrac{1}{2k}, \quad 0, \ldots)$$
$$z_2^k = (\tfrac{2k-3}{2k}, \quad \tfrac{2k-5}{2k}, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2k}, \quad (*)\tfrac{1}{2k}, \quad -\tfrac{1}{2k}, \quad -\tfrac{1}{2k}, \quad \ldots, \quad -\tfrac{2k-3}{2k}, \quad 0, \ldots)$$

donde cada vector tiene sólo las primeras $2k$-coordenadas diferentes de cero y $(*)$ marca la k-ésima. Para esta sucesión de $2-$ *cadenas* tenemos que $P(z_1^k - z_2^k) = P(z_2^k) = 0$ y $d_P(e_1) \leq |P(e_1 - z_1^k)|^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2k}}{2k}$.

Notar que esta sucesión doble puede ser corrida a la j-ésima coordenada para mostrar que $d_P(e_j) = 0$ y esto vale cualquiera sea $j \in I\!N$. ∎

Proposición 4.12 *Sea $n \in I\!N$, $1 \leq p < \infty$, n un entero impar, $n \geq p$ y $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$ con $(a_j)_{j \in I\!N} \in \ell_\infty$. Si P no es w-continuo sobre acotados de ℓ_p, entonces $d_P(x) = 0$ para todo $x \in \ell_p$.*

Dem. Asumiremos que $a_j \neq 0$ para todo $j \in I\!N$. Definamos las sucesiones $(z_1^k)_{k \in I\!N}$ y $(z_2^k)_{k \in I\!N}$ como en Lema 4.11 y pongamos para cada $j \in I\!N$, $b_j = a_j^{-\frac{1}{n}}$ y $\tilde{z}_1^k = (b_j (z_1^k)_j)$, $\tilde{z}_2^k = (b_j (z_2^k)_j)$.

Para esta sucesión de $2-$*cadenas* tenemos que $P(\tilde{z}_1^k - \tilde{z}_2^k) = P(\tilde{z}_2^k) = 0$ y $d_P(b_1 e_1)$ $\leq |P(b_1 e_1 - \tilde{z}_1^k)|^{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[n]{2k}}{2k}$. Como $d_P(b_1 e_1) = |b_1| d_P(e_1)$ resulta $d_P(e_1) = 0$.

Esta sucesión doble puede trasladarse a la j-ésima coordenada para mostrar que $d_P(e_j) = 0$ para todo $j \in I\!N$.

Como d_P es una seminorma se anula sobre todo elemento de soporte finito y nuevamente, por continuidad y densidad $d_P(x) = 0$ para todo $x \in \ell_p$.

Por ser P no w-continuo sobre acotados entonces $n > 1$ y existen infinitos valores de j para los que $a_j \neq 0$. Si $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j} x_{m_j}^n$, con $a_{m_j} \neq 0$, una pequeña modificación de la sucesión doble ya definida da el resultado. En efecto, es suficiente trasladar las coordenadas no nulas de z_1^k y z_2^k sobre las coordenadas de índices m_j *'s* para obtener que $d_P(e_{m_j}) = 0$ para todo m_j. Para los demás valores de j, $P(e_j) = 0$ y por lo tanto también lo es $d_P(e_j)$. Entonces $d_P(e_j) = 0$ para todo $j \in I\!N$ de donde se sigue el resultado. ∎

Observación 4.13 Si P es un polinomio n-homogéneo ortogonalmente aditivo sobre ℓ_p, w-continuo sobre acotados, n un entero impar $n \geq p$, entonces $d_P(x) \neq 0$ en muchos casos. Por ejemplo, para toda $\varphi \in \ell_p'$ y para todo $n \in I\!N$ $d_{(\varphi^n)}(x) = |\varphi(x)|$.

El siguiente lema muestra el rol importante que juegan, en esta topología, los ceros de los polinomios. Este resultado nos permitirá describir, más adelante, d_P para $P \in P(^n E)$ polinomio ortogonalmente aditivo cuando n es un entero par.

Lema 4.14 *Sea E un espacio de Banach real y sea P un polinomio n-homogéneo sobre E, entonces*

$$d_P(x) = d_P(x+z) \quad \textit{para todo } z \ / \ P(z) = 0, \quad \textit{para todo } x \in E.$$

Dem. Siempre que $P(z) = 0$, se tiene que $d_P(z) = 0$. Por ser d_P una seminorma, para cualquier $x \in E$ tenemos que $d_P(x + z) \leq d_P(x)$ y $d_P(x) = d_P((x + z) + (-z)) \leq d_P(x + z)$; de donde se sigue la igualdad. ■

Antes de proceder con el caso de grado par mostraremos otra prueba de la Proposición 4.12 basada en el lema anterior.

Corolario 4.15 *Proposición 4.12, una segunda prueba.*

Dem. Como antes, es suficiente probar que $d_P(e_j) = 0$, para todo $j \in I\!N$.

1^{er} *Caso:* $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n$.

Para todo x de la forma $\sum_{j=1}^{N} x_j e_j$ consideremos $z = x_N e_{N-1} - x_N e_N$. Como $P(z) = 0$ tenemos que $d_P(x) = d_P(\tilde{x})$ donde $\tilde{x} = x + z = (x_1, \ldots, x_{N-1} + x_N, 0, \ldots)$ con sólo las $(N-1)$ primer coordenadas no nulas. Procediendo inductivamente en $(N-1)$ pasos tenemos que $d_P(x) = d_P((\sum_{j=1}^{N} x_j)e_1) = |\sum_{j=1}^{N} x_j| d_P(e_1)$.

Apliquemos este resultado a $x = e_1 + \cdots + e_N$, entonces $N d_P(e_1) = d_P(x) \leq |P(x)|^{\frac{1}{n}} = N^{\frac{1}{n}}$, cualquiera sea $N \in I\!N$. Como $n > 1$, $d_P(e_1) = 0$ y por ser $P(e_j - e_1) = 0$ el Lema 4.14 nos permite asegurar que $d_P(e_j)$ para todo $j \in I\!N$.

2^{do} *Caso:* $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$, con P no w-continuo sobre acotados. Como hicimos anteriormente podemos suponer que $a_j \neq 0$, para todo $j \in I\!N$. Pongamos $b_j = a_j^{\frac{1}{n}}$ y $z = \frac{b_j}{b_k} e_k - e_j$ luego, $P(z) = 0$. Con cálculos similares a los hechos en el primer caso se obtienen las siguientes dos igualdades

(a) $d_P(e_j) = |\dfrac{b_j}{b_k}| d_P(e_k)$ y

(b) $d_P(\displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j e_j) = |\dfrac{\sum_{j=1}^{N} b_j x_j}{b_1}| d_P(e_1)$.

De (a) queda claro que es suficiente probar que $d_P(e_1) = 0$. Si aplicamos (b) al vector $x = e_1 + \ldots + e_N$, tenemos

$$|\frac{\sum_{j=1}^N b_j}{b_1}|d_P(e_1) = d_P(e_1+\cdots+e_N) \leq |P(e_1+\cdots+e_N)|^{\frac{1}{n}} = |\sum_{j=1}^N b_j^n|^{\frac{1}{n}} \tag{4.1}$$

Ahora estudiamos el comportamiento del límite $L_N(b) = \dfrac{|\sum_{j=1}^N b_j^n|^{\frac{1}{n}}}{|\sum_{j=1}^N b_j|}$.

Para toda sucesión $\alpha = (\alpha_n)$ verificando $\alpha_n \to l \neq 0$ se tiene que $L_N(\alpha) \to 0$ si $N \to \infty$. Afirmamos que $d_P(e_1) = 0$ o P es w-continuo sobre acotados.

En efecto, supongamos que $d_P(e_1) \neq 0$. Entonces, $b_j \to 0$. Una explicación para este hecho es la que sigue. Si no fuera así, existe subsucesión acotada de $(b_j)_{j\in I\!N}$, digamos $\tilde{b} = (b_{j_k})_{k\in I\!N}$ que converge a algún valor $l \neq 0$. Luego $L_N(\tilde{b}) \to 0$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $b_{j_1} = b_1$. Así, si aplicamos (b) a $x = e_{j_1} + \ldots + e_{j_N}$, se tiene de 4.1 que $d_P(e_1) = 0$; lo que contradice nuestro supuesto.

Entonces $b_j = a_j^{\frac{1}{n}} \to 0$ y P resulta w-continuo sobre acotados en contradicción con las hipótesis. Finalmente concluímos que $d_P(e_1) = 0$ como queríamos probar. ∎

Ahora procedemos con el caso n par.

Proposición 4.16 *Sea $n \in I\!N$, $1 \leq p < \infty$, n un entero par, $n \geq p$ y $P(x) = \sum_{j=1}^\infty a_j x_j^n$ con $(a_j)_{j\in I\!N} \in \ell_\infty$.*

(a) Si la función sign(a_j), $a_j \neq 0$, es constante, entonces $d_p(x) = |P(x)|^{\frac{1}{n}}$ para todo $x \in \ell_p$.

(b) Si existe un par $i \neq j$ tal que $a_i,\ a_j \neq 0$ y sign $(a_i) \neq$ sign(a_j), entonces $d_p \equiv 0$ en ℓ_p.

Dem. Para el primer caso supongamos que, dado $j \in I\!N$, sing$(a_j) = 1$ o $a_j = 0$. Definimos $\|x\|_a = (\sum_{j=1}^\infty a_j x_j^n)^{\frac{1}{n}} = (\sum_{j=1}^\infty (\sqrt[n]{a_j} x_j)^n)^{\frac{1}{n}}$. Por la desigualdad de Minkowski obtenemos, para cualquiera de las sumas involucradas en la definición de d_P, que

$$\begin{aligned} |P(x-z_1)|^{\frac{1}{n}} + \quad & |P(z_1-z_2)|^{\frac{1}{n}} + \cdots + |P(z_k)|^{\frac{1}{n}} \\ & = \|x-z_1\|_a + \|z_1-z_2\|_a + \cdots + \|z_k\|_a \geq \|x\|_a, \end{aligned}$$

Luego, $\|x\|_a \leq d_p(x) \leq |P(x)|^{\frac{1}{n}} = \|x\|_a$; de donde se obtiene la igualdad.

