Operadores elípticos en espacios con pesos

Tesis Doctoral

Marisa Toschi

Director: Dra. Marcela Sanmartino

Codirector: Dr. Ricardo Durán

Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

2011

Agradecimientos

A mis directores Marcela y Ricardo, por el cariño, la paciencia y contención de cada día.

A CONICET por el subsidio económico durante estos años, con el cual pude dedicarme a realizar esta tesis.

A mis compañeras de oficina, por ser mucho más que compañeras.

Al Intituto de Matemática aplicada del Litoral por tener siempre un lugarcito para mí.

A mi pequeña gran familia por estar desde el principio, siempre, en especial a mi mamá Marta y mi papá Ricardo, por darme la posibilidad de estudiar y la libertad para elegir.

A Eduardo, por ser mi compañero, mi refugio, mi amor.

A mis amigos, por mimarme el alma.

A la vida, por ponerlos a todos ustedes en mi camino.

Índice general

Introducción

En esta tesis se estudian diferentes aspectos de operadores elípticos en espacios con pesos. En una primera parte presentamos estimaciones a priori para las soluciones de problemas elípticos, y en una segunda parte, dado un operador elíptico tipo divergencia, analizamos la existencia de una única extensión autoadjunta con dominio en el espacio de energía asociado.

- Parte 1: Estimaciones a priori.

Las estimaciones clásicas para las soluciones de ecuaciones elípticas se obtienen en normas sin pesos para un dominio suave o bien con pesos en la clase de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$ tomando como dominio todo $\mathbb{R}^n$ (ver [**ADN59**]). Por otra parte, pesos del tipo potencias $|x|^\alpha$ o potencias de la distancia al borde de un dominio Ω surgen naturalmente en problemas con singularidades o capas límites (ver por ejemplo [**Gri85**], [**DL06**]). Asimismo este tipo de pesos fueron utilizados recientemente para el análisis de algunos problemas en bordes no Lipschitz [**ADL06**].

Motivados por lo anterior, en el Capítulo 2 damos estimaciones a priori de la solución del problema de Dirichlet en dominios suaves en espacios de Sobolev con pesos.

Para encontrar estas estimaciones, estudiamos el comportamiento de la función de Green y sus derivadas cerca de la diagonal.

En el Capítulo 3 analizamos las soluciones del operador potencias naturales del Laplaciano y obtenemos estimaciones análogas a las obtenidas para el Laplaciano en el capítulo anterior.

El hecho de que la función de Green no sea necesariamente positiva en estos casos nos lleva a restringirnos a dominios más regulares que en el caso del Laplaciano como así también a que las técnicas utilizadas para obtener las estimaciones principales sobre la solución y sus derivadas sean diferentes.

Para poder aplicar las estimaciones a priori tomando como peso una potencia de la función distancia al borde, es necesario determinar dicha potencia de manera que el peso pertenezca a una clase de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$. En el Capítulo 4 probamos bajo qué condiciones sobre la potencia podemos asegurarlo y demostramos teoremas de inmersión en espacios de Lebesgue con pesos. Esto nos permite utilizar los resultados previos para estimaciones a priori en estos espacios con peso potencias de la distancia al borde.

En el Capítulo 5 seguimos el estudio de estimaciones con pesos, aplicadas para generalizar al caso potencias del Laplaciano resultados de regularidad y estimaciones a priori dadas por Souplet en [**Sou04**] para soluciones de problemas no lineales.

Por otra parte, en el Capítulo 6, consideramos dominios no suaves, como los polígonos, donde obtenemos estimaciones a priori con pesos para la solución del problema de Dirichlet en un dominio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. En este caso, las singularidades quedan caracterizadas por potencias de la distancia a un vértice, generalizando en cierto sentido, los resultados clásicos sin pesos (ver [**Gri85**]).

- Parte 2: Operadores elípticos en el espacio de energía.

Dadas funciones adecuadas f y g sobre Ω, consideramos el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_{tt}u + Au = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = f & \text{en } \Omega \\ \partial_t u(\cdot,0) = g & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde

$$A = -\frac{1}{m}\operatorname{div} M\,\nabla, \tag{$*$}$$

con m una función positiva y M una matriz simétrica definida positiva.

Sabemos que para que el problema de Cauchy esté bien planteado necesitamos analizar si el operador A es esencialmente autoadjunto, y si no lo es, cuáles son las condiciones de borde apropiadas para poder elegir una única extensión autoadjunta.

En [**GSST10**] los autores analizan ejemplos del problema de Cauchy para la propagación de ondas en algunos espacios tiempos estáticos con singularidades, los cuales llevan a operadores como los definidos en ($*$) que no son esencialmente autoadjuntos y carece de sentido tanto físico como matemático dar condiciones de borde (las singularidades del espacio están en el borde del dominio y esto se traduce en una singularidad en el operador A).

Más precisamente, en dichos ejemplos observan que, a pesar de no ser el operador A esencialmente autoadjunto y aún en ausencia de condiciones de borde, el problema está bien planteado siempre que la solución tenga energía finita.

Motivados por esos ejemplos caracterizan cuándo existe una única extensión autoadjunta del operador A con dominio incluído en el espacio de energía.

En el Capítulo 8 generalizamos los resultados dados en [**GSST10**] en el siguiente sentido: estudiamos operadores elípticos tipo divergencia en regiones acotadas y regulares, dando condiciones sobre los coeficientes involucrados en el operador para que tenga una única extensión en el espacio de energía asociado. Esto se relaciona directamente con la densidad de funciones suaves en espacios de Sobolev con pesos. Para dar una aplicación, desarrollamos previamente en el Capítulo 7 un breve resumen de resultados en el marco de esta teoría.

