Funciones Analíticas en espacios de Banach

Práctica 1: Funciones multilineales y Polinomios

Notación: E, F y X serán espacios de Banach. Para E, B_E denota su bola unidad abierta y E' su espacio dual. El cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ será indistintamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1. Sea $A : E \times F \to X$ una aplicación bilineal. Mostrar que son equivalentes:
   (a) A es continua.
   (b) A es continua en $(0, 0)$.
   (c) $\sup\limits_{x \in B_E, y \in B_F} \|A(x, y)\| < \infty$.
   (d) Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in E$, $y \in F$: $\|A(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\|$.

2. Mostrar que $A : E \times F \to X$ resulta una bilineal continua en los siguientes casos:
   (a) Sean $\varphi \in E'$ y $\psi \in F'$ y sea $A(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Verificar que $\|A\| = \|\varphi\|.\|\psi\|$.
   (b) Sean $(\varphi)_j \subset B_{E'}$ y $(\psi)_j \subset B_{F'}$ y $\lambda = (\lambda_j) \in \ell_1$. Sea $A(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(x)\psi_j(y)$. Verificar que $\|A\| \leq \|\lambda\|_1$.
   (c) El morfismo evaluación, $\Phi\colon \mathcal{L}(E; X) \times E \to X$ dado por $\Phi(T, x) = Tx$. Ver que $\|\Phi\| = 1$.
   (d) El morfismo convolución, $A\colon L_1(\mathbb{R}) \times L_1(\mathbb{R}) \to L_1(\mathbb{R})$, $A(f, g) = f * g$.
   (e) Sea K un espacio compacto y $C(K)$ el espacio de funciones continuas sobre K. Sea $A\colon C(K) \times E \to C(K; E)$, $A(f, x) = f(\cdot)x$.

3. Sea $\mathcal{B}il(E, F; X) = \{A\colon E \times F \to X; A \text{ es bilineal y continua}\}$. Mostrar que resulta un espacio de Banach si, para $A \in \mathcal{B}il(E, F; X)$, se considera la norma $\|A\| = \sup\limits_{x \in B_E, y \in B_F} \|A(x, y)\|$.

4. Sea $\mathcal{B}il(E, F) = \{A\colon E \times F \to \mathbb{K}; A \text{ es bilineal y continua}\}$. Probar que $\mathcal{B}il(E, F)$ y $\mathcal{L}(E; F')$, con las normas usuales, son espacios de Banach isométricamente isomorfos.

5. • Analizar la validez de la afirmación:
   $T \in \mathcal{L}(E, E')$ *alcanza la norma si y solamente si la forma bilineal asociada* $A_T \in \mathcal{L}(^2E)$ *alcanza la norma.*

   Nota: Se dice que $S : E \to F$ *alcanza la norma* si existe $x \in E$, $\|x\| = 1$, tal que $\|S\| = \|S(x)\|$. $B : E \times E \to \mathbb{K}$ *alcanza la norma* si existe $x, y \in E$, ambos con norma uno, tal que $\|B\| = |B(x, y)|$.

6. Para $A : E \times F \to X$ una aplicación bilineal, se definen $A_x\colon F \to X$ y $A_y\colon E \to X$ los operadores dados por $A_x(y) = A_y(x) = A(x, y)$. Mostrar que A es una bilineal continua si y sólo si A_x y A_y son operadores continuos, esto es: A es separadamente continua.

7. Sean $A_n, A\colon E \times F \to X$ aplicaciones bilineales.
   (a) Mostrar que A es continua si y sólo si A tiene gráfico cerrado.
   (b) Mostrar que si $A_n(x, y)$ converge a $A(x, y)$ para todo $(x, y) \in E \times F$ y A_n es continua para todo n, entonces A es continua.

   (Sugerencia: en ambos casos mostrar que A es separadamente continua.)

8. Sea $P : E \to F$ un polinomio n-homogéneo, mostrar que son equivalentes:
   (a) P es continuo en E.
   (b) P es continuo en cero.
   (c) $\sup\limits_{x \in B_E} \|P(x)\| < \infty$.
   (d) Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in E$ se tiene $\|P(x)\| \leq C\|x\|^n$.