Para el segundo caso, sean a_i y a_k dos elementos cualesquiera, no nulos, de la sucesión $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con signos diferentes. Digamos que $a_i > 0$ y $a_k < 0$.

Sean $x = \frac{1}{\sqrt[n]{a_i}}\, e_i$, $z = \frac{1}{\sqrt[n]{a_i}}\, e_i + \frac{1}{\sqrt[n]{-a_k}}\, e_k$ y $w = \frac{1}{\sqrt[n]{a_i}}\, e_i - \frac{1}{\sqrt[n]{-a_k}}\, e_k$. Es claro que ambos, z y w, son ceros de P.

Por Lema 4.14, $\frac{1}{\sqrt[n]{a_i}}\, d_P(e_i) = d_P(x) = d_P(x+z+w) = 3\frac{1}{\sqrt[n]{a_i}}\, d_P(e_i)$ con lo cual $d_P(e_i) = 0$.

Por otra parte, $\frac{1}{\sqrt[n]{a_i}}\, d_P(e_i) = d_P(x) = d_P(x-z) = \frac{1}{\sqrt[n]{-a_k}}\, d_P(e_k)$ entonces $d_P(e_k) = 0$.

Finalmente, para todos aquellos $j's$ tal que $a_j = 0$ tenemos que $P(e_j) = 0$ y en consecuencia $d_P(e_j) = 0$. Así $d_P(e_j) = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, lo que concluye la prueba. ∎

Hemos descripto d_P para todo P polinomio n-homogéneo ortogonalmente aditivo que no es w-continuo sobre acotados de ℓ_p. Ahora estamos en condiciones de caracterizar la τ-convergencia de redes acotadas en estos espacios.

Teorema 4.17 *Sea $E = \ell_p$, $1 \le p < \infty$. Sea k el menor entero verificando $p \le 2k$. Entonces, para cualquier red acotada $(x_\alpha)_\alpha$ y $x \in E$*

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \quad \textit{si y solo si} \quad \begin{cases} (i) \;\; x_\alpha \xrightarrow{w} x \quad y \\ (ii) \;\; \|x_\alpha - x\|_{2k} \to 0 \end{cases}$$

Dem. Todo elemento φ de E' es un polinomio ortogonalmente aditivo. Como $|\varphi(a)| = d_\varphi(a)$ entonces se tiene (i). Para verificar la segunda condición notar que $p \le 2k$, entonces, $P(x) = \sum_{j=1}^\infty x_j^{2k}$ es un polinomio ortogonalmente aditivo $2k$-homogéneo bien definido sobre ℓ_p. Además no es w-continuo sobre acotados. Por Proposición 4.16, $\|x_\alpha - x\|_{2k} = |P(x_\alpha - x)|^{\frac{1}{2k}} = d_P(x_\alpha - x)$ que converge a cero por hipótesis.

Recíprocamente, sea P un polinomio ortogonalmente aditivo n-homogéneo sobre ℓ_p. Si $n < p$ entonces P es w-continuo sobre acotados y $d_P(x_\alpha - x) \to 0$.

Sean $n \ge p$ y $P(x) = \sum_{j=1}^\infty a_j x_j^n$, con $(a_j)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$.

Si n es impar, por Proposición 4.12, P es w-continuo sobre acotados o $d_P \equiv 0$. Luego, $d_P(x_\alpha - x) \to 0$.

Si n es par, por Proposición 4.16, P es w-continuo sobre acotados, $d_P \equiv 0$ o $d_P(x) = |P(x)|^{\frac{1}{n}}$ para todo $x \in \ell_p$. Para esta última situación, sea $A > 0$ una constante tal que $|a_j|^{\frac{1}{n}} \leq A$ para todo $j \in I\!N$. Así, para todo $y \in \ell_p$ (por ser $p \leq 2k \leq n$) tenemos que

$$d_P(y) \leq |P(y)|^{\frac{1}{n}} = |\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j^n|^{\frac{1}{n}} \leq A\|y\|_n \leq A\|y\|_{2k}. \tag{4.2}$$

Esta desigualdad es todo lo que necesitamos para finalizar la demostración. ∎

Corolario 4.18 *Sea $E = \ell_p$, $p = 1$ o $p \in (2k-1, 2k]$ para algún $k \in I\!N$. Entonces, para toda red acotada $(x_\alpha)_\alpha$ y $x \in E$*

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \quad \textit{si y solo si} \quad x_\alpha \xrightarrow{wp_o} x.$$

Dem. Como en Teorema 4.17, no analizaremos el caso $n < p$ debido a la w-continuidad. Sea $n \geq p$ y $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$, con $(a_j)_{j \in I\!N} \in \ell_\infty$.

Elegimos, como antes, $A > 0$ tal que $|a_j|^{\frac{1}{n}} \leq A$ para todo $j \in I\!N$. Si $p \neq 1$ entonces $n \geq p$, $n \geq 2k \geq p$. Este k es el menor entero que verifica que $p \leq 2k$. La desigualdad $|P(y)|^{\frac{1}{n}} \leq A\|y\|_{2k}$ y el Teorema 4.17 nos permiten asegurar que $|P(x_\alpha - x)| \to 0$.

Si $p = 1$ y $n = 1$, P es una forma lineal, entonces $x_\alpha \xrightarrow{w} x$. Si $n \geq 2$, el resultado se sigue de la desigualdad $|P(y)|^{\frac{1}{n}} \leq A\|y\|_2$ y el Teorema 4.17.

La recíproca es cierta gracias a la desigualdad $d_P(x) \leq |P(x)|^{\frac{1}{n}}$. ∎

Observación 4.19 *Sea $E = \ell_p$, con $p = 2k+1$ para algún $k \in I\!N$. Entonces la wp_o-topología es estrictamente más fuerte que la τ-topología .*

Dem. Consideremos $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^p$, que resulta un polinomio ortogonalmente aditivo p-homogéneo bien definido sobre ℓ_p. Sea $(x_m)_{m \in I\!N}$ la sucesión $x_m = \frac{1}{m}e_1 + \frac{1}{m}e_2 + \ldots + \frac{1}{m}e_{m^p}$.

Así $\|x_m\|_p = |P(x_m)| = 1$ y $\|x_m\|_{2k+2} = (\frac{1}{m})^{\frac{1}{2k+2}}$, donde $2k+2$ es el menor entero par mayor que p. La sucesión de soporte finito (x_m) es acotada en ℓ_p entonces, es w-convergente a cero. Luego, por Teorema 4.17 es convergente a cero en la τ-topología pero no lo es en la wp_o-topología, puesto que $P(x_m) = 1$. ∎

Terminaremos esta sección con algunas observaciones finales que se deducen del Lema 4.14.

Corolario 4.20 *Sean E un espacio de Banach real y P un polinomio n-homogéneo sobre E. Si $x \in \overline{gen[P^{-1}(0)]}$ entonces $d_P(x) = 0$. En consecuencia si $gen[P^{-1}(0)]$ es un subespacio denso en E, entonces $d_P \equiv 0$ en E.*

Dem. Fijemos $x \in \overline{\text{gen}[P^{-1}(0)]}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $w = \sum_{j=1}^{M} z_j$ tal que $P(z_j) = 0$, para todo $j = 1, \dots, M$ y $\|x - w\| < \varepsilon$. Por Lema 4.14 es suficiente notar que

$$d_P(x) = d_P(x - w) \leq \|P\|^{\frac{1}{n}} \|x - w\| < \|P\|^{\frac{1}{n}} \varepsilon. \blacksquare$$

Observación 4.21 *Si P es un polinomio $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$, con n entero impar, $n \geq p$; P no w-continuo sobre acotados. Entonces gen[$P^{-1}(0)$] es denso en ℓ_p.*

Dem. Mostraremos que la base canónica de ℓ_p está contenida en gen[$P^{-1}(0)$].

Para aquellos $j's$ con $a_j \neq 0$ pongamos $b_j = a_j^{-\frac{1}{n}}$. Ahora consideremos, para los primeros índices j_1, j_2, j_3 con $a_j \neq 0$, los vectores $v_1 = b_{j_1} e_{j_1} - b_{j_2} e_{j_2}$, $v_2 = b_{j_2} e_{j_2} - b_{j_3} e_{j_3}$ y $v_3 = b_{j_1} e_{j_1} + b_{j_2} e_{j_2} - \sqrt[n]{2} b_{j_3} e_3$. Los vectores $e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}$ pertenecen al subespacio gen[$P^{-1}(0)$] puesto que se obtienen por combinaciones lineales de v_1, v_2 y v_3.

Trasladando esta construcción a los siguientes tres lugares para los que $a_j \neq 0$ y procediendo en este sentido, tenemos que todo elemento de la base canónica de ℓ_p pertenece al conjunto gen[$P^{-1}(0)$] puesto que $P(e_j) = 0$ para aquellos $j's$ con $a_j = 0$. $\blacksquare$

Observación 4.22 *Para $E = \ell_1$ y $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^3$ la densidad del subespacio gen[$P^{-1}(0)$] es suficiente pero no necesaria para determinar que $d_P \equiv 0$ en ℓ_p.*

La sucesión doble definida en la demostración del Lema 4.11 verifica $P(z_1^k - z_2^k) = P(z_2^k) = 0$.

Luego, por Lema 4.14, $d_P(e_1) = d_P(e_1 - z_1^k) \leq \frac{\sqrt[3]{2k}}{2k}$ y $\|e_1 - z_1^k\|_1 = 1$, para todo $k \in I\!N$; obteniendo una aproximación al valor de $d_P(e_1)$ por elementos de la esfera con centro en e_1 y radio 1.