Capítulo 1

Preliminares

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $C_0^\infty(\Omega)$ el espacio de funciones infinitamente derivables con soporte compacto en Ω,

$$L^p(\Omega) := \{f \text{ medible } : \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty\},$$

y

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f \text{ medible } : f\varphi \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

Para $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que v es la $\alpha-$derivada débil de u si para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \, \varphi \, dx,$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ y hemos notado $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ y la derivada de orden α como

$$D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Cuando no sea necesario especificar la dependencia de x, denotaremos $D^\alpha := D_x^\alpha$.

Definimos el espacio de Sobolev usual

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \, : \, D^\alpha f \in L^p(\Omega) \; \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k\},$$

donde las derivadas se entienden en sentido débil.

Para $f \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos la norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}.$$

Decimos que ω es un peso si $\omega \in \mathcal{M}(\Omega)$, donde

$$\mathcal{M}(\Omega) := \{\omega \text{ medible} : \omega > 0 \; c.t.p. \text{ en } \Omega \text{ y } \omega \in L^1_{loc}(\Omega)\}.$$

El espacio $L^p_\omega(\Omega)$ es el espacio de funciones medibles definidas en Ω tales que

$$\|f\|_{L^p_\omega(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \omega(x) \, dx\right)^{1/p} < \infty$$

y el espacio de Sobolev con pesos

$$W^{k,p}_{\omega}(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \ D^{\alpha} f \in L^p_{\omega}(\Omega) \ \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k\}$$

con

$$\|f\|_{W^{k,p}_{\omega}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} f\|^p_{L^p_{\omega}(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Una familia particular de pesos que usamos en este trabajo es la clase de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$ definida de la siguiente manera:

Definición 1.1. Sea ω medible $\omega > 0$ *c.t.p.* en Ω y $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Decimos que $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, si existe una constante positiva C tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) \ dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{p-1} \leq C$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$.

En adelante, C denotará una constante genérica, no necesariamente la misma en cada caso. De ser necesario, escribiremos explícitamente su dependencia.

Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos el operador Maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy, \tag{1.1}$$

donde $B(x,r)$ es la bola de centro x y radio r.

Definimos el operador de convolución

$$Tf(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y) \, f(y) \, dy,$$

donde el núcleo $k(x)$ cumple las siguientes propiedades

- $k \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus 0)$
- $k(x)$ es una función homogénea de grado $-n$
- $\displaystyle\int_{|x|=1} k(x) \, dx = 0.$

Los operadores de convolución son un caso particular de los operadores de Calderón - Zygmund y resultan acotados en L^p para $1 < p < \infty$.

Además, los operadores de convolución, al igual que el operador Maximal de Hardy-Littlewood, son operadores acotados en el espacio $L^p_{\omega}(\Omega)$ para $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$, es decir, existe una constante positiva C talque

$$\int_{\Omega} |Mf(x)|^p \, w(x) \, dx \leq C \int_{\Omega} |f(x)|^p \, w(x) \, dx,$$

$$\int_\Omega |Tf(x)|^p\, w(x)\, dx \le C \int_\Omega |f(x)|^p\, w(x)\, dx,$$

y esta propiedad sobre los operadores caracteriza a la clase de pesos $A_p(\mathbb{R}^n)$.

A lo largo de este trabajo consideramos $1 < p < \infty$, de ser necesario tomar $p = 1$ o $p = \infty$, lo diremos en forma explícita en cada caso.

1.1. Estimaciones a priori para el problema de Dirichlet

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, la ecuación de Poisson esta dada por

$$-\Delta u = f,$$

donde $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u$.

Sea Γ la solución fundamental clásica para el problema de Poisson,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|^{-1} & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\, w_n} |x|^{2-n} & n \ge 3, \end{cases} \tag{1.2}$$

con w_n el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Dada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, es un resultado clásico que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy$$

es una solución de $-\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n$ y satisface la estimación

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.3}$$

para $1 < p < \infty$. Esta estimación es una consecuencia de la teoría de integrales singulares de Calderón-Zygmund (ver por ejemplo [**Ste70**]).

A partir del trabajo de Muckenhoupt [**Muc72**], se obtuvieron varios resultados en estimaciones con pesos para las funciones maximales y operadores de integrales singulares. En particular, se conocen generalizaciones de (1.3) para normas con pesos en la clase $A_p(\mathbb{R}^n)$ (ver por ejemplo [**Ste**]).

Por otro lado, también son conocidas estimaciones a priori para soluciones del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Un trabajo clásico es el de de Agmon, Douglis y Nirenberg [**ADN59**] donde se prueba que la estimación a priori (1.3) es válida también en dominios suficientemente suaves.

Los autores trabajan con operadores elpticos de mayor orden que incluyen como ejemplo

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f & \text{en } \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \quad 0 \le j \le m-1, \end{cases} \tag{1.5}$$

donde se entiende por $(-\Delta)^m$ el operador componer m veces el operador Laplaciano, es decir, $(-\Delta)^m u = (-\Delta)^{m-1}(-\Delta u)$ y $\frac{\partial}{\partial\nu}$ es la derivada en la dirección de la normal.

