Funciones Analíticas en espacios de Banach

Funciones analíticas: teoría general

Notación: E, F y X serán espacios de Banach. Para E, B_E denota su bola unidad abierta y E' su espacio dual. Si $U \subset E$ es abierto, $\mathcal{H}(U; F)$ denota el espacio de funciones analíticas de U en F. Cuando $F = \mathbb{C}$ escribimos $\mathcal{H}(U)$.

1. Sean $P_k \in \mathcal{P}(^k E, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$, sea $a \in E$ y $f \colon E \to F$ la función
$$f(x) = \sum_{k \geq 0} P_k(x-a) \qquad (1)$$
Sea r_c el radio de convergencia de f en a $\quad (r_c = r_c(a) = r_c(f,a))$:
$$r_c = sup\{r \geq 0 \colon \quad \sum_{k\geq 0} P_k(x-a) \text{ converge uniformemente a } f(x) \text{ en } \bar{B}(a,\rho), \quad \forall \rho < r\}.$$
Mostrar que vale la fórmula de Cauchy-Hadamard:
$$r_c = \frac{1}{\limsup \|P_k\|^{\frac{1}{k}}}.$$

2. Sea $a \in E$ y $f \colon E \to F$, $f(x) = \sum_{k\geq 0} P_k(x-a)$ con $P_k \in \mathcal{P}(^k E, F)$ y $A_k \in \mathcal{L}_s(^k E, F)$ tales que $\hat{A}_k = P_k$.
   (a) Mostrar que la serie tiene radio de convergencia positivo si y sólo si $\limsup \|A_k\|^{\frac{1}{k}} < \infty$.
   (b) Mostrar que la serie tiene radio de convergencia infinito si y sólo si $\limsup \|A_k\|^{\frac{1}{k}} = 0$.
   (c) Si $E = \ell_1$ y $f(x) = \sum_{k\geq 1} x_1. \cdots .x_k$, entonces $\limsup \|A_k\|^{\frac{1}{k}} = e \limsup \|P_k\|^{\frac{1}{k}}$. Concluir que no puede usarse indistintamente ambos límites superiores para calcular r_c.

3. Sea $(\varphi_k) \subset E'$ tal que $\varphi_k \xrightarrow{w^*} 0$. Mostrar que $f(x) = \sum_{k\geq 1} \varphi_k(x)^k$ está en $\mathcal{H}(E)$ es decir, es entera: admite un desarrollo como en (1) para todo $a \in E$ con $r_c(a) > 0$.

4. Sea $(y_k)_{k\geq 0} \subset F$ y sea $f : \mathbb{C} \to F$ la función dada por $f(\lambda) = \sum_{k\geq 0} \lambda^k y_k$. Mostrar que si $f = 0$ en un entorno de $\lambda = 0$ entonces $y_k = 0$ para todo k.

5. Sea $(P_k)_{k\geq 0} \in \mathcal{P}(^k E, F)$, una sucesión tal que la serie $\sum_{k\geq 0} P_k(x-a) = 0$ para todo $x \in B(a, r_c)$ donde $r_c > 0$ es el radio de convergencia. Probar que $P_k \equiv 0$, para todo k.

   Concluir que si $U \subset E$ es un abierto conexo, $f \colon U \to F$ es analítica en U y $a \in U$, el desarrollo en serie de potencias de f alrededor de a es único.

6. Sea $U \subset E$ abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(U; F)$. Sea $S = \{x \in U \colon \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(x) = 0, \ \forall k \geq 0\}$. Probar que $S = \emptyset$ o $S = U$.

7. Sea $U \subset E$ abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(U; F)$
   (a) Probar que son equivalentes:
      i. $f \equiv 0$.
      ii. $f|_V \equiv 0$ para algún $V \subset U$, abierto.
      iii. Existe $a \in U$ tal que $\frac{1}{k!}\hat{d}^k f(a) = 0$ para todo $k \geq 0$.
   (b) Mostrar que si $\dim(E) \geq 2$, no vale el resultado que se tiene para funciones de 1-variable compleja: $f(x_n) = 0$ para (x_n) una sucesión con puntos de acumulación, entonces $f \equiv 0$.

8. Sean X, Y dos espacios de Banach y sea $V \subset F$ un abierto. Sean $S \in \mathcal{L}(E; F), T \in \mathcal{L}(X; Y)$ y $f \in \mathcal{H}(V; X)$. Probar que $T \circ f \in \mathcal{H}(V; Y)$ y $f \circ S \in \mathcal{H}(U; X)$, para $U = S^{-1}(V)$.