4.4 τ sobre los espacios L_p.

En esta sección investigaremos la topología τ sobre los espacios $L_p([0,1],\mu)$ con μ la medida de Lebesgue. Usaremos la representación dada en Ejemplo 4.8 para el espacio de polinomios ortogonalmente aditivos sobre espacios L_p, lo que nos llevará al resultado principal, Teorema 4.23. Como corolario se obtiene una caracterización de la τ-convergencia sobre acotados en L_p.

Teorema 4.23 *Sea $E = L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$. Para todo $P \neq 0$ polinomio n-homogéneo ortogonalmente aditivo sobre E (i.e. $P(x) = \int_0^1 \xi x^n d\mu$ on X, $n \leq p$,) se tiene:*

(a) Si n es un entero impar y $1 < n$ entonces, $d_P \equiv 0$, en $L_p[0,1]$.

(b) Si n es un entero par entonces, si $\xi \geq 0$ a.e. o $\xi \leq 0$ a.e. $d_P(x) = |P(x)|^{\frac{1}{n}}$, para todo $x \in L_p[0,1]$. En otro caso $d_P \equiv 0$ en $L_p[0,1]$.

Dem. Por Ejemplo 4.8, todo polinomio ortogonalmente aditivo sobre L_p puede escribirse, como mencionamos en el enunciado, $P(x) = \int_0^1 \xi x^n d\mu$ con $\xi \in L_{\frac{p}{p-n}}$ si $n < p$, $\xi \in L_\infty$ si $n = p$ y $P \equiv 0$ para $n > p$.

Para probar (a) partiremos la demostración en tres pasos. Damos la construcción del Paso 1 por ser el ejemplo que nos llevó a la construcción general. De hecho, sólo utilizaremos las ideas de éste en los pasos siguientes. Notar que para $n = 1$ el polinomio P es una forma lineal y $d_P(x) = |P(x)|$.

Paso 1: $\xi \equiv 1, n = 3, 1 < 3 \leq p$.

Probaremos que si $P(x) = \int_0^1 x^3 d\mu$ entonces $d_P(x) = 0$ para todo $x \in L_p[0,1]$.

Cada elemento h_j de la base de Haar de L_p es un cero de P si $j \neq 1$. Sólo resta probar que $d_P(h_1) = 0$. Pongamos $\overline{1} = h_1 = \chi_{[0,1]}$ y sea $q > 1$. Para cada $m \in I\!N$ definimos

$$h_m = \begin{cases} \frac{1}{2} & en \quad (\frac{1}{q^m}, 1] \\ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{q^m - 1} & en \quad [0, \frac{1}{q^m}] \end{cases}$$

así, $P(h_m) = 0$.

Como $P(\overline{1}-h_m) = (1+\frac{1}{2}\sqrt[3]{q^m-1})^3\frac{1}{q^m} + (\frac{1}{2})^3(1-\frac{1}{q^m}) = (\frac{1}{\sqrt[3]{q^m}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{1-\frac{1}{q^m}})^3$ y $d_P(\overline{1}) \leq |P(\overline{1}-h_m)|^{\frac{1}{3}}$, para todo $m \in I\!N$, haciendo tender m a infinito obtenemos la primer estimación, $d_P(\overline{1}) \leq \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

Ahora fijemos $m \in I\!N$ y partamos el intervalo $[0,1]$ en los siguientes cuatro subintervalos, $I_1 = (\frac{1}{q^m},1], I_2 = (\frac{1}{q^{m+1}},\frac{1}{q^m}], I_3 = (\frac{1}{q^{m+2}},\frac{1}{q^{m+1}}], I_4 = [0,\frac{1}{q^{m+2}}]$. Definimos las funciones escalonadas

$$h_1^m = \begin{cases} \frac{3}{4} & en \quad I_1 \\ -\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q}{q-1}} & en \quad I_2 \\ -\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^2}{q-1}} & en \quad I_3 \\ -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(q^m-1)q^2} & en \quad I_4 \end{cases}, \quad h_2^m = \begin{cases} \frac{1}{4} & en \quad I_1 \\ \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q}{q-1}} & en \quad I_2 \\ -\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^2}{q-1}} & en \quad I_3 \\ -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(q^m-1)q^2} & en \quad I_4 \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra que $P(h_1^m - h_2^m) = P(h_2^m) = 0$ y $P(\overline{1}-h_1^m) \longrightarrow 4(\frac{1}{4})^3$. Como $d_P(\overline{1}) \leq |P(\overline{1}-h_1^m)|^{\frac{1}{3}}$ tenemos la segunda cota $d_P(\overline{1}) \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

Para el caso general fijamos $k, m \in I\!N$. Hacemos una partición de $[0,1]$ según los $2k$ subintervalos $I_1 = (\frac{1}{q^m},1]$, $I_2 = (\frac{1}{q^{m+1}},\frac{1}{q^m}], \ldots, I_{2k} = [0,\frac{1}{q^{m+2k-2}}]$ y definimos las funciones escalonadas h_1^m, h_2^m como sigue;

$$h_1^m = \begin{cases} \frac{2k-1}{2k} & en \quad I_1 \\ -\frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q}{q-1}} & en \quad I_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ -\frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^{k-2}}{q-1}} & en \quad I_{k-1} \\ -\frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^{k-1}}{q-1}} & en \quad I_k \\ -\frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^{k}}{q-1}} & en \quad I_{k+1} \\ -\frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^{k+1}}{q-1}} & en \quad I_{k+2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ -\frac{1}{2k}\sqrt[3]{(q^m-1)q^{2k-2}} & en \quad I_{2k} \end{cases}; \quad h_2^m = \begin{cases} \frac{2k-3}{2k} & en \quad I_1 \\ \frac{2k-5}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q}{q-1}} & en \quad I_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^{k-2}}{q-1}} & en \quad I_{k-1} \\ \frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^{k-1}}{q-1}} & en \quad I_k \\ -\frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^{k}}{q-1}} & en \quad I_{k+1} \\ -\frac{1}{2k}\sqrt[3]{\frac{(q^m-1)q^{k+1}}{q-1}} & en \quad I_{k+2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ -\frac{2k-3}{2k}\sqrt[3]{(q^m-1)q^{2k-2}} & en \quad I_{2k} \end{cases}$$

Cuando m tiende a infinito, puede verse que $P(\overline{1}-h_1^m)$ converge a $2k(\frac{1}{2k})^3$, para cada k fijo. Por otra parte, tenemos que $P(h_1^m - h_2^m) = P(h_2^m) = 0$. Entonces, se obtiene la cota $d_P(\overline{1}) \leq \frac{\sqrt[3]{2k}}{2k}$, para todo $k \in I\!N$. De aquí que $d_P(\overline{1}) = 0$.

Así d_P es cero sobre todos los elementos de una base y un razonamiento como en Lema 4.11 concluye la prueba en este caso.

Paso 2: $\xi > 0$.

Probaremos que $d_P(\overline{1}) = 0$ y luego mostraremos como el mismo argumento puede aplicarse a toda función característica $\chi_{[a,b]}$ con $0 \leq a < b \leq 1$. Como el conjunto generado por combinaciones lineales de funciones características de este tipo es denso en L_P, podemos concluir por continuidad y densidad como en Lema 4.11.

Primero notemos que $\xi \in L_r[0,1]$ y $\xi > 0$ con $r = \frac{p}{p-n}$ o $r = \infty$, si $p = n$. Entonces $\xi \in L_1[0,1]$ y $\int_\alpha^\beta \xi d\mu > 0$ para todo $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

Sea $(t_m)_{m \in I\!N}$ una sucesión estrictamente decreciente de números en $(0,1)$ tal que $t_m \to 0$. Llamemos $T_m(1) = \int_{t_m}^1 \xi d\mu$, $T_m(2) = \int_0^{t_m} \xi d\mu$. Luego, $T_m(1) \to P(\overline{1})$ y $T_m(2) \to 0$.

Para cada $m \in I\!N$ se define

$$h^m = \begin{cases} \frac{1}{2} & en \quad (t_m, 1] \\ -\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{T_m(1)}{T_m(2)}} & en \quad [0, t_m] \end{cases}$$

de modo que $P(h^m) = 0$.

Como $P(\overline{1} - h^m) = (\frac{1}{2})^n T_m(1) + (\sqrt[n]{T_m(2)} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{T_m(1)}\ )^n$ y $d_P(\overline{1}) \leq |P(\overline{1} - h_1^m)|^{\frac{1}{n}}$ para todo $m \in I\!N$ obtenemos, tomando límite sobre m, que $d_P(\overline{1}) \leq \frac{\sqrt[n]{2}}{2} |P(\overline{1})|^{\frac{1}{n}}$.

Ahora, para cada $k \in I\!N$ fijo, consideramos la partición del intervalo $[0,1]$ dada por $\Pi_{2k} = \{0, t_{m+2k-2}, \ldots, t_{m+1}, t_m, 1\}$.

Procedemos como antes. Llamemos $T_m(1) = \int_{t_m}^1 \xi d\mu$, $T_m(2) = \int_{t_{m+1}}^{t_m} \xi d\mu, \ldots,$ $T_m(2k) = \int_0^{t_{m+2k-2}} \xi d\mu$. Luego, $T_m(1) \to P(\overline{1})$ y $T_m(j) \to 0$, para todo $2 \leq j \leq 2k$, para cada k fijo, si m tiende a infinito.