9. Sea $\mathcal{P}(^nE)$, el conjunto de polinomios n-homogéneos continuos escalares sobre E. Mostrar que resulta un espacio de Banach si, para $P \in \mathcal{P}(^nE)$, se considera la norma $\|P\| = \sup_{x \in B_E} |P(x)|$.

10. • Sea $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ y sean $S\colon F \to G$ y $T\colon G \to E$ dos operadores continuos, con G un espacio de Banach. Probar que ambas aplicaciones $P \circ T$ y $S \circ P$ son polinomios n-homogéneos y que además valen: $\|P \circ T\| \leq \|P\|\|T\|^n$ y $\|S \circ P\| \leq \|S\|\|P\|$.

11. • Sea $P\colon E \to F$ un polinomio n-homogéneo. Probar que P es continuo si y sólo si $\varphi \circ P\colon E \to \mathbb{K}$ es continuo para toda $\varphi \in F'$.

12. • Sea $P\colon E \to F$ una función que satisface que $P|_M \in \mathcal{P}(^nM; F)$ para cada subespacio M de E de dimensión $\leq n+1$. Mostrar que $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$.

13. Sea $B \subset E$ un subconjunto. Probar que B es acotado si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que: $\sup_{x \in B} |P(x)| < \infty$ para todo $P \in \mathcal{P}(^nE)$.

14. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$. Mostrar que el polinomio n-homogéneo dado por el producto, $P = \varphi_1 \cdots \varphi_n$, es de tipo finito.

15. • Mostrar que:

    (a) si $\dim(E) < \infty$ entonces $\mathcal{P}(^nE; F) = \mathcal{P}_f(^nE; F)$. Es decir, todo polinomio en $\mathcal{P}(^nE; F)$ es de tipo finito.

    (b) si $T \in \mathcal{L}(E; E)$ es de rango finito, entonces $P \circ T \in \mathcal{P}_f(^nE; F)$ para todo $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$.

16. (a) Sea E un espacio de sucesiones y sea $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$. Hallar condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para que P resulte continuo si $E = c_0, \ell_p, \ell_\infty$. ¿Qué debe pasar para que P resulte aproximable?

    (b) Sea $E = C(K)$ o $L_p(K)$ (K compacto) y $P(f) = \int_K f^n g \, d\mu$ para $f \in E$, qué condiciones debe cumplir g para que P sea continuo?

17. (a) Probar que la inclusión $(\mathcal{P}_N(^nE), \|.\|_N) \hookrightarrow (\mathcal{P}(^nE), \|.\|)$ es continua y que vale $\|P\| \leq \|P\|_N$ para todo $P \in \mathcal{P}_N(^nE)$.

    (b) Probar que el subespacio $\mathcal{P}_f(^nE)$ es denso en $(\mathcal{P}_N(^nE), \|.\|_N)$.

18. Sea $P \in \mathcal{P}(^nE)$ un polinomio nuclear y sea $T \in \mathcal{L}(F; E)$. Mostrar que $P \circ T$ es un polinomio nuclear sobre F y que $\|P \circ T\|_N \leq \|P\|_N \|T\|^n$.

19. Mostrar que la siguiente inclusión de subespacios $\mathcal{P}_A(^nE) \subset \mathcal{P}_w(^nE)$.

20. Sea $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H. Para $n \geq 2$ se define $P\colon H \to \mathbb{K}$ por
$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \langle x, e_j \rangle^n.$$
    Probar que $P \in \mathcal{P}_N(^nH)$ si y sólo si $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$. Mostrar que $\|P\|_N = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$. ¿Qué pasa cuando $n = 1$?

21. Sea $E = \ell_p$, $p \geq 2$. Sea $P\colon E \to \mathbb{K}$ el polinomio dado por $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$. Mostrar que P es nuclear si y sólo si $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. (Sugerencia: separar en los casos $p = 2$ y $p > 2$.)