9. Sea $U \subset E$ abierto y sean $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Mostrar que $f \cdot g \in \mathcal{H}(U)$ y que además si $P_k(\cdot)$ es el polinomio k-homogéneo correspondiente, se tiene
$$P_k(f \cdot g)(x) = \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}(f)(x) \cdot P_j(g)(x), \quad \text{para todo } x \in U \text{ y todo } k \geq 0.$$

10. Probar que vale el Teorema de Liouville para $f \in \mathcal{H}(E; F)$. Es decir si f es entera y acotada entonces f es constante. (Sugerencia: para cada $\varphi \in F'$ considerar $g(\lambda) = \varphi(f(\lambda x))$, $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.)

11. Sea $U \subset E$ abierto conexo, $f\colon U \to \mathbb{C}$, analítica no constante.
    (a) Probar que $f(V)$ es abierto para todo abierto $V \subset U$.
    (Sugerencia: considerar $x, y \in V$ tales que $f(x) \neq f(y)$ (¿por qué se puede?) y el conjunto $\Omega_{x,y} = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon x + \lambda(y - x) \in V\}$.)
    (b) Mostrar que el resultado no es válido si f toma valores en F, con $\dim(F) \geq 2$.

12. Sea $U \subset E$ abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(U)$ tal que existe $a \in U$ con $|f(x)| \leq |f(a)|$ para todo $x \in U$.
    (a) Probar que vale el Principio del módulo máximo, es decir f es constante.
    (b) Sea $f\colon \Delta \to (\mathbb{C}^2, \|.\|_\infty)$, dada por $f(z) = (1, z)$. Mostrar que f es una funcíon analítica que alcanza su máximo en todo punto de Δ sin ser constante. Concluir que el Principio 'norma' máxima no es válido si f toma valores en F y $\dim(F) \geq 2$.

13. Sea $U \subset E$ abierto conexo y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Probar que $\hat{d}f\colon U \to E'$, la diferencial de f, pertenece a $\mathcal{H}(U, E')$.

Integral de Bochner

14. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita, $\mu \geq 0$. Probar que si $f\colon \Omega \to F$, es μ-medible y (f_n) y (g_n) son dos sucesiones de funciones de Ω en F simples μ-medibles, que convergen a f en casi todo punto de Ω y verifican $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\| d\mu$ entonces $\lim \int_\Omega f_n d\mu = \lim \int_\Omega g_n d\mu$ y la integral de Bochner de f está bien definida.
    Nota: si μ es una medida signada, se considera la descomposición de $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y se obtiene la definición de función Bochner integrable si (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Análogamente se procede si μ es una medida compleja.

15. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita, con Ω un compacto Hausdorff y μ una medida de Borel. Sea $f\colon \Omega \to F$ una función continua.
    (a) Probar que f puede aproximarse uniformemente en Ω por una sucesión de funciones simples μ-medibles.
    (b) Probar que f es Bochner integrable.

16. (*Teorema de Convergencia Mayorada*). Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita, sea (f_n) una suceción de funciones Bochner integrables de Ω en F que converge en casi todo punto a una función f. Sea $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ integrable tal que $\|f_n(\omega)\| \leq g(\omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para casi todos $\omega \in \Omega$. Probar que f es Bochner integrabe, $\lim \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0$ y que $\lim \int_C f_n d\mu = \int_C f d\mu$, para todo $C \in \Sigma$.

17. Caracterizar los siguientes espacios, donde X es un Banach.
    (a) $\ell_1 \hat{\otimes}_\pi X$. ¿Qué se obtiene para $\ell_1 \hat{\otimes}_\pi \ell_1$?
    (b) $\ell_1(I) \hat{\otimes}_\pi X$, donde $\ell_1(I)$ es el espacio de familias absolutamente sumables indexadas en I.
    (c) $L_1(\mu) \hat{\otimes}_\pi L_1(\nu)$, para μ y ν dos medidas finitas sobre un intervalo real.

18. Sea E un espacio de Banach y $X \subset E$ un subespacio cerrado. Probar que $\ell_1(I) \hat{\otimes}_\pi X$ es un subespacio de $\ell_1(I) \hat{\otimes}_\pi E$.