Tenemos entonces estimaciones a priori como (1.3) para el caso general, esto es, para u solución del problema (1.5) en Ω se tiene que existe una constante positiva C tal que

$$\|u\|_{W^{2m,p}(\Omega)} \le C\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

para $1 < p < \infty$.

Observación 1.2. Los resultados dados en [**ADN59**] son más generales en el sentido que contemplan operadores elípticos de orden $2m$. También lo son los resultados obtenidos en los Capítulos 2, 3 y 4 de esta tesis. Esto se debe a que las estimaciones para la función de Green que daremos a cotinuación son válidas para esta clase de operadores. Sin embargo, consideramos el caso de potencias del Laplaciano por simplicidad de escritura en las demostraciones.

1.2. Función de Green

Por la fórmula de representación de Green, la solución u del problema general (1.5) puede escribirse como

$$u(x) = \int_\Omega G_m(x,y)\, f(y)\, dy,$$

donde $G_m(x,y)$ es la función de Green del operador $(-\Delta)^m$ en Ω, es decir,

$$\begin{cases} (-\Delta_x)^m G_m(x,y) = \delta_y(x) & x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j G_m(x,y) = 0 & x \in \partial\Omega \quad 0 \le j \le m-1. \end{cases}$$

La función de Green puede descomponerse de la siguiente manera

$$G_m(x,y) = \Gamma_m(x-y) + h_m(x,y)$$

donde $\Gamma_m(x)$ es una solución fundamental de $(-\Delta)^m$ y $h_m(x,y)$ satisface para cada $y \in \Omega$ fijo

$$\begin{cases} (-\Delta_x)^m h_m(x,y) = 0 & x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j h_m(x,y) = -\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \Gamma(x-y) & x \in \partial\Omega \quad 0 \le j \le m-1. \end{cases}$$

Luego

$$h_m(x,y) = -\sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} K_j(y,P) \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \Gamma(P-x)\, dS(P),$$

donde $K_j(y,P)$ son los núcleos de Poisson y dS denota la medida de superficie en $\partial\Omega$.

Al igual que toda solución fundamental de $(-\Delta)^m$, la función de Green es suave fuera del origen y homogénea de grado $2m-n$ si n es impar o $2m<n$ y aparece en su expresión la función logaritmo si n es par y $2m \geq n$.

Además, tanto para la función de Green como para los núcleos de Poisson conocemos las siguientes estimaciones:

• Si $m=1$, la solución fundamental clásica es (1.2) y el núcleo de Poisson asociado es positivo, así como también la función de Green. Para el caso $n \geq 3$ y Ω un dominio regular Gruter y Widman en [**Wid67**] y [**GW82**] obtienen las siguientes estimaciones:

$$|G(x,y)| \leq C\,|x-y|^{2-n}$$

$$|G(x,y)| \leq C\,d(x)|x-y|^{1-n} \tag{1.6}$$

$$|G(x,y)| \leq C\,d(x)d(y)|x-y|^{-n}$$

$$|D_x^\alpha G(x,y)| \leq C\,|x-y|^{1-n} \qquad \text{para } \alpha \text{ con } \ |\alpha|=1,$$

donde $d(x)$ es la función distancia al borde: $d(x) := \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) = \operatorname{ínf}_{Q\in\partial\Omega}|x-Q|$.

Recordemos que por $\Omega \in \mathcal{C}^k$ entendemos que su borde $\partial\Omega$ es una variedad $\mathcal{C}^k$ de dimensión $n-1$. Es decir, el borde es localmente el gráfico de una función $\gamma \in \mathcal{C}^k$ de $n-1$ variables.

• Si $m \geq 2$ no podemos asegurar la positividad de la función de Green $G_m(x,y)$ ni de los núcleos de Poisson K_j salvo en dominios particulares, por ejemplo en la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$ o pequeñas deformaciones de ella para el caso $\mathbb{R}^2$ (ver [**DS04b**]).

Para $n=2$ y $\Omega \in \mathcal{C}^{6m+4}$ o $n \geq 3$ y $\Omega \in \mathcal{C}^{5m+2}$, Krasovskii en [**Kra67**] y Dall'Acqua y Sweers en [**DS04a**] obtuvieron las siguientes estimaciones:

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \leq C \qquad \text{para } |\alpha| < 2m-n$$

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \leq C\,\log\left(\frac{2\operatorname{diam}(\Omega)}{|x-y|}\right) \qquad \text{para } |\alpha| = 2m-n$$

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \leq C\,|x-y|^{2m-n-|\alpha|}\ \operatorname{mín}\left\{1, \frac{d(y)}{|x-y|}\right\}^m \qquad \text{para } |\alpha| > 2m-n \tag{1.7}$$

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \leq C\,\frac{1}{|x-y|^n}\ \operatorname{mín}\left\{1, \frac{d(y)}{|x-y|}\right\}^m \qquad \text{para } |\alpha| = 2m$$

$$|K_j(x,y)| \leq C\,\frac{d(x)^m}{|x-y|^{n-j+m-1}} \qquad \text{para } 0 \leq j \leq m-1.$$

1.3. Ecuación de la onda

Dadas funciones f y g definidas en un dominio Ω, consideramos el problema de Cauchy para la propagación de ondas

$$\begin{cases} \partial_{tt}u + Au = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u(0,\cdot) = f & \text{en } \Omega \\ \partial_t u(0,\cdot) = g & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

donde A es un operador elíptico simétrico en un espacio de Hilbert H.

Se sabe que (1.8) tiene solución única, es decir, el problema está bien planteado si el operador A es esencialmente autoadjunto.