Pongamos I_j el intervalo que soporta $T_m(j)$ y $w_j = \sqrt[n]{\frac{T_m(1)}{T_m(j)}}$ para todo $j \geq 2$. Definimos $(h_1^m)_{m \in I\!N}$ y $(h_2^m)_{m \in I\!N}$ con la siguiente tabla

$$\begin{array}{ccccccccc} & I_1 & I_2 & \dots & I_{k-1} & I_k & I_{k+1} & \dots & I_{2k} \\ h_1^m: & \frac{2k-1}{2k} & -\frac{1}{2k}w_2 & \dots & -\frac{1}{2k}w_{k-1} & -\frac{1}{2k}w_k & -\frac{1}{2k}w_{k+1} & \dots & -\frac{1}{2k}w_{2k} \\ h_2^m: & \frac{2k-3}{2k} & \frac{2k-5}{2k}w_2 & \dots & \frac{1}{2k}w_{k-1} & \frac{1}{2k}w_k & -\frac{1}{2k}w_{k+1} & \dots & -\frac{2k-3}{2k}w_{2k} \end{array}$$

Otra vez h_1^m y h_2^m verifican las condiciones $P(h_1^m - h_2^m) = P(h_2^m) = 0$. También,

$$P(\bar{1} - h_1^m) = \frac{1}{2k}T_m(1) + (\sqrt[n]{T_m(2)} + \frac{1}{2k}\sqrt[n]{T_m(1)})^n + \cdots + (\sqrt[n]{T_m(2k)} + \frac{1}{2k}\sqrt[n]{T_m(1)})^n,$$

para todo $m \in I\!N$ y k fijo.

Como $d_P(\bar{1}) \leq |P(\bar{1} - h_1^m)|^{\frac{1}{n}}$ para todo $m \in I\!N$ tenemos que $d_P(\bar{1}) \leq \dfrac{\sqrt[n]{2k}}{2k}|P(\bar{1})|^{\frac{1}{n}}$ para todo $k \in I\!N$ luego, por ser $n > 1$, $d_P(\bar{1}) = 0$.

Para mostrar que $d_P(\chi_{[a,b]}) = 0$ es suficiente considerar una sucesión conveniente $(t_m)_{m\in I\!N} \subset (a,b)$ y repetir la construcción para la nueva partición. En esta situación la estimación obtenida es $d_P(\chi_{[a,b]}) \leq \dfrac{\sqrt[n]{2k}}{2k}|P(\chi_{[a,b]})|^{\frac{1}{n}}$, para todo $k \in I\!N$.

Paso 3: $\xi \not\equiv 0$ arbitraria.

Probaremos que $d_P(\chi_{[a,b]}) = 0$ para todo $[a,b]$ subintervalo de $[0,1]$.

Notar que en el Paso 2 sólo usamos la condición $\xi > 0$ para asegurarnos que $T_m(j) \neq 0$ para todo $2 \leq j \leq 2k$, lo que hizo posible la construcción de las funciones h_1^m y h_2^m. Para proceder en este sentido basta probar la existencia de una sucesión $(t_m)_{m\in I\!N}$ que verifique una condición similar. Observar que también es necesario que la sucesión $(t_m)_{m\in I\!N}$ converja al extremo izquierdo del intervalo. Para la construcción de dicha sucesión usaremos el siguiente resultado

Lema 4.24 *[R] (Lemma 8, p. 105.) Para toda $\xi \in L_1[a,b]$ consideramos $\gamma(t) = \int_a^t \xi(s)d\mu(s)$, $t \in [a,b]$. Si $\gamma(t) = 0$ para todo t, entonces $\xi \equiv 0$ en casi todo punto del intervalo $[a,b]$.*

Sea $h = \chi_{[a,b]}$ y $\alpha = \sup\{\delta \geq a \ / \ \xi|_{[a,\delta]} \equiv 0 \text{ a.e}\}$. Si $\alpha > a$, $\chi_{[a,\alpha]}$ es un cero de P y por Lema 4.14, $d_P(\chi_{[a,b]}) = d_P(\chi_{[\alpha,b]})$ entonces deberíamos estimar $d_P(\chi_{[\alpha,b]})$ donde existe un $t_0 > \alpha$ tal que $\xi|_{[\alpha,t_0]} \not\equiv 0$. Para simplificar notación asumiremos que $\alpha = a = 0$, entonces $\xi|_{[0,t_0]} \not\equiv 0$.

Pongamos $\gamma(t) = \int_0^t \xi(s)d\mu(s)$, para $t \in [0, t_0]$. Ahora, podemos asegurar que existe $t_1 \leq t_0$ tal que $\gamma(t_1) \neq 0$ y $\xi|_{[0,t]} \not\equiv 0$ para todo $t \in (0, t_1)$.

Para elegir el siguiente elemento de la sucesión pongamos $I_1 = [0, \frac{t_1}{2}]$. Existe $w \in I_1$ con $\gamma(w) \neq 0$. Notar que γ es una función continua definida en I_1, intervalo conexo, $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(w) \neq 0$. Luego γ no es una función escalonada y existe $t_2 \in I_1$ tal que $\gamma(t_2) \neq 0$ y $\gamma(t_2) \neq \int_0^{t_1} \xi(s)d\mu(s)$. Entonces $\gamma(t_2) \neq 0$ y $\int_{t_2}^{t_1} \xi(s)d\mu(s) = \gamma(t_2) - \int_0^{t_1} \xi(s)d\mu(s) \neq 0$.

Sea $I_2 = [0, \frac{t_2}{2}]$. Notar que t_2 y por tanto I_2 están ambos en las condiciones de t_1 e I_1. Ahora, podemos elegir $t_3 \in I_2$ verificando $\gamma(t_3) \neq 0$ y $\int_{t_3}^{t_2} \xi(s)d\mu(s) \neq 0$.

Un procedimiento inductivo provee una sucesión $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $0 < t_{m+1} \leq \frac{t_m}{2}$, con $\gamma(t_{m+1}) \neq 0$ y $\int_{t_{m+1}}^{t_m} \xi \; d\mu \neq 0$. Claramente $t_m \to 0$, y tiene las propiedades deseadas. Esto concluye con la prueba de la afirmación (a).

Para probar (b) consideramos la descomposición natural de la función $\xi \not\equiv 0$, $\xi = \xi^+ - \xi^-$ y llamamos $A^+ = supp\ \xi^+$, $A^- = supp\ \xi^-$, $A_0 = [0,1] - (A^+ \cup A^-)$.

1^{er} *Caso:* $\mu(A^+) = 0$ o $\mu(A^-) = 0$.

Mostraremos que $d_P(x) = |P(x)|^{\frac{1}{n}}$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\mu(A^-) = 0$. Entonces $\mu(A^+) \neq 0$ puesto que $\xi \not\equiv 0$.

Como $P(x) = \int_{A^+} \xi^+ x^n d\mu$, considerando la función $\sqrt[n]{\xi^+}$ definimos, como en Proposición 4.16, $\|x\|_\xi = (\int_{A^+} (\sqrt[n]{\xi^+} x)^n d\mu)^{\frac{1}{n}} = |P(x)|^{\frac{1}{n}}$. Gracias a la desigualdad de Minkowski tenemos que

$$\begin{aligned} |P(x - z_1)|^{\frac{1}{n}} + \quad & |P(z_1 - z_2)|^{\frac{1}{n}} + \cdots + |P(z_k)|^{\frac{1}{n}} \\ & = \|x - z_1\|_\xi + \|z_1 - z_2\|_\xi + \ldots + \|z_k\|_\xi \geq \|x\|_\xi \end{aligned}$$

Así $|P(x)|^{\frac{1}{n}} = \|x\|_\xi \leq d_P(x) \leq |P(x)|^{\frac{1}{n}}$.

2^{do} *Caso:* $\mu(A^+) > 0$ y $\mu(A^-) > 0$.

Probaremos que $d_P \equiv 0$. Para esto basta mostrar que $d_P(h) = 0$ para toda función $h = \chi_{[a,b]}$.

Pongamos $p_1 = \mu(A^+ \cap [a,b])$ y $p_2 = \mu(A^- \cap [a,b])$.

Si $p_1 = p_2 = 0$ entonces *supp* $h \subseteq A_0$. Luego $P(h) = 0$ y también lo es $d_P(h)$.

Si $p_1 > 0$ y $p_2 = 0$ entonces $\int_a^b \xi^+ d\mu > 0$. Como $\int_{A^-} \xi^- d\mu > 0$ existe una constante $\delta > 0$ tal que $\int_a^b \xi^+ d\mu = \delta \int_{A^-} \xi^- d\mu > 0$.

Consideremos $g_1 = h + \sqrt[n]{\delta}\chi_{A^-}$. P es ortogonalmente aditivo y g_1 es suma de funciones de soporte disjunto, entonces

$$\begin{aligned}
P(g_1) &= P(h) + \delta P(\chi_{A^-}) \\
&= \int_0^1 (\xi^+ - \xi^-)h\ d\mu + \delta \int_0^1 (\xi^+ - \xi^-)\chi_{A^-} d\mu \\
&= \int_0^1 \xi^+ h\ d\mu + \delta \int_0^1 (-\xi^-)\chi_{A^-} d\mu \\
&= \int_a^b \xi^+\ d\mu - \delta \int_{A^-} \xi^- d\mu = 0.
\end{aligned}$$

Análogamente, $g_2 = h - \sqrt[n]{\delta}\chi_{A^-}$ es un cero de P. Por Lema 4.14, $d_P(h) = d_P(h + g_1 + g_2) = 3d_P(h)$ entonces $d_P(h) = 0$.

Si $p_2 > 0$ y $p_1 = 0$ procedemos como arriba. Resta probar el resultado para $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$.