19. Mostrar que $\ell_1 \hat{\otimes}_\pi X$ coincide con $\mathcal{L}_N(c_0; X)$, el espacio de los operadores nucleares, Mostrar demás que para cada operador nuclear T, $\|T\|_N = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|$, con (e_n) los vectores canónicos de c_0.

Polinomios de una variable

20. Sean $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en $\mathbb{K}$, $n+1$ puntos distintos.

    (a) Sean $y_0, y_1, \ldots, y_n$ en F, arbitrarios. Probar que existe un único polinomio $L \in \mathcal{P}(\mathbb{K}; F)$ de grado a lo sumo n tal que

    $$L(\lambda_j) = y_j, \qquad \text{para} \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

    (b) Sea $L_k \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ el único polinomio (de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$), de grado a lo sumo n que verifica $L_k(\lambda_j) = \delta_{jk}$, para $j = 0, \ldots, n$. Probar que cada polinomio $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}; F)$ de grado a lo sumo n se puede representar por

    $$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} P(\lambda_k) L_k(\lambda), \qquad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

21. Sea $P \colon \mathbb{K} \to F$ una función.

    (a) Sea $P_m \colon \mathbb{K} \to F$ una sucesión de polinomios de grado a lo sumo n que converge puntualmente a P, mostrar que P es un polinomio de grado a lo sumo n.

    (b) Probar que P es un polinomio de grado a lo sumo n si y sólo si $\psi \circ P \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es un polinomio de grado a lo sumo n, para toda $\psi \in F'$.

    (c) Probar que P es un polinomio si y sólo si $\psi \circ P \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es un polinomio, para toda $\psi \in F'$.

22. Sea $P \colon \mathbb{K}^m \to F$ una aplicación que resulta un polinomio en cada variable por separado. Mostrar que P es un polinomio.

23. Sea $f \colon E \to F$ una aplicación tal que $f(a + \lambda b)$ es un polinomio en λ cada cada $a, b \in E$.

    (a) Mostrar que $f|_M \colon M \to F$ es un polinomio para cada subespacio $M \subseteq E$ de dimensión finita.

    (b) Mostrar que existe una sucesión $P_n \colon E \to F$, de polinomios n-homogéneos, tales que

    $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x), \qquad \text{para cada } x \in E,$$

    donde para cada $x \in E$ se tiene que $P_n(x) = 0$ para todos, salvo finitos, $n's$. (Sug: Para cada $x \in E$ trabajar con λx, $\lambda \in \mathbb{K}$.)

24. Una aplicación $P \colon E \to F$ es un polinomio de grado a lo sumo n si y sólo si $P(a + \lambda b)$ es un polinomio en λ de grado a lo sumo n, cada cada $a, b \in E$.

Funciones analíticas

25. Sea $U \subset E$ un conjunto abierto y sea $a \in E$. Para cada $f \in \mathcal{H}(U; F)$ se define $f_a \colon U - a \to F$ la aplicación dada por $f_a(x) = f(a + x)$ para cada $x \in U - a$.

    (a) Mostrar que $f_a \in \mathcal{H}(U - a; F)$ y que $P_n f_a(b) = p_n f(a + b)$, para cada $b \in U - a$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

    (b) Mostrar que la aplicación $f \mapsto f_a$ es un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\mathcal{H}(U; F)$ y $\mathcal{H}(U - a; F)$.

26. Sea $\sum_{n\geq 0} P_n(x-a)$ una serie de potencias de E en F con radio de convergencia $R>0$ y sea $f\colon B(a,R)\to F$ dada por $f(x)=\sum_{n\geq 0} P_n(x-a)$ para cada $x\in B(a,R)$. Mostrar que f es analítica en $U=B(a,\frac{R}{e})$. ¿Puede probarse que f es analítica en $V=B(a,R)$?

27. Sea $U\subset E$ abierto y sea $f\in\mathcal{H}(U;F)$. Probar que

    (a) f es coninua.

    (b) f es localmente acotada (i.e. dado $a\in U$ existe V entorno de a tal que $f|_V$ es acotada.

    (c) Para cada $a\in U$, $x\in E$ y $\psi\in F'$ la función $g\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, dada por $g(\lambda)=f(a+\lambda x)$ es holomorfa en el abierto $\{\lambda\in\mathbb{C}\colon a+\lambda x\in U\}\subset\mathbb{C}$.

28. Sea $U\subset E$ abierto y sea $f\in\mathcal{H}(U;F)$. Supongamos que existe $Y\subset F$ un subespacio cerrado tal que $f(x)\in Y$, para todo $x\in U$. Mostrar que $f\in\mathcal{H}(U;Y)$.