Recordemos que el adjunto de un operador A se define para

$$\varphi \in D(A^*) := \{\varphi \in H : \exists \eta \in H : (A\psi, \varphi) = (\psi, \eta) \text{ para toda } \psi \in H\}$$

como $A^*(\varphi) = \eta$.

Entonces, si $A = A^*$, esto es, A simétrico y $D(A) = D(A^*)$, decimos que A es autoadjunto y si la clausura del operador A resulta autoadjunta, decimos que A es esencialmente autoadjunto.

La importancia de que el operador A sea esencialmente autoadjunto, es que bajo esta hipótesis podemos aplicar el Teorema de representación espectral y obtenemos que la onda que satisface el problema de Cauchy es

$$\phi(t,\cdot) = \cos(tA^{1/2})\, f + A^{-1/2}\, \mathrm{sen}(tA^{1/2})\, g.$$

Si A no es esencialmente autoadjunto, necesitamos dar más información para decidir cuál extensión autoadjunta vamos a usar. En general, estas condiciones vienen dadas por las condiciones de borde del problema.

Parte 1

Estimaciones a priori

Capítulo 2

El Problema de Dirichlet en espacios con pesos

Consideramos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ y $\Omega \in \mathcal{C}^2$.

Si $f \in L^p(\Omega)$, estimaciones a piori para la solución del problema (2.1) son conocidas y están dadas por (1.3). En este capítulo consideramos $f \in L^p_\omega(\Omega)$ con $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ y probamos que tenemos estimaciones a priori del mismo tipo que (1.3) en espacios de Sobolev con peso ω. Es decir, existe una constante positiva $C = C(\Omega, n, \omega)$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}_\omega(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{L^p_\omega(\Omega)}, \tag{2.2}$$

para $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

Por la fórmula de representación de Green la solución del problema (2.1) está dada por

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy, \tag{2.3}$$

donde $G(x,y)$ es la función de Green del operador $-\Delta$ en Ω, y se puede escribir como

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x,y), \tag{2.4}$$

donde $\Gamma(x)$ es la solución fundamental clásica para el problema de Poisson dada en (1.2) y $h(x,y)$ satisface para cada $y \in \Omega$ fijo

$$\begin{cases} \Delta_x h(x,y) = 0 & x \in \Omega \\ h(x,y) = -\Gamma(x-y) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Luego,

$$h(x,y) = -\frac{1}{n\,(n-2)\,w_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-Q|^{n-2}}\, P(y,Q)\, dS(Q). \tag{2.5}$$

La estimación (2.2) que buscamos probar involucra a las derivadas $D^\alpha_x u$ para α con $|\alpha| \leq 2$. El objetivo es entonces acotar dichas derivadas por operadores aplicados a f que sean acotados en el espacio de Lebesgue con pesos $L^p_\omega(\Omega)$ para $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

2.1. Estimaciones para la solución y las derivadas de primer orden

Si bien la función f está definida sobre Ω, cuando sea necesario pensaremos f definida sobre todo $\mathbb{R}^n$ extendiéndola por cero fuera de Ω.

Si δ denota el diámetro de Ω, por la fórmula de representación (2.3) y usando que $|G(x,y)| \leq C|x-y|^{2-n}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq C \int_{|x-y|\leq\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}}\, dy \\
&= C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{2^{-(k+1)}\delta\leq|x-y|\leq 2^{-k}\delta\}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}}\, dy \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{2^{-(k+1)}\delta\leq|x-y|\leq 2^{-k}\delta\}} \frac{|f(y)|}{(2^{-(k+1)}\delta)^{n-2}}\, dy \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{-(k+1)}\delta)^{n-2}} \int_{\{|x-y|\leq 2^{-k}\delta\}} |f(y)|\, dy \\
&\leq C\, 2^n\, \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}}\, (2^{-k}\delta)^{-n} \int_{\{|x-y|\leq 2^{-k}\delta\}} |f(y)|\, dy \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}}\, Mf(x) \leq C\, Mf(x), \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

donde M es el operador Maximal de Hardy-Littlewood definido por (1.1).

Por otra parte, para α con $|\alpha| = 1$

$$|D_x^\alpha G(x,y)| \leq C|x-y|^{1-n},$$

y como $|x-y|^{1-n}$ es integrable en Ω

$$D_x^\alpha u(x) = \int_\Omega D_x^\alpha G(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Así, con el mismo argumento que en (2.6)

$$|D_x^\alpha u(x)| \leq C\, Mf(x)$$

y hemos probado el siguiente lema.

Lema 2.1. *Sea u solución del problema de Dirichlet (2.1) con $n \geq 3$. Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, n)$ tal que, para cada $x \in \Omega$ y para todo α con $|\alpha| \leq 1$*

$$|D_x^\alpha u(x)| \leq C\, Mf(x).$$

2.2. Estimaciones para las derivadas de segundo orden de la solución

Para obtener estimaciones para las derivadas de segundo orden $D_x^\alpha u$ para α con $|\alpha| = 2$ a través de su representación (2.3), necesitamos estudiar cada término de (2.4) así como también la función de Green.