Existe una constante $\delta > 0$ tal que $\int_a^b \xi^+ d\mu = \delta \int_a^b \xi^- d\mu$. Procediendo como antes pero considerando las funciones $g_1 = h\chi_{A^+} + \sqrt[n]{\delta}\, h\chi_{A^-}$ y $g_2 = h\chi_{A^+} - \sqrt[n]{\delta}\, h\chi_{A^-}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
P(g_1) &= \int_0^1 \xi(h\chi_{A^+} + \sqrt[n]{\delta}\, h\chi_{A^-})^n d\mu \\
&= \int_0^1 (\xi^+ - \xi^-)(h\chi_{A^+} + \delta\, h\chi_{A^-})d\mu \\
&= \int_0^1 \xi^+ h\chi_{A^+} d\mu - \delta \int_0^1 \xi^- h\chi_{A^-} d\mu \\
&= \int_a^b \xi^+ d\mu - \delta \int_a^b \xi^- d\mu = 0.
\end{aligned}$$

Análogamente, $P(g_2) = 0$ y por tanto $d_P(h\ \chi_{A^+}) = d_P(h\ \chi_{A^-}) = 0$.

Escribimos $h = h\ \chi_{A^+} + h\ \chi_{A^-} + h\ \chi_{A_0}$. Como $d_P(h\ \chi_{A_0}) = 0$ y d_P es una seminorma tenemos que $d_P(h) \leq d_P(h\ \chi_{A^+}) + d_P(h\ \chi_{A^-}) + d_P(h\ \chi_{A_0}) = 0$. Esto finaliza la demostración del teorema.

∎

Corolario 4.25 *Sea $E = L_p[0,1],\ 1 \leq p < \infty$. Entonces, para toda red $(x_\alpha)_\alpha$ y $x \in E$*

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \quad \text{si y solo si} \quad \begin{cases} (i)\ x_\alpha \xrightarrow{w} x \quad y \\ (ii)\ \int_0^1 \xi(x_\alpha - x)^n d\mu \to 0, \quad \text{para todo } n \text{ entero par, } n \leq p, \\ \qquad\qquad \text{para todo } \xi \geq 0, \quad \xi \in L_{\frac{p}{p-n}} \ (\xi \in L_\infty \text{ si } n = p.) \end{cases}$$

Observación 4.26 *Sea $X = L_p[0,1],\ 1 \leq p < 2$ la topología τ y la topología w son la misma.*

En efecto, si P es un polinomio n-homogéneo ortogonalmente aditivo no nulo, entonces $n = 1$ y P es una forma lineal.

Teorema 4.27 *Sea $X = L_p[0,1],\ 1 \leq p < \infty$. Sea k el mayor entero que verifica $2k \leq p$. Entonces, para cualquier red acotada $(x_\alpha)_\alpha$ y $x \in X$*

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \quad \text{si y solo si} \quad \begin{cases} (i) \quad x_\alpha \xrightarrow{w} x \quad y \\ (ii) \quad \|x_\alpha - x\|_{2k} \to 0 \end{cases}$$

Dem. Toda $\varphi \in X'$ es un polinomio ortogonalmente aditivo, de donde se obtiene (i). Para la segunda condición notemos que $2k \leq p$ y por tanto $P(x) = \int_0^1 x^{2k} d\mu$ es un polinomio $2k$-homogéneo ortogonalmente aditivo, bien definido, sobre L_p. Por Teorema 4.23, $\|x_\alpha - x\|_{2k} = |P(x_\alpha - x)|^{\frac{1}{2k}} = d_P(x_\alpha - x)$ que converge a cero por hipótesis.

Para probar la implicación recíproca usaremos el Corolario 4.25. Es suficiente verificar la condición (ii) para cualquier ξ función continua, $\xi \geq 0$ pues este conjunto es denso en el cono positivo de $L_{\frac{p}{p-n}}$. Como $n \leq p$, n entero par, entonces $n \leq 2k$, además, por ser ξ una función continua, existe $A > 0$ tal que $\|\xi\|_\infty \leq A$. Ahora estamos en condiciones de obtener una desigualdad similar a (4.2) lo que concluye la prueba. ■

Corolario 4.28 *Sea $L_p[0,1],\ 1 \leq p < 2$ o $p \in [2k, 2k+1)$ para algún $k \in I\!N$. Entonces, para cualquier red acotada $(x_\alpha)_\alpha$ y $x \in X$*

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \quad \text{si y solo si} \quad x_\alpha \xrightarrow{wp_o} x.$$

Dem. La convergencia en la topología wp_o implica la convergencia en la topología τ. Recíprocamente, sea P un polinomio ortogonalmente aditivo sobre L_p, por Teorema 4.23. Si P no es una forma lineal y es de grado impar entonces $d_P \equiv 0$. Lo mismo sucede si P es de grado par cuando está dado por una función ξ de signo no constante. El caso restante corresponde a polinomios de la forma $P(x) = \int_0^1 \xi x^n d\mu$ con n par y $\xi \geq 0$ a.e. o $\xi \leq 0$ a.e. Como queremos probar que $\int_0^1 \xi(x_\alpha - x)^n d\mu \to 0$ un argumento, como el que hicimos en el corolario anterior, de considerar funciones continuas ξ de signo constante finaliza la demostración. ■

Observación 4.29 *Sea $X = L_p[0,1]$, con $p = 2k+1$ para algún $k \in I\!N$. Entonces la topología wp_o es estrictamente más fuerte que la topología τ.*

Dem. Sea $(x_m)_{m \in I\!N}$ la sucesión dada por $x_m = \sqrt[2k+1]{m}\,\chi_{[0,\frac{1}{m}]}$, que verifica $\|x_m\|_{2k+1} = 1$ y $\|x_m\|_{2k} = (\frac{1}{m^{2k+1}})^{\frac{1}{2k}} \to 0$, si $m \to \infty$, con $2k$ el mayor entero par menor que p. Además, para cualquier función continua ξ sobre $[0,1]$, $\int_0^1 \xi\, x_m d\mu \to 0$, con m, y por tanto, $x_m \xrightarrow{w} 0$. Entonces, por Teorema 4.27, $x_m \xrightarrow{\tau} 0$.

Ahora, consideremos el polinomio ortogonalmente aditivo sobre L_p, $P(x) = \int_0^1 x^{2k+1} d\mu$. Luego, $x_m \overset{wp_o}{\not\to} 0$ pues $|P(x_m)| = 1$. ■

Corolario 4.30 *Sea $X = L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, para cualquier red $(x_\alpha)_\alpha$ y $x \in X$*

(a) Si $1 \leq p < 3$, entonces $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ si y solo si $x_\alpha \xrightarrow{wp_o} x$.

(b) Si $p \geq 3$ y $(x_\alpha)_\alpha$, x son uniformemente acotadas, entonces

$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \quad \text{si y solo si} \quad x_\alpha \xrightarrow{wp_o} x.$$

Dem. Sólo probaremos una implicación ya que la desigualdad $d_P(x) \leq |P(x)|^{\frac{1}{n}}$ nos da la otra.

La condición (a) es obvia si $1 \leq p < 2$ gracias a la Observación 4.26 y para $p = 2$ gracias al Corolario 4.25.

Ahora, si $2 < p < 3$, un polinomio ortogonalmente aditivo P es una forma lineal o $P(x) = \int_0^1 \xi x^2 d\mu$, con $\xi \in L_{\frac{p}{p-2}}$. El resultado se sigue de la desigualdad $|P(x_\alpha - x)| \leq \int_0^1 |\xi|(x_\alpha - x)^2 d\mu$ y el Corolario 4.25 puesto que $|\xi| \geq 0$.

Ahora, sea $P(x) = \int_0^1 \xi x^n d\mu$, con $\xi \in L_{\frac{p}{p-n}}$ ($\xi \in L_\infty$ si $p = n$). Consideremos $2 \leq n \leq p$ ya que si $n = 1$ P es una forma lineal.

Para n entero par, el resultado se sigue del Corolario 4.25 pues $|\xi| \geq 0$ y $|P(x_\alpha - x)| \leq \int_0^1 |\xi|(x_\alpha - x)^n d\mu$. Para n entero impar $(n-1)$ es par y $n-1 \geq 2$. Sea $A > 0$ una constante tal que $\|x_\alpha\|_\infty, \|x\|_\infty \leq A$. Entonces, $|P(x_\alpha - x)| \leq \int_0^1 |\xi|(x_\alpha - x)^{n-1}|x_\alpha - x| d\mu \leq 2A \int_0^1 |\xi|(x_\alpha - x)^{n-1} d\mu$. El Corolario 4.25 implica $|P(x_\alpha - x)| \to 0$, lo que completa la demostración. ■

4.5 Polinomios Bloque Diagonales.

Todo espacio de Banach real con base incondicional, de constante 1, puede considerarse como un reticulado de Banach, como ya mencionamos al inicio de la sección 2 de este capítulo. Sobre estos espacios los polinomios ortogonalmente aditivos coinciden con los polinomios diagonales. Una generalización de esta subclase de polinomios es la clase de polinomios bloque diagonales introducida y estudiada por V. Dimant y R. Gonzalo en [DiG].

Una base de Schauder descompone a un espacio de Banach en una suma de espacios uno-dimensionales. Una sucesión de subespacios cerrados $\{E_k\}_{k \in I\!N}$ se dice una descomposición de Schauder del espacio E si cada elemento $x \in E$ admite una única representación de la forma $x = \sum_{k \geq 1} x_k$, con $x_k \in E_k$ para todo $k \geq 1$. Diremos que la descomposición es finito-dimensional (notaremos FDD) si todos los espacio E_k son de dimensión finita. Para más detalles ver [LT] I.

En lo que sigue denotaremos $\{\Pi_k\}_{k \in I\!N}$ a la sucesión de proyecciones asociadas a la descomposición, esto es

$$\Pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} x_k \quad \text{para todo} \quad x = \sum_{j \geq 1} x_j, \text{con } x_j \in E_j.$$

Sea $J = \{k_j\}_{j \in I\!N} \subseteq I\!N$ una subsucesión. Diremos que una sucesión $\{u_j\}_{j \in I\!N} \subseteq E$ es una sucesión en bloques respecto de J si $u_j \in \mathrm{Im}(\Pi_{k_j} - \Pi_{k_{j-1}})$, para todo $j \geq 1$.