29. Sea $U\subset E$ abierto y conexo, y sea $f\in\mathcal{H}(U;F)$. Probar que son iguales los subespacios cerrados de F generados por $f(U)$ y $M_a=\{A_n f(a)(x_1,x_2,\ldots,x_n);\text{con } x_j\in E; n\geq 0\}$, donde $A_n f(a)$ es la n-lineal simétrica asociada al polinomio del desarrollo de Taylor de f en a, $P_n f(a)$.

30. Sean $P_n\in\mathcal{P}(^nE;F)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ converge puntualmente, para todo $x\in E$, a $f(x)$. Probar que $f\in\mathcal{H}(E;F)$.

31. Sea $P\in\mathcal{P}(E;F)$ un polinomio continuo de grado a lo sumo m. Mostrar que

$$\int_{|\omega|=r}\frac{P(a+\omega x)}{\omega^{k+1}}d\omega=0,$$

    para todo $a,x\in E$, $r>0$ y $k>m$.

32. Sea $f\in\mathcal{H}(E;F)$ una función tal que existen $m\in\mathbb{N}_0$ y $c>0$ de modo que $\|f(x)\|\leq c\|x\|^m$, para todo $x\in E$. Mostrar que f es un polinomio de grado a lo sumo m.

33. Sea $U\subset E$ abierto y sea $(f_n)\subset\mathcal{H}(U;F)$ una sucesión de funciones tal que f_n converge a una aplicación $f\colon U\to F$, uniformemente en cada compacto de U. Mostrar que $f\in\mathcal{H}(U;F)$.

34. Sea $U\subset E$ abierto y sea $d_U(x)=d(x,U^c)$.

    (a) Mostrar que si $U\neq E$ entonces, $|d_U(x)-d_U(y)|\leq\|x-y\|$, parar todo $x,y\in U$.

    (b) Para $f\in\mathcal{H}(U;F)$, mostrar que o bien $r_b(f,x)=\infty$ para todo $x\in U$; o bien $r_b(f,x)<\infty$, para todo $x\in U$.

35. Sea $U\subset E$ abierto y $f\in\mathcal{H}(U;F)$.

    (a) Mostrar que $r_c(f,x)\geq r_c(f,a)-\|x-a\|$, para cada $a\in U$ y cada $x\in B(a,d_U(a))$.

    (b) Mostrar que $r_c(f,x)\leq r_c(f,a)+\|x-a\|$, para cada $a\in U$ y cada $x\in B(a,\frac{1}{2}d_U(a))$.

    (c) Si U es conexo, mostrar que ien $r_c(f,x)=\infty$ para todo $x\in U$; o bien $r_c(f,x)<\infty$, para todo $x\in U$. En este último caso se tiene, para cada $a\in U$ y cada cada $x\in B(a,\frac{1}{2}d_U(a))$:

$$|r_c(f,x)-r_c(f,a)|\leq\|x-a\|.$$

36. Sea $U\subset E$ abierto. Probar que $f\colon\ \to F'$ es holomorfa si y sólo si $g_y\colon U\to\mathbb{C}$ definida por $g_y(x)=f(x)(y)$, es holomorfa para todo $y\in F$.

37. Sea $U\subset E$ abierto y conexo y sea $V\subset U$ abierto. Sea $g\in\mathcal{H}(V;F)$ y supongamos que para cada $\psi\in F'$ existe una función $f_\psi\in\mathcal{H}(U)$ tal que $f_\psi|_V=g$. Mostrar que:

    (a) existe una $f\in\mathcal{H}(U;F'')$ tal que $f|_V=g$.

    (b) la función hallada verifica $f\in\mathcal{H}(U;F)$.

38. Sea $U\subset E$ abierto y sea $(f_n)\subset\mathcal{H}(U)$ una sucesión de funciones. Consideremos f la aplicación dada por $f(x)=(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Si f_n converge uniformemente a cero, en cada compacto de U, mostrar que $f\colon U \to c_0$ es holomorfa.

(b) Si $\sup_{x\in K}\{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p\} < \infty$ para cada compacto K de U, mostrar que $f\colon U \to \ell_p$ es holomorfa.

(c) Si f_n está uniformemente acotada en cada compacto de U, mostrar que $f\colon U \to \ell_\infty$ es holomorfa.