Propiedades de $h(x, y)$

Lema 2.2. *Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ y $n \geq 3$ existe una constante positiva $C = C(\Omega, n, \alpha)$ tal que*

$$|D_x^\alpha h(x, y)| \leq C\, d(x)^{2-n-|\alpha|},$$

donde $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Demostración. Sea $Q \in \partial\Omega$. Como el núcleo de Poisson $P(y, Q)$ es positivo y su integral en $\partial\Omega$ es uno se tiene por (2.5)

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha h(x, y)| &= \left| \frac{1}{n(n-2)\, w_n} \int_{\partial\Omega} D_x^\alpha |x - Q|^{2-n}\, P(y, Q)\, dS(Q) \right| \\ &\leq C \int_{\partial\Omega} |x - Q|^{2-n-|\alpha|}\, P(y, Q)\, dS(Q) \\ &\leq C d(x)^{2-n-|\alpha|} \int_{\partial\Omega} P(y, Q)\, dS(Q) = C d(x)^{2-n-|\alpha|} \end{aligned}$$

ya que si $Q \in \partial\Omega$, $d(x) \leq |x - Q|$. □

Observación 2.3. El resultado sigue siendo válido para $n = 2$, si $|\alpha| > 0$.

Corolario 2.4. *Para cada $x \in \Omega$ y $|\alpha| = 2$*

$$D_x^\alpha \int_\Omega h(x, y)\, f(y)\, dy = \int_\Omega D_x^\alpha h(x, y)\, f(y)\, dy.$$

Demostración. Para $1 \leq i, j \leq n$ definimos $g(x, y) = \partial_{x_j} h(x, y)$ y

$$g_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \left[g(x + \varepsilon e_i, y) - g(x, y) \right],$$

donde e_i el elemento i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Es claro que $\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x, y) f(y) = \partial_{x_i} g(x, y) f(y)$ y por el Lema 2.2 $|\partial_{x_i} g(x, y) f(y)| \leq d(x)^{-n} f(y)$.

Por otro lado, existe ξ en la recta que une $x + \varepsilon e_i$ con x tal que $|g_\varepsilon(x, y) f(y)| \leq |\partial_{x_i} g(\xi, y) f(y)|$ y usando nuevamente el Lema 2.2 se tiene $|g_\varepsilon(x, y) f(y)| \leq d(\xi)^{-n} f(y)$.

Entonces, si tomamos ε de manera que $\varepsilon < \frac{d(x)}{2}$ se tiene $d(x) \leq 2d(\xi)$ con lo cual $g_\varepsilon(x, y) f(y)$ está uniformemente acotada y el resultado se sigue aplicando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. □

Propiedades de $\Gamma(x)$

Para α con $|\alpha| = 1$, $|D_x^\alpha \Gamma(x)| \leq C|x|^{1-n}$ y por lo tanto

$$D_x^\alpha \int_\Omega \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy = \int_\Omega D_x^\alpha \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Cuando $|\alpha| = 2$, $D_x^\alpha \Gamma(x-y)$ se comporta como $|x-y|^{-n}$ y no es integrable. Por lo tanto no podemos intercambiar el orden entre derivación e integración. Sin embargo, mediante un argumento clásico, encontramos en forma explícita su formulación débil como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Sea Γ la solución fundamental clásica para el problema de Poisson. Entonces para $1 \leq i, j \leq n$*

$$\partial_{x_i} \int_\Omega \partial_{x_j} \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy = Kf(x) + c\, f(x),$$

donde la igualdad se entiende en sentido débil, c es una constante y K es el operador integral singular de Calderón-Zygmund dado por

$$Kf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Demostración. Para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\left(\partial_{x_i} \int_\Omega \partial_{x_j} \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy, \phi \right) &= -\int_\Omega \left(\int_\Omega \partial_{x_j} \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy \right) \partial_{x_i} \phi(x)\, dx \\
&= -\int_\Omega \left(\int_\Omega \partial_{x_j} \Gamma(x-y)\, \partial_{x_i} \phi(x)\, dx \right) f(y)\, dy \\
&= -\int_\Omega H\phi(y)\, f(y)\, dy, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

donde $H\phi(y) = \displaystyle\int_\Omega \partial_{x_j} \Gamma(x-y)\, \partial_{x_i} \phi(x)\, dx$ resulta finito pues $|\partial_{x_j} \Gamma(x-y)| \leq \dfrac{1}{n w_n} |x-y|^{1-n}$.

Ahora bien, si $\Omega_\varepsilon := \Omega \cap \{|x-y| > \varepsilon\}$ podemos escribir

$$H\phi(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Gamma(x-y)\, \phi(x)\, dx + \int_{\{|\xi - y| = \varepsilon\}} \partial_{x_j} \Gamma(\xi - y)\, \phi(\xi)\, \frac{\xi_i - y_i}{|\xi - y|}\, d\xi \right). \qquad (2.8)$$

Analizamos la integral en $\{|\xi - y| = \varepsilon\}$ sumando y restando $\phi(y)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\{|\xi-y|=\varepsilon\}} \partial_{x_j} \Gamma(\xi - y)\, \phi(\xi)\, \frac{\xi_i - y_i}{|\xi - y|}\, d\xi &= \int_{\{|\xi-y|=\varepsilon\}} \partial_{x_j} \Gamma(\xi - y)\, \phi(y)\, \frac{\xi_i - y_i}{|\xi - y|}\, d\xi \\
&+ \int_{\{|\xi-y|=\varepsilon\}} \partial_{x_j} \Gamma(\xi - y)\, (\phi(\xi) - \phi(y))\, \frac{\xi_i - y_i}{|\xi - y|}\, d\xi =: \phi(y) H_{1,\varepsilon}(y) + H_{2,\varepsilon} \phi(y).
\end{aligned}$$

