Polynomials on a Banach space and their relation with the dual space

Resumen: Dado un espacio de Banach E estudiamos tres aspectos de la relación entre el espacio de polinomios definidos sobre E y el espacio dual E'.
Consideramos la clase de polinomios K-acotados $P_K({}^nE;X)$ (polinomios cuya continuidad está dada por subconjuntos de E') y mostramos que la extensión de Aron-Berner preserva esta clase. Investigamos propiedades sobre K que relacionan el espacio $P_K({}^nE;X)$ con subespacios usuales de $P({}^nE;X)$ probando a valores escalares que polinomios K-acotados son aproximables para K conjuntos compactos donde la identidad puede aproximarse uniformemente por operadores de rango finito. Lo mismo es cierto cuando K está contenido en la cápsula convexa equilibrada de una sucesión básica débil-nula de E'. En este caso también probamos que todo polinomio K-acotado es extensible. Además, dimos enunciados equivalentes a la existencia de espacios de Banach sin la propiedad de aproximación.
Dado un morfismo entre duales $s : E' \to F'$, damos un morfismo $\overline{s}$ que vincula los espacios de polinomios $P({}^nE;X)$ y $P({}^nF;X'')$. Mostramos bajo condiciones de regularidad que si E' es isomorfo a F' entonces los espacios de polinomios homogéneos sobre E y F a valores en X, son isomorfos. Además probamos que los subespacios de polinomios, cuya definición está relacionada en forma más directa al dual (débil-continuos, integrales, regulares), resultan isomorfos sin hipótesis adicionales sobre E, F o X.
Finalmente estudiamos diferentes topologías débil-polinomiales centrándonos en la dada por una familia de seminormas asociadas al conjunto de polinomios ortogonalmente aditivos sobre reticulados de Banach reales. Caracterizamos esta topología en espacios ℓ_p, L_p y sobre espacios de Banach con base incondicional.

Palabras claves: Funciones multilineales, Polinomios sobre espacios de Banach, extensión de Aron-Berner, Arens-regularidad, topología débil-polinomial, polinomios ortogonalmente aditivos.

Abstract: For a Banach space E we study three aspects of the relation between the space of polynomials on E and the dual space E'.
We consider the class of K-bounded polynomials $P_K({}^nE;X)$ (whose continuity is given by a subset K of E') and we show that the Aron-Berner extension preserves this subspace. We investigate properties of K that bind the space $P_K({}^nE;X)$ with subspaces of $P({}^nE;X)$. We prove that scalar-valued K-bounded polynomials are approximable when K is a compact set on which the identity can be uniformly approximated by finite rank operators. The same is true when K is contained in the absolutely convex hull of a weakly null basic sequence of E'. Moreover, in this case we prove that every K-bounded polynomial is extendible to any large space. Also, we give equivalent statements for the existence of Banach spaces without the approximation property.
For a mapping between dual spaces, $s : E' \to F'$, we give a morphism $\overline{s}$ relating the spaces of polynomials $P({}^nE;X)$ and $P({}^nF;X'')$. We show that under conditions of regularity, if E' is isomorphic to F' then the spaces of X-valued homogeneous polynomials on E and F are isomorphic. Also, we prove that some subspaces of polynomials more closely related to the structure of dual spaces (weakly continuous, integral, regular) are isomorphic in full generality.
Finally we study different weak polynomial topologies focusing in the topology determined by a family of seminorms given by the set of orthogonally additive polynomial that are defined on real Banach lattices. We characterize this topology on ℓ_p, and L_p spaces and on Banach spaces with unconditional basis.

Keywords: Multilinear functions, Polynomials on Banach spaces, Aron-Berner extension, Arens-regularity, weak polinomial topology, orthogonally additive polynomials.