Definición 4.31 *[DiG] Sea $J = \{k_j\}_{j \in I\!N} \subseteq I\!N$ una subsucesión. Para cada $j \in I\!N$, sea $\sigma_j = \Pi_{k_j} - \Pi_{k_{j-1}}$. Se define la clase de polinomios n-homogéneos* **Bloque Diagonales** *con respecto a J al conjunto*

$$\mathcal{D}_J = \{P \in P(^nE) \ / \ P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\sigma_j(x)), \ \text{para todo } x \in E\}.$$

Notar que σ_j depende de la subsucesión J.

Consideremos $\mathcal{D}(^nE)$, el subespacio de $P(^nE)$, formado por los polinomios n-homogéneos bloque diagonales sobre E. El espacio $\mathcal{D}(^nE)$ depende de la descomposición FDD que se esté considerando, por lo que partiremos con una descomposición fija. Ahora sí, definimos la topología $\tau_{\mathcal{D}}$ y la topología débil-polinomial asociada a este conjunto.

Definición 4.32 *Sea $\tau_{\mathcal{D}}$ la topología definida sobre E asociada a la familia de seminormas $(d_P)_P$ cuando P varía sobre $\mathcal{D}(^nE)$, para todo $n \in I\!N$.*

Definición 4.33 *Decimos que una red $(x_\alpha)_\alpha \subset E$ converge a $x \in E$ en la topología $wp_{\mathcal{D}}$ si y solo si para todo $n \in I\!N$ y para todo P polinomio n-homogéneo bloque diagonal $P(x_\alpha - x) \to 0$.*

Al considerar polinomios más generales (todo polinomio diagonal en un espacio de Banach con base de Schauder es bloque diagonal en éste) obtenemos una caracterización más débil, la de la convergencia de sucesiones.

Lema 4.34 *Sean E un espacio de Banach con FDD incondicional, $n \in I\!N$ entero impar y P un polinomio n-homogéneo bloque diagonal. Entonces, para toda sucesión $(x_k)_{k\in I\!N}$, y todo x en E se tiene*

$$x_k \xrightarrow{w} x \qquad \Rightarrow \qquad d_P(x_k - x) \to 0.$$

Dem. Sea $J \subseteq I\!N$ un conjunto de índices tal que P es bloque diagonal respecto de J, es decir, P pertenece a $D_J(^nE)$.

Supongamos que $d_P(x_k - x) \not\to 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ y una subsucesión de $(x_k)_{k\in I\!N}$, que para simplificar notación seguiremos llamando $(x_k)_{k\in I\!N}$, tales que

$$\delta < d_P(x_k - x) \leq \|P\|^{\frac{1}{n}} \|x_k - x\|, \text{ para todo } m \in I\!N. \tag{4.3}$$

La sucesión $(x_k - x)_{k\in I\!N}$ es débil-nula y además seminormalizada (por 4.3), entonces existe una subsucesión $(x_{k_j})_{j\in I\!N}$ y $(u_j)_{j\in I\!N}$ una sucesión en bloques, débil-nula, con respecto a $J_1 \subseteq J$ tales que $\|(x_{k_j} - x) - u_j\| \to 0$ si $j \to \infty$; (ver Lema 1.1 [DiG]).

Por ser P bloque diagonal respecto de J, lo es respecto de J_1 y sobre el subespacio $Y = \overline{[u_j : j \in J_1]}$, P toma la forma de polinomio diagonal admitiendo la escritura

$$P(y) = \sum_{j\geq 1} P(u_j) y_j^n, \quad \text{para } y = \sum_{j\geq 1} u_j\, y_j.$$

Como P es continuo, es uniformemente continuo sobre acotados; ambas sucesiones $(x_{k_j} - x)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son débil-nulas (por tanto acotadas) cuya diferencia tiende en norma a cero. Luego, para $\frac{\delta^n}{2} > 0$ existe $j_0 \in J_1$ tal que para todo $j \geq j_0$ vale $|P(u_j) - P(x_{k_j} - x)| < \frac{\delta^n}{2}$. Entonces, para todo $j \geq j_0$

$$|P(u_j)| \geq |P(x_{k_j} - x)| - |P(u_j) - P(x_{k_j} - x)| \geq d_P^n(x_{k_j} - x) - \frac{\delta^n}{2} > \frac{\delta^n}{2}.$$

Esto asegura que hay infinitos valores de j para los cuales $P(u_j) \neq 0$.

Notemos que P está bien definido en ℓ_n. Entonces, por Proposición 4.12 tenemos que $d_P(u_j) = 0$, para todo $j \in J_1$. Luego,

$$\delta < d_P(x_{k_j} - x) \leq d_P((x_{k_j} - x) - u_j) + d_P(u_j) \leq \|P\|^{\frac{1}{n}} \|(x_{k_j} - x) - u_j\| \to 0,$$

contradicción que nos permite asegurar que $d_P(x_k - x) \to 0$. ■

En su trabajo de tesis doctoral R. Gonzalo introdujo los conceptos de r-cota inferior, propiedad T_r e índices superior e inferior de un espacio de Banach E. Los dos primeros conceptos son hechos en analogía los de r-cota superior y propiedad S_p, (ver [G$_1$] o [GJ]). En estas notas iremos introduciendo sólo las nociones que han sido necesarias para el desarrollo de nuestro estudio.

Definición 4.35 *Sea $1 \leq r \leq \infty$. Decimos que una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en E tiene una r-cota inferior si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera escalares $a_1, \ldots, a_k$*

$$C(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^r)^{\frac{1}{r}} \leq \|\sum_{j=1}^{k} a_j x_j\|$$

$$(C \max_{j=1,\ldots,k} |a_j| \leq \|\sum_{j=1}^{k} a_j x_j\| \quad \textit{para } r = \infty)$$

Proposición 4.36 *Sean E un espacio de Banach con base incondicional $(e_k)_{k\in I\!N}$ con una r-cota inferior para algún $1 \leq r < \infty$. Si $(x_k)_{k\in I\!N} \subseteq E$ y $x \in E$ verifican*

(a) $x_k \xrightarrow{w} x$ *y*

(b) $\|x_k - x\|_r \to 0$ *si* $k \to \infty$.

Entonces, para todo P polinomio n-homogéneo bloque diagonal, con $n \geq r$; $P(x_k - x) \to 0$.

Dem. Sea P polinomio bloque diagonal respecto de $J \subseteq I\!N$, de grado $n \geq r$. Si $|P(x_k - x)| \not\to 0$, pasando a una subsucesión de ser necesario, se tiene $|P(x_k - x)| > \delta$, para todo $k \geq 1$, para algún $\delta > 0$.

Así, $\delta < \|P\| \|x_k - x\|^n$ y $(x_k - x)k \in I\!N$ es una sucesión débil-nula seminormalizada. Otra vez, por Lema 1.1 [DiG], existe una subsucesión $(x_{k_j})_{j\in I\!N}$ y $(u_j)_{j\in I\!N}$ una sucesión en bloques, débil-nula, con respecto a $J_1 \subseteq J$ tales que $\|(x_{k_j} - x) - u_j\| \to 0$ si $j \to \infty$. Además, P resulta diagonal respecto de J_1 admitiendo, sobre el subespacio $Y = \overline{[u_j : j \in J_1]}$, la escritura de polinomio diagonal,

$$P(y) = \sum_{j\geq 1} P(u_j) y_j^n, \quad \text{para } y = \sum_{j\geq 1} u_j\, y_j.$$

Siguiendo el razonamiento hecho en Lema 4.34 existen infinitos valores de $j \in J_1$ tales que $|P(u_j)| > \frac{\delta^n}{2} > 0$. Por otra parte, por ser $(P(u_j))$ una sucesión acotada existe una constante positiva C tal que

$$|P(y)| \leq \sum_{j\in J_1} |P(u_j)|\, \|y_j\|^n \leq C\|y\|_n^n \leq C\|y\|_r^n.$$

Si vemos que $\|u_j\|_r \to 0$ cuando $j \to \infty$ llegaremos a una contradicción. Para esto digamos que la base $(e_k)_{k\in I\!N}$ tiene constante M y recordemos que tiene una r-cota inferior y que $r \leq n$. Ahora,

$$\begin{aligned} \|u_j\|_r &\leq \|u_j - (x_{k_j} - x)\|_r + \|x_{k_j} - x\|_r \\ &\leq M\|u_j - (x_{k_j} - x)\| + \|x_{k_j} - x\|_r \quad \longrightarrow \quad 0, \end{aligned}$$

y concluimos que $P(x_k - x) \to 0$. ■

Definición 4.37 *Sea $1 < r \leq \infty$. Decimos que un espacio de Banach E tiene* **la propiedad** T_r *si toda sucesión débil-nula seminormalizada $(x_k)_{k\in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{k_j})_{j\in \mathbb{N}}$ con una r-cota inferior, i.e, existe un $C > 0$ tal que tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y cualesquiera escalares $a_1, \ldots, a_m$*

$$C(\sum_{j=1}^{m} |a_j|^r)^{\frac{1}{r}} \leq \| \sum_{j=1}^{m} a_j x_{k_j} \|$$

$$(C \max_{j=1,\ldots,m} |a_j| \leq \| \sum_{j=1}^{m} a_j x_{k_j} \| \quad \textit{para } r = \infty)$$

Definición 4.38 *[GJ] Para E espacio de Banach se define el* **índice inferior** *de E que está relacionado con las propiedades T_r por*

$$u(E) = \inf\{r > 1, \ \textit{tal que } E \textit{ tiene propiedad } T_r\} \in [1, \infty).$$

Si E es un espacio de Banach con FDD incondicional los espacios $P(^nE)$ y $P_{wsc}(^nE)$ coinciden si y solo si $P(^kE)$ y $P_{wsc}(^kE)$ coinciden para todo $1 \leq k \leq n$, (ver por ejemplo [DiG], Corollary 1.7.) Además, todo espacio de Banach E con base incondicional débil-nula admite un polinomio n-homogéneo no wsc con tal que $n > u(E)$, donde $u(E)$ es el índice En este contexto tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.39 *Para E espacio de Banach definimos por* **índice de continuidad polinomial débil secuencial** *de E al valor dado por*

$$w_{sc}(E) = \sup\{ \ n \in \mathbb{N} \ \textit{tal que } P(^nE) = P_{wsc}(^nE)\}$$

Notar que $w_{sc}(E)$ está bien definido y $w_{sc}(E) \geq 1$ puesto que las formas lineales son siempre débil-secuencialmente continuas. Por otra parte si E tiene propiedad Dunford-Pettis $w_{sc}(E) = \infty$.