Pero $\lim_{\varepsilon\to 0} H_{1,\varepsilon}$ es finito. En efecto,

$$\begin{aligned} |H_{1,\varepsilon}(y)| &\leq \frac{1}{nw_n}\int_{\{|\xi-y|=\varepsilon\}} |\xi-y|^{1-n}\,d\xi \\ &= \frac{1}{n}\,\varepsilon^{1-n}\int_{\{|\xi-y|=\varepsilon\}} d\xi \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{\varepsilon\to 0}\phi(y)H_{1,\varepsilon}(y) = c(y)\,\phi(y)$ donde

$$c(y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi-y|=\varepsilon} \partial_{x_j}\Gamma(\xi-y)\,\frac{(\xi_i-y_i)}{|\xi-y|}\,d\xi$$

y llamando $z=\xi-y$ se ve que c no depende de la variable y.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |H_{2,\varepsilon}\phi(y)| &\leq \int_{\{|\xi-y|=\varepsilon\}} |\partial_{x_j}\Gamma(\xi-y)|\,|\phi(\xi)-\phi(y)|\,d\xi \\ &\leq \int_{\{|\xi-y|=\varepsilon\}} \frac{1}{nw_n}\,|\xi-y|^{1-n}\,\|\nabla\phi\|_\infty\,|\xi-y|\,d\xi \\ &= \|\nabla\phi\|_\infty\,\frac{1}{nw_n}\,\varepsilon^{2-n}\int_{\{|\xi-y|=\varepsilon\}} d\xi \\ &= \|\nabla\phi\|_\infty\,\frac{1}{n}\,\varepsilon, \end{aligned}$$

y entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} H_{2,\varepsilon} = 0$.

Finalmente, nos queda analizar en (2.8) la integral sobre Ω_ε. Pero, como $\partial_{x_j}\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ y es una función homogénea de grado $1-n$ se sigue que $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Gamma(x-y)$ es homogénea de grado $-n$ y tiene promedio nulo sobre la esfera unitaria (ver [**Agm65**, Lema 11.1, pág 152]). Entonces se sigue que

$$K\phi(y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_{x_i}\partial_{x_j}\Gamma(x-y)\,\phi(x)\,dx$$

es un operador de Calderón-Zygmund ([**CZ52**]).

Entonces por (2.7), (2.8) y lo anterior

$$\left(\partial_{x_i}\int_\Omega \partial_{x_j}\Gamma(x-y)\,f(y)\,dy, \phi\right) = (Kf + cf, \phi)\,.$$

$\square$

Estimaciones para la Función de Green

Estimaciones para las derivadas de segundo orden de la función de Green del operador $-\Delta$ en Ω fueron probadas por A. Dall'Acqua and G. Sweers en [**DS04a**] para dominios $\mathcal{C}^7$, como enunciamos en (1.7).

En esta sección damos estimaciones válidas para dominios $\mathcal{C}^2$ siguiendo el argumento dado por Widman en Teorema 2.3 i) en [**Wid67**] para el análisis de la función de Green, donde demuestra que $G(x,y) \leq C\, d(x)\, |x-y|^{1-n}$.

Teorema 2.6. *Sea Ω un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^2$ y $G(x,y)$ la función de Green asociada al problema (2.1). Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, n)$ tal que*

$$|D_x^\alpha G(x,y)| \leq C\, \frac{d(x)}{|x-y|^{n+1}}, \tag{2.9}$$

para todo α con $|\alpha| = 2$ y $(x,y) \in \Omega \times \Omega$.

Demostración. Recordemos que $G(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x,y)$ definida en (2.4).

Si $|x-y| < 2d(x)$ la estimación (2.9) se sigue fácilmente, pues

$$|D_x^\alpha \Gamma(x-y)| \leq C|x-y|^{-n} \leq C \frac{d(x)}{|x-y|^{n+1}}$$

y por el Lema 2.2,

$$|D_x^\alpha h(x,y)| \leq C d(x)^{-n} \leq C \frac{d(x)}{|x-y|^{n+1}}.$$

Luego, la dificultad se encuentra en probar la estimación para $(x,y) \in \Omega \times \Omega_2$ con

$$\Omega_2 := \{y \in \Omega : |x-y| \geq 2d(x)\}.$$

Primero escribimos $\Omega \times \Omega_2 = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, donde

$$\mathcal{U}_1 := \{(x,y) \in \Omega \times \Omega_2 : d(y) \leq 2d(x)\} \text{ y } \mathcal{U}_2 := \{(x,y) \in \Omega \times \Omega_2 : d(y) > 2d(x)\}.$$

Para $(x,y) \in \mathcal{U}_1$ probaremos en el Lema 2.7 que existe una constante positiva $C = C(\Omega, n)$ tal que

$$|D_x^\alpha G(x,y)| \leq C\, |x-y|^{-n} \tag{2.10}$$

y

$$|D_x^\alpha G(x,y)| \longrightarrow 0 \text{ cuando } d(y) \to 0. \tag{2.11}$$

Una vez que hayamos probado (2.10) y (2.11), la demostración de (2.9) para $(x,y) \in \mathcal{U}_1$ se sigue de la misma forma que en la demostración del Teorema 2.3 i) in [**Wid67**], donde prueba que $G(x,y) \leq C\, d(x)\, |x-y|^{1-n}$, tomando en este caso la función $D_x^\alpha G(x,y)$ en lugar de la función $G(x,y)$.