22. Sea $E = \ell_p$, $1 \leq p < 2$. Sea $P\colon E \to \mathbb{K}$ el polinomio dado por $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^n$. Sea $T\colon \ell_p \to \ell_1$ el operador definido por $T(x) = (a_1^{1/n} x_1, a_2^{1/n} x_2, a_3^{1/n} x_3, \ldots)$

    (a) Mostrar que $Q_k\colon \ell_1 \to \mathbb{K}$, dado por $Q_k(x) = \sum_{j=1}^{k} x_j^n$ tiene $\|Q_k\|_N = 1$.

    (b) Calcular $\|T\|$ y ver que $\|Q_k \circ T\|_N \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^{q/n} \right)^{n/q}$ para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

    (c) Mostrar que si $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_{\frac{q}{n}}$, entonces P es nuclear y estimar $\|P\|_N$.

23. Sea Y un espacio de Banach real y X un subespacio cerrado no trivial de Y. Sea $\varphi \in Y'$, $\|\varphi\| = 1$, que se anula sobre X. Sea $\psi \in X'$, $\|\psi\| = 1$, y $\overline{\psi}\colon Y \to \mathbb{K}$ una extensión por Hahn-Banach de ψ. Consideremos $P\colon X \to \mathbb{R}$ el polinomio $P = \psi^n$, con $n \geq 2$. Mostrar que $P_t = \overline{\psi}^n - t^2\overline{\psi}^{n-2}\varphi^2$ son infinitas extensiones distintas de P con $\|P_t\| = \|P\|$, para todo $0 < t < 1$.

    Notar que si $Y = X''$ con X no reflexivo y $\overline{\psi}(z) = z(\psi)$, P_0 es la extensión canónica de P y P_t, $0 < t < 1$, arroja infinitas extensiones de P que preservan su norma.

24. • Sea $A\colon \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{K}$ la bilineal dada por

$$\begin{aligned} A(x,y) = \; & (x_1)y_2 + (x_1 + x_2 + x_3)y_4 + \cdots + (x_1 + \cdots + x_{2n-1})y_{2n} + \cdots \\ & + (y_1)x_2 + (y_1 + y_2 + y_3)x_4 + \cdots + (y_1 + \cdots + y_{2n-1})x_{2n} + \cdots \end{aligned}$$

    (a) Probar que $|A(x,y)| \leq \|x\|_1\|y\|_1$ y por tanto $A \in \mathcal{L}_s(^2\ell_1)$.
    (b) Considerar las redes de $B_{\ell_1''}$: $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(e_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $z, w \in (\ell_1)''$ dos w^*-límites de las respectivas redes. Mostrar que $\bar{A}(z,w) = 0$ mientras que $\bar{A}(w,z) = 1$.

25. • Sean $P \in \mathcal{P}(^nE)$ y $Q \in \mathcal{P}(^nE'')$ polinomios tales que $Q|_E = P$. Entonces, $Q = \bar{P}$ si y sólo si:

    (a) Para cada $x \in E, DQ(x)$ es w^*-continua y
    (b) Para cada $z \in E''$ y cada red $(x_\alpha)_\alpha \subset E$, w^*-convergente a z, $DQ(z)(x_\alpha) \to DQ(z)(z)$.

26. • Sean $P \in \mathcal{P}(^nE)$ y $Q \in \mathcal{P}(^kE)$ dos polinomios. Probar que $PQ\colon E \to \mathbb{K}$ dado por $(PQ)(x) = P(x)Q(x)$ pertenece a $\mathcal{P}(^{n+k}E)$ y que $\overline{PQ} = \bar{P} \cdot \bar{Q}$.

27. • Sea $P \in \mathcal{P}(^nE)$ y $T \in \mathcal{L}(E;E)$. Probar que $\overline{P \circ T} = \bar{P} \circ T''$.

28. • Dado $z \in E''$, con $\|z\| \leq 1$, probar que existe una red $(x_\alpha)_\alpha \subset B_E$, tal que $P(x_\alpha) \to \bar{P}(z)$, para todo $P \in \mathcal{P}(^nE)$.