Funciones Analíticas en espacios de Banach

Práctica 3: Álgebras de funciones y espectro

Definiciones: $\mathcal{A}(\Delta)$ es el álgebra de funciones holomorfas en Δ, continuas en $\overline{\Delta}$ y $\mathcal{H}^\infty(\Delta)$ es el álgebra de funciones holomorfas y acotadas en Δ (con la norma supremo). Cuando no se aclare lo contrario, $\mathcal{A}$ será un álgebra de Banach compleja, conmutativa, con unidad=1,

1. (a) Mostrar que vale la inclusión estricta $\mathcal{A}(\Delta) \subset \mathcal{H}^\infty(\Delta)$
   (b) Encontrar una $f \in \mathcal{A}(\Delta)$ tal que $f \notin \mathcal{H}^\infty((1+\varepsilon)\Delta)$ para todo $\varepsilon > 0$.
2. (a) Dada $f \in \mathcal{A}(\Delta)$ se define $f_r(z) = f(rz)$. Mostrar que $\|f - f_r\|_\infty \to 0$ si $r \to 1^-$. Mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $f_r \colon (1+\delta)\Delta \to \mathbb{C}$ es analítica.
   (b) Mostrar que $\left\{ \sum_{j=0}^{N} a_j z^j \colon (a_j) \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}_0 \right\}$ es denso en $\mathcal{A}(\Delta)$. Concluir que $\mathcal{A}(\Delta)$ es separable. (Sugerencia, usar el desarrollo de f_r para f_r prómima a f.)
3. (a) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(\Delta)$ una sucesión tal que $f_n(z)$ converge en la topología τ_0 al polinomio $p(z) = z^j$. Probar que $\dfrac{f_n^{(k)}(0)}{k!}$ converge a 1 si $k = j$ y a cero si $k \neq j$.
   (b) Vale lo mismo si $(f_n) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ y $f_n(x) \to x^j$ sobre compactos?
4. Se consideran $\delta \colon \Delta \to \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty(\Delta))$ y $\pi \colon \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty(\Delta)) \to \overline{\Delta}$, las funciones dadas por $\delta(b) = \delta_b$ la evaluación en b y $\pi(\varphi) = \varphi(z)$, donde z representa a la función $f(z) = z$. Probar que δ y π son continuas y que $\pi \circ \delta(b) = b$ para todo $b \in \Delta$.
5. Considerar en $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ las funciones holomorfas, $\theta_j(z_1, z_2) = z_j$, para $j = 1, 2$.
   Sea $\varphi \in \mathcal{M}$. Si $b_j = \varphi(\theta_j)$, mostrar que $\varphi(f) = f(b_1, b_2)$ para toda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$.
6. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, mostrar que existe $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que f no se extiende a ningún abierto mayor.
7. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty(\Delta))$. Mostrar que:
   (a) el conjunto $\mathcal{M}$ es w^*-compacto y conexo.
   (b) la función $\hat{f} : (\mathcal{M}, w^*) \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ es una extensión continua de f. Además, para $\|\hat{f}\| = \sup_{\varphi\in\mathcal{M}} |\varphi(f)|$ vale que $\|\hat{f}\| = \|f\|$.
   (c) el conjunto $\widehat{H^\infty}(\Delta) = \{\hat{f} \colon f \in \mathcal{H}^\infty(\Delta)\}$ es un álgebra uniforme, esto es un álgebra que separa puntos cerrada con la topología uniforme.
8. Dado $a \in \mathcal{A}$ se considera el conjunto $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon (\lambda \cdot 1 - a) \text{ es no inversible}\}$. Mostrar que:
   (a) $\sigma(a) \subset \|a\|\Delta$.
   (b) Mostrar que si $\sigma(a)$ fuera vacío, la función $\lambda \mapsto (\lambda \cdot 1 - a)^{-1}$ resulta entera y acotada.
   (c) Concluir que $\sigma(a)$ es un no vacío, para todo $a \in \mathcal{A}$.
9. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach compleja, conmutativa, con unidad, que además es un anillo de divisón, esto es todo elemento no nulo es inversible.
   (a) Mostrar que $\sigma(b)$ es unitario, para cada $b \in \mathcal{B}$.
   (b) Concluir que $\mathcal{B}$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.
10. Sea $I \subset \mathcal{A}$ un ideal propio de $\mathcal{A}$. Mostrar que:
    (a) si $M \subset \mathcal{A}$, es un ideal maximal, tal que $I \subset M \subset \mathcal{A}$ entonces es cerrado. ¿Por qué existe?

(b) si de dota a $\mathcal{A}/M$ con la norma cociente, $\mathcal{A}/M$ entonces es un álgebra de Banach con unidad. y además es un anillo de división.

(c) Existe $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un homomorfismo continuo tal que $M = ker(\varphi)$.

11. Sea $b \in \overline{B}_E$, sea $f \in \mathcal{H}^\infty(B_E)$. Sea $(x_n) \subset B_E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $x_n \xrightarrow{w} b$ y $f(x_n) \to \lambda$. Mostrar que existe $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty(B_E))$ tal que $\pi(\varphi) = b$ y $\varphi(f) = \lambda$, donde $\pi(\varphi) = \varphi|_{E'}$.

    Sugerencia: considerar $I = \{g \in \mathcal{H}^\infty(B_E)\colon g(x_n) \to 0\}$.

Adicionales: Funciones compactas

12. Sea E Banach separable y $f \in \mathcal{H}_K(E;F)$, una función entera compacta.

    (a) Mostrar que existe $\mathcal{V} = \{V_n\}$ un cubrimiento numerable de E, por abiertos V_n, tal $K_n = \overline{f(V_n)}$ es un compacto de F para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) Mostrar que si $r_n = n.\max\{\|y\|\colon y \in K_n\}$, entonces $L = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty \frac{1}{r_n} K_n$ también es compacto en F.

    (c) Concluir que existe $L \subset F$ compacto tal que $f(E) \subset \text{span}\,\{\text{L}\}$.

13. Sea $f \in \mathcal{H}(E;F)$ tal que existe $L \subset F$ compacto con $f(E) \subset \text{span}\,\{\text{L}\}$.

    (a) Mostrar que L puede considerarse un convexo y equilibrado.

    (b) Mostrar que $E_n = \{x \in E\colon f(x) \in nL\}$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

    (c) Mostrar que existe $x \in E$ y V entorno de x tal que $\overline{f(V)}$ es compacto en F y concluir que f es compacta.

14. Sea $f\colon \mathbb{C} \to \ell_2$ la función dada por $f(z) = (z, \frac{z^2}{2!}, \frac{z^3}{3!}, \frac{z^4}{4!}, \ldots)$.

    (a) Mostrar que $f \in \mathcal{H}_K(\mathbb{C};\ell_2)$ y por tanto $f(\overline{\Delta})$ es compacto en ℓ_2.

    (b) Mostrar que si $z \notin \overline{\Delta}$ entonces $f(z) \notin \text{span}\,\{\text{f}(\overline{\Delta})\}$. (Sugerencia: mostrar que $\{f(z) \in \ell_2\colon z \in \mathbb{C}, z \neq 0\}$ es un conjunto linealmente independiente.)

    (c) Concluir que $f(\overline{\Delta})$ no es el compacto $L \subset \ell_2$ cuya existencia se prueba en el ejercicio 12.