Por otra parte, para $(x, y) \in \mathcal{U}_2$ se tiene que $d(y) > 2\, d(x)$. Pero además, es fácil ver que $d(y) < 2\,|x - y|$. En efecto, si $Q \in \partial\Omega$ es tal que $d(x) = |x - Q|$, entonces

$$d(y) \leq |y - x| + |Q - x| \leq |y - x| + \frac{1}{2}\, d(y).$$

Usamos entonces el mismo argumento que en $\mathcal{U}_1$ y probamos que

$$\left| D_y^\alpha G(x, y) \right| \leq C\, \frac{d(y)}{|x - y|^{n+1}}. \tag{2.12}$$

Observemos que, si denotamos $D_1^\alpha = D_x^\alpha$ y $D_2^\alpha = D_y^\alpha$, (2.12) nos dice que

$$|D_2^\alpha G(x, y)| \leq C\, \frac{d(y)}{|x - y|^{n+1}},$$

pero, como G es simétrica

$$|D_1^\alpha G(x, y)| = |D_2^\alpha G(y, x)|\, .$$

Entonces, por (2.12)

$$|D_1^\alpha G(x, y)| \leq C\, \frac{d(x)}{|x - y|^{n+1}}$$

y el teorema queda demostrado. □

Lema 2.7. *Sea Ω un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^2$ y $G(x, y)$ la función de Green asociada al problema (2.1). Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, n)$ tal que*

1. $|D_x^\alpha G(x, y)| \leq C\, |x - y|^{-n}$
2. $|D_x^\alpha G(x, y)| \longrightarrow 0$ *cuando* $d(y) \to 0$.

Demostración. 1. Para $(x_0, y) \in \mathcal{U}_1$ sea v solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{en } B(x_0, \frac{1}{2}\, d(x_0)) \\ v = G(\cdot, y) & \text{sobre } \partial B(x_0, \frac{1}{2}\, d(x_0)). \end{cases} \tag{2.13}$$

Por la fórmula de representación y como sabemos en forma explícita la función de Green en una bola,

$$v(x) = \int_{|z - x_0| = r} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{r\, n\, w_n}\, \frac{v(z)}{|x - z|^n}\, dS(z)$$

para $r = \frac{1}{2}\, d(x_0)$. Entonces para α con $|\alpha| = 2$

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha v(x_0)| &\leq \frac{(n+2)}{w_n} \int_{|z - x_0| = r} r^{-n-1}\, |v(z)|\, dS(z) \\ &= \frac{(n+2)}{w_n}\, r^{-n-1} \int_{|z - x_0| = r} |G(z, y)|\, dS(z). \end{aligned}$$

Del Teorema 3.3 iii) en [**GW82**] se tiene $|G(z,y)| \leq \dfrac{d(y)\,d(z)}{|z-y|^n}$ y entonces

$$|D_x^\alpha v(x_0)| \leq \frac{(n+2)}{w_n}\, r^{-n-1}\, d(y) \int_{|z-x_0|=r} \frac{d(z)}{|z-y|^n}\, dS(z).$$

Por otra parte, para $(x_0, y) \in \mathcal{U}_1$ y $z \in \partial B(x_0, \frac{1}{2}\, d(x_0))$ podemos ver fácilmente que $d(y) \leq 4r$, $d(z) \leq 3r$ y $|z-y| \geq \frac{3}{4}\,|x_0 - y|$. Entonces

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha v(x_0)| &\leq \frac{(n+2)}{w_n}\, 4\, r^{-n} \int_{|z-x_0|=r} \frac{d(z)}{|z-y|^n}\, dS(z)\\ &\leq \frac{4^{n+1}\,(n+2)}{3^{n-1}\, w_n}\, r^{-n+1}\, |x_0-y|^{-n} \int_{|z-x_0|=r} dS(z)\\ &\leq \frac{4^{n+1}\,(n+2)}{3^{n-1}}\, |x_0-y|^{-n},\end{aligned}$$

y se obtiene (2.10) observando que por (2.13) $v(x) = G(x,y)$ para todo $x \in B(x_0, \frac{1}{2}\, d(x_0))$.

Veamos ahora la demostración de 2.

Para $x \in \Omega$ fijo, sea y tal que $|x-y| = \rho$ y tenemos $G(x,y) \geq C\,|x-y|^{2-n}$ para ρ suficientemente pequeño (ver [**GW82**]).

Sea ahora $h \in \mathbb{R}$ con $|h| \leq \frac{1}{2}\,\rho$ tal que, para todo ξ en el segmento $[x, x + h\, e_j]$

$$d(\xi) < c_1\,|\xi - y| \ \text{ y } d(y) < c_2\, d(\xi)$$

donde e_j es elemento j-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, c_1 y c_2 son constantes positivas.

Luego, de la misma manera que probamos (2.10), obtenemos

$$|D_x^\alpha G(\xi, y)| \leq C\,|\xi - y|^{-n}.$$

Entonces, para $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|h|}\,\big|\partial_{x_j} G(x + h\, e_i, y) - \partial_{x_j} G(x,y)\big| &\leq |D_x^\alpha G(\xi,y)| \leq C\,|\xi - y|^{-n}\\ &\leq C\,|x-y|^{-n} \leq C\,\rho^{-2}\, G(x,y).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pero, si $y \in \partial\Omega$, también vale la estimación (2.14) ya que $G(x,y) = 0$ on $\partial\Omega$ y por el principio del máximo obtenemos (2.14) para todo y tal que $\rho \leq |x-y|$.