Teorema 4.40 *Sea E un espacio de Banach con base incondicional $(e_k)_{k\in \mathbb{N}}$ y $w_{sc}(E) < \infty$. Si $(e_k)_{k\in \mathbb{N}}$ tiene una n_0-cota inferior, n_0 el primer entero par estrictamente mayor que $w_{sc}(E)$, entonces para cualquier sucesión $(x_k)_{k\in \mathbb{N}}$ y $x \in E$*

$$x_k \xrightarrow{\tau_{\mathcal{D}}} x \quad \textit{si y solo si} \quad \begin{cases} (i) & x_k \xrightarrow{w} x \quad y \\ (ii) & \|x_k - x\|_{n_0} \to 0 \end{cases}$$

Dem. Las formas lineales son polinomios diagonales, luego $x_k \overset{\tau_{\mathcal{D}}}{\to} x$ implica (i).

Consideremos $P(y) = \sum_{j\geq 1} y_j^{n_0}$ si $y = \sum_{j\geq 1} y_j e_j$. P es un polinomio bien definido sobre E; en efecto, si M es la constante de la base se tiene

$$(\sum_{j=n}^{m} y_j^{n_0})^{\frac{1}{n_0}} \leq M \| \sum_{j=n}^{m} y_j e_j \| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Por Proposición 4.16, $\|x_k - x\|_{n_0} = |P(x_k - x)|^{\frac{1}{n_0}} = d_P(x_k - x) \to 0$.

Recíprocamente, supongamos que valen (i) y (ii). Para P un polinomio n-homogéneo bloque diagonal se tiene:

Si n es impar, por Lema 4.34, $d_P(x_k - x) \to 0$.

Si n es par y $n < n_0$, entonces $n \leq w_{sc}(E)$ y todo polinomio n-homogéneo sobre E es débil-secuencialmente continuo, con lo cual $P(x_k - x) \to 0$ y $d_P(x_k - x) \to 0$.

Si $n \geq n_0$, como $(e_k)_{k\in \mathbb{N}}$ tiene una n_0-cota inferior y $\|x_k - x\|_{n_0} \to 0$, por la Proposición 4.36 y la desigualdad $d_P(y) \leq |P(y)|^{\frac{1}{n}}$ también vale que $d_P(x_k - x) \to 0$. ∎

Corolario 4.41 *Sea E un espacio de Banach con base incondicional $(e_k)_{k\in \mathbb{N}}$ y $w_{sc}(E) = 2m-1$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Si $(e_k)_{k\in \mathbb{N}}$ tiene una $2m$-cota inferior, entonces para cualquier sucesión $(x_k)_{k\in \mathbb{N}}$ y $x \in E$*

$$x_k \overset{\tau_{\mathcal{D}}}{\to} x \quad \textit{si y solo si} \quad x_k \overset{wp_{\mathcal{D}}}{\to} x$$

Dem. Otra vez la desigualdad $d_P(x) \leq |P(x)|^{\frac{1}{n}}$ nos da una implicación. Veamos la otra. Sea P un polinomio n-homogéneo bloque diagonal.

Si $n \leq w_{sc}(E)$, entonces P es wsc y $P(x_k - x) \to 0$.

Si $n > w_{sc}(E) = 2m - 1$, entonces $n \geq 2m$. Como $x_k \overset{\tau_{\mathcal{D}}}{\to} x$, por Teorema 4.40 $\|x_k - x\|_{2m} \to 0$ y el resultado se sigue de la Proposición 4.36 puesto que $(e_k)_{k\in \mathbb{N}}$ tiene una $2m$-cota inferior. ∎

Comparemos la convergencia de sucesiones para las topologías τ y $\tau_{\mathcal{D}}$ sobre espacios ℓ_p, $1 < p < \infty$, (ℓ_1 es Schur). Es claro que $\tau \leq \tau_{\mathcal{D}}$ puesto que todo polinomio ortogonalmente aditivo es w-continuo sobre acotados o diagonal. Ahora, si $p \in (2m-1, 2m]$ entonces $w_{sc}(\ell_p) = 2m-1$, y si $p \in (2m-2, 2m-1]$ entonces $w_{sc}(\ell_p) = 2m-2$, en ambos casos el primer entero par estrictamente mayor que $w_{sc}(\ell_p)$ es $2m$. Además, al ser $p \leq 2m$ la base canónica de ℓ_p, que es incondicional, tiene una $2m$-cota inferior. Por otra parte, m es el menor entero que verifica $p \leq 2m$. Entonces el Teorema 4.17 y el Teorema 4.40 nos permiten asegurar que para toda sucesión $(x_k)_{k\in I\!N}$ y $x \in \ell_p$

$$x_k \overset{\tau_{\mathcal{D}}}{\rightarrow} x \quad \text{si y sólo si} \quad x_k \overset{\tau}{\rightarrow} x.$$

Así también, por Corolarios 4.18 y 4.41 tenemos que si $p \in (2m-1, 2m]$ entonces para toda sucesión $(x_k)_{k\in I\!N}$ y $x \in \ell_p$

$$x_k \overset{wp_o}{\rightarrow} x \quad \text{si y sólo si} \quad x_k \overset{wp_{\mathcal{D}}}{\rightarrow} x,$$

esto es, ua sucesión converge bajo polinomios bloque diagonales si y sólo si converge bajo polinomios diagonales.

Para mostrar que la $wp_{\mathcal{D}}$-topología es, en general, estrictamente más fuerte que la $\tau_{\mathcal{D}}$-topología basta considerar el ejemplo dado en la Observación 4.19. En efecto, $w_{sc}(\ell_{2m+1}) = 2m$ luego, el menor entero par estrictamente mayor que $w_{sc}(\ell_{2m+1})$ es $2m+2$ y el polinomio que ofrece el contraejemplo es diagonal.

Finalizamos estas notas con un ejemplo. Mostraremos una familia de espacios de sucesiones de Orlicz para los que hemos caracterizado la convergencia de sucesiones en las topologías $\tau_{\mathcal{D}}$ y $wp_{\mathcal{D}}$. Estos espacios, en general, son distintos de espacios ℓ_p.

Ejemplo 4.42 *Espacios de Orlicz en las hipótesis del Teorema 4.40*

Una función de Orlicz M es una función continua, convexa y no decreciente definida sobre la semirecta $I\!R_{\geq 0}$, tal que $M(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$. Cada función de Orlicz M tiene asociada el espacio ℓ_M formado por la sucesiones $a = (a_k)_{k\in I\!N}$ tales que para algún $\lambda > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M(\frac{|a_k|}{\lambda}) < \infty$$

Este espacio es de Banach dotado con la norma $\|a\| = \inf\{\lambda > 0; \sum_{k=1}^{\infty} M(\frac{|a_k|}{\lambda}) \leq 1\}$.

Los índices de Boyd asociados a los espacios ℓ_M están definidos por

$$\alpha_M = \sup\left\{p \geq 1 : \sup_{0<u,v\leq 1} \frac{M(uv)}{u^p M(v)} < \infty\right\}; \qquad \beta_M = \inf\left\{q \geq 1 : \inf_{0<u,v\leq 1} \frac{M(uv)}{u^q M(v)} > 0\right\}$$

estos índices aportarán la información que necesitamos sobre el espacio ℓ_M.

En efecto, si $E = \ell_M$ es un espacio de Orlicz asociado a una función de Orlicz M, con α_M y β_M los índices de Boyd, se tiene (ver [G$_2$], Th. 1.2 y Cor. 4.2)

(i) Si $\alpha_M > n$ entonces, todo polinomio n-homogéneo (y por lo tanto, todo polinomio k-homogéneo con $k \leq n$) sobre ℓ_M es débil-secuencialmente continuo.

(ii) Si $\beta_M < n$ entonces la base canónica de ℓ_M, que es incondicional, tiene una n-cota inferior.

Puede verse que cada función de la forma $M(t) = |log(t)|^\alpha t^\beta$, con $\alpha > 0$ y $\beta > 1$ es una función de Orlicz en algún intervalo $[0, t_0]$ con $t_0 > 0$. Así, M puede ser extendida a $[0, \infty)$. Para el cálculo de α_M y β_M los valores que toma M fuera de un entorno de $t = 0$ carecen de importancia (ver [LT], I). Independientemente del valor de α los índices de Boyd coinciden, más aún $\alpha_M = \beta_M = \beta$.

Afirmamos que la familia de funciones $M(t) = |log(t)|^\alpha t^\beta$, con $\alpha > 0$ y $\beta = 2m - 1$, para algún $m \in I\!N$; produce una familia de espacios de Orlicz ℓ_M, con ℓ_M no isomorfos a ℓ_p (para todo $1 < p < \infty$) donde la $wp_{\mathcal{D}}$-convergencia de sucesiones es equivalente a la $\tau_{\mathcal{D}}$-convergencia.

En efecto, el espacio ℓ_{2m-1} está complementado en ℓ_M (ver Ex. 4.c.1, [LT], I) con lo cual el polinomio $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{2m-1}$ definido sobre ℓ_{2m-1} puede extenderse a ℓ_M via la proyección. Como P no es wsc entonces su extensión tampoco puede serlo. Luego, por (i), tenemos que $w_{sc}(\ell_M) = 2m - 1$. Así, $n_0 = 2m$ es el primer entero par estrictamente mayor que $w_{sc}(\ell_M)$, además la base $(e_k)_{k\in I\!N}$ tiene una $2m$-cota inferior gracias a (ii).

Por otra parte tenemos que $\ell_M \simeq \ell_p$ para algún $1 < p < \infty$ si y solo si $M \cong t^p$, i.e.: existen constantes $A, B > 0$ tales que $At^p \leq M(t) \leq Bt^p$ para $t \in [0, 1]$ (ver [G$_2$], Cor. 1.5).

Entonces, para las funciones consideradas, ℓ_M no puede ser isomorfo a l_p para ningún $1 < p < \infty$; pues de serlo existirían constantes $A, B > 0$ tales que $A \leq |log(t)|^\alpha t^{\beta'} \leq B$, con $\alpha > 0$ y $t \in [0, t_0]$ y esto es imposible, cualquiera sea $\beta' \in I\!R$.

Bibliografía

[A] R. Alencar, *Multilinear mappings of nuclear and integral type,* Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 33-38.

[Ar] R. Arens, *The adjoint of a bilinear operation,* Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 839-848.

[AB] R. Aron and P. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), 3-24.

[ACG$_1$] R. Aron, B. Cole and T. W. Gamelin, *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math., **415** (1991), 51-93.

[ACG$_2$] R. Aron, B. Cole and T. W. Gamelin, *Weak-star continuous analytic functions.* Can. J. Math. **47 (4)** (1995), 673-83.

[AD] R. Aron and S. Dineen, *Q-reflexife Banach Spaces,* Rocky Mountain J. Math. **27 (4)** (1997), 1009-1025.

[AG] R. Aron and P. Galindo, *Weakly compact multilinear mappings*, Proc. Edimburgh Math. Soc. **40** (1997), 181-192.

[AGGM] R. Aron, P. Galindo, D. García and M. Maestre, *Regularity y algebras of analytic functions in infinite dimensions*, Trans. of the Amer. Math. Soc. **348 (2)**(1996), 543-559.

[AHV] R. Aron, C. Hervés and M. Valdivia, *Weakly continuous mappings on Banach spaces.* J. Funct. Anal., **52** (1983), 189-204.

[ALRR] R. Aron, M. Lindström, W. Ruess and R. Ryan, *Uniform factorization for compact sets of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **127 (4)** (1999), 1119-1125.

[AP] R. Aron and J. B. Prolla, *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math. 313 (1980), 195-216.

[BJL] P. Biström, J. A. Jaramillo and M. Lindström, *Polynomial Compactness in Banach spaces*, Rocky Mountain Journal of Math. **28** (1998), 1203-1226.

[BF] R. Bonic and J. Frampton, *Smood functions on Banach Manifolds*, J. Math. Mech., **15** (1966), 877-898.

[C] D. Carando, *Extensión de polinomios en espacios de Banach*, Tesis Doctoral. Universidad de Buenos Aires (1998).

[CD] D. Carando and V. Dimant, *Duality in spaces of nuclear and integral polynomials* , J. Math. Anal. Appl. **241** (2000), 107-121.

[CDDL] D. Carando, V. Dimant, B. Duarte and S. Lassalle, *K-bounded polynomials*, Math. Proc. Roy. Irish Acad. **98 A** (1998), 159-171.

[CZ] D. Carando and I. Zalduendo, *A Hahn-Banach theorem for integral polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 241-250.

[CSCG] F. Cabello Sanchez, J. Castillo and R. García ,*Polynomials on dual-isomorphic spaces,* Ark. Mat. **38** (2000), 37-44 .

[CCG] T. K. Carne, B. Cole and T. W. Gamelin, *A uniform algebra of analytic functions on a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 639-659.

[CGG] M. F. Castillo, R. García and R. Gonzalo, *Banach spaces in which all multilinear forms are weakly sequentially continuous*, Studia Math. **136 (2)** (1999), 121-145.

[DG] A. M. Davie and T. W. Gamelin, *A Theorem of polynomial-star approximation,* Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 351-358.

[DF] A. Defant and K. Floret, Tensor Norms and Operators Ideals. Math. Stud. 176, North-Holland, 1993.

[DD] J.C. Díaz and S. Dineen, *Polynomials on Stable Spaces*, Ark. Mat., **36** (1998), 87-96.

[Di] J. Diestel, Sequences and Series in Banacah Spaces, Graduate Texts in Mathematics, **92**, Springer-Verlag, New York (1984).

[DU] J. Diestel and J. J. Uhl, Vector Measures, Mathematical Surveys and Monographs 15, Am. Math. Soc., 1977.

[DiG] V. Dimant and R. Gonzalo, *Block diagonal polynomials,* Trans. Amer. Math. Soc., **353 (2)** (2000), 733-747.

[DZ] V. Dimant and I. Zalduendo, *Bases in spaces of multilinear forms over Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. **200** (1996), 548-60.

[D] S. Dineen, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, S.M.M., Springer, 1999.

[E] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces,* Acta. Math., **130** (1973), 309-317.

[FPWZ] M. Fabian, D. Preiss, J. H. M. Whitfield and V. E. Zizler, *Separating polynomials on Banach spaces,* Quart. J. Math. Oxford, **(2) 40** (1989), 409-422.

[FGLl] J. Ferrera, J. Gómez, J. G. Llavona, *On completion of spaces of weakly continuous functions,* Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 260-264.

[FJ] T. Figiel and W. B. Johnson, *The approximation property does not imply the bounded approximation property,* Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197-200.

[F] K. Floret, Weakly compact sets. Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[GGMM] P. Galindo, D. García, M. Maestre and J. Mujica, *Extension of multilinear mappings on Banach spaces,* Studia Math. **108** (1) (1994), 55-76.

[GJLl] M. I. Garrido, J. A. Jaramillo and J. G. Llavona, *Polynomial Topologies and Uniformities*, Preprint.

[GI] G. Godefroy and B. Iochum, *Arens-regularity on Banach algebras and geometry of Banach spaces,* Jour. Funct. Anal. **80** (1988), 47-59.

[GG] M. González and J. M. Gutierrez, *When every polynomial is unconditionally converging,* Arch. Math. **63** (1994), 145-151.

[GGLl] M. González, J. M. Gutierrez and J. G. Llavona, *Polynomial continuity on ℓ_1,* Proc. Amer. Math. Soc. **125 (5)** (1997), 1349-1353.

[G_1] R. Gonzalo, *Smoothness and Polynomials on Banach spaces,* Doctoral Dissertation, Universidad Complutense de Madrid, 1994.

[G_2] R. Gonzalo, *Upper and lower estimates in Banach sequences spaces,* Comments. Math. Univ. Carolin. **36 (4)** (1995) 641-653.

[GJ] R. Gonzalo and J. A. Jaramillo, *Compact polynomials between Banach spaces,* Extacta Math. **8** (1993) 42-48.

[GLl] J. M. Gutierrez and J. G. Llavona, *Polynomially continuous operators,* Israel J. Math. **102** (1997), 179-187.

[GV] J. M. Gutierrez and I. Villanueva, *Extensions of multilinear operators and Banach spaces properties,* (preprint)

[HP] E. Hille and R. Phillips, Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.

[JPZ] J. A. Jaramillo, A. Prieto and I. Zalduendo, *The bidual of the space of polynomials on a Banach space,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **122** (1997) 457-471.

[KR] P. Kirwan and R. Ryan, *Extendibility of homogeneous polynomial on Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **126 (4)** (1998) 1023-1029.

[LLl] S. Lassalle and J.G. Llavona, *A polynomila topology in Banach spaces,* (preprint).

[LZ] S. Lassalle and I. Zalduendo, *To what extent does the dual Banach space E' determine the polynomials over E?,* Ark. Mat. **38** (2000), 343-354.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces I and II, Springer, 1977.

[LR] P. Lindström and R. Ryan, *Appilcations of ultraproducts to infinite-dimensional holomorphy,* Math. Scand. **71** (1992), 229-242.

[Ll] J. G. Llavona, Approximation of continuously differentiable functions, North Holland, Mathematics Studies **130** (1986).

[M] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, Math. Studies **120**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[P] A.R. Palacios, *A note on Arens regularity,* Quant. J. Math. Oxford **(2) 38** (1987), 91-93.

[R] H. L. Royden, Real Analysis, Collier Macmillan, 3^{th} Edition, 1988.

[Ry_1] R. Ryan, *Dunford-Pettis properties*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. **27** (1979), 373-379.

[Ry_2] R. Ryan, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy,* Ph.D. Thesis, University College, Dublin (1980).

[St] C. Stegall, *Duals of certains spaces with the Dunford-Pettis properties*, Notices Amer. Math. Soc. **19 (7)** (1972), A799.

[Su] K. Sundaresan, *Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach Lattices*, Applied geometry and discrete mathematics, 571-586, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[T] E. Toma, *Aplicacoes holomorfas e polinomios τ-continuos.* Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.

[U] A. Ülger, *Weakly compact bilinear forms and Arens-regularity*, Proc. Amer. Math. Soc., **101 (4)**, (1987), 697-704.

[V] I. Villanueva, *Integral mappings between Banach spaces,* (preprint)

[Z_1] I. Zalduendo, *A canonical extension for analytic functions on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **320 (2)** (1990), 747-763.

[Z_2] I. Zalduendo, *Extending polynomials-A survey*, Publ. Dep. Análisis Mat., Univ. Complutense de Madrid, 1998.