Finalmente, tomando $h \to 0$

$$|D_x^\alpha G(x,y)| \leq C\,\rho^{-2}\, G(x,y) \longrightarrow 0 \text{ cuando } d(y) \to 0$$

y el lema queda probado. □

2.3. Resultado principal

Como vimos en el Lema 2.1, la solución u del problema (2.1) y sus derivadas de primer orden están acotadas puntualmente por Mf donde M es el operador Maximal de Hardy-Littlewood. Puesto que M es acotado en el espacio de Lebesgue con pesos $L^p_\omega(\Omega)$ para $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$, se sigue que

$$\|D^\alpha_x u\|_{L^p_\omega(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p_\omega(\Omega)}, \tag{2.15}$$

para α con $|\alpha| \leq 1$.

En el resultado principal de esta sección (ver Teorema 2.9), demostramos que $\|u\|_{W^{2,p}_\omega(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p_\omega(\Omega)}$. Este resultado es una consecuencia inmediata de (2.15) y del siguiente lema que establece una acotación para las derivadas de segundo orden de u por operadores aplicados a f continuos en el espacio $L^p_\omega(\Omega)$.

Lema 2.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^2$ y sea u solución del problema (2.1). Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, n)$ tal que, para casi todo $x \in \Omega$ y para todo α con $|\alpha| = 2$*

$$|D^\alpha_x u(x)| \leq C\left\{\widetilde{K}f(x) + Mf(x) + |f(x)|\right\},$$

donde $\widetilde{K}f(x) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|x-y|>\varepsilon} D^\alpha_x\Gamma(x-y)\,f(y)\,dy\right|.$

Demostración. Por la fórmula de representación (2.3) junto con (2.4) y el Teorema 2.5 se sigue que

$$\begin{aligned} D^\alpha_x u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x-y|\leq d(x)} D^\alpha_x\Gamma(x-y)\,f(y)\,dy + \int_{|x-y|>d(x)} D^\alpha_x\Gamma(x-y)\,f(y)\,dy \\ + c\,f(x) + \int_{|x-y|\leq d(x)} D^\alpha_x h(x,y)\,f(y)\,dy + \int_{|x-y|>d(x)} D^\alpha_x h(x,y)\,f(y)\,dy, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} D^\alpha_x u(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x-y|\leq d(x)} D^\alpha_x\Gamma(x-y)\,f(y)\,dy + c\,f(x) \\ &+ \int_{|x-y|\leq d(x)} D^\alpha_x h(x,y)\,f(y)\,dy + \int_{|x-y|>d(x)} D^\alpha_x G(x,y)\,f(y)\,dy \\ &=: I + II + III + IV. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ahora bien,

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x-y|} D^\alpha_x\Gamma(x-y)\,f(y)\,dy - \int_{|x-y|>d(x)} D^\alpha_x\Gamma(x-y)\,f(y)\,dy,$$

pero

$$\left| \int_{|x-y|>d(x)} D_x^\alpha \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy \right| \leq \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} D_x^\alpha \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy \right| = \widetilde{K} f(x)$$

y entonces

$$|I| \leq |Kf(x)| + \widetilde{K} f(x) \leq 2\widetilde{K} f(x).$$

Por otra parte,

$$|II| \leq C f(x)$$

y sólo queda entonces estimar los dos últimos términos en (2.16).

Por Lema 2.2

$$|III| = \frac{C}{d(x)^n} \int_{|x-y|\leq d(x)} |f(y)|\, dy \leq CMf(x),$$

y por el Teorema 2.6 obtenemos

$$\begin{aligned}
|IV| &\leq C \int_{|x-y|>d(x)} \frac{d(x)}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \\
&= C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{2^k d(x)<|x-y|\leq 2^{k+1} d(x)\}} \frac{d(x)}{|x-y|^{n+1}} |f(y)|\, dy \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{2^k d(x)\leq|x-y|< 2^{k+1} d(x)\}} \frac{d(x)}{(2^k d(x))^{n+1}} |f(y)|\, dy \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(x)}{(2^k d(x))^{n+1}} \int_{\{|x-y|< 2^{k+1} d(x)\}} |f(y)|\, dy \\
&= C\, 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} (2^{k+1} d(x))^{-n} \int_{\{|x-y|< 2^{k+1} d(x)\}} |f(y)|\, dy \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} Mf(x) = C\, Mf(x)
\end{aligned}$$

y el lema queda probado. □

Esto nos lleva al resultado principal de este capítulo:

Teorema 2.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^2$ y sea u solución del problema (2.1) para $f \in L^p_\omega(\Omega)$ con $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, n, \omega)$ tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}_\omega(\Omega)} \leq C\, \|f\|_{L^p_\omega(\Omega)}.$$

Demostración. La demostración de este resultado es una consecuencia inmediata del Lema 2.1 y el Lema 2.8 ya que tanto el operador maximal M como $\widetilde{K}$ son acotados en el espacio $L^p_\omega(\Omega)$ (ver por ejemplo [**Ste**, Cap. V]). □

Capítulo 3

El Problema de Dirichlet de mayor orden en espacios con pesos

Consideramos el probema de Dirichlet de orden m

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
(-\Delta)^m u = f & \text{en } \Omega \\
\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \quad 0 \leq j \leq m-1,
\end{array}
\right.
\tag{3.1}
$$

en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\Omega \in \mathcal{C}^{6m+4}$ para $n = 2$ y $\Omega \in \mathcal{C}^{5m+2}$ para $n \geq 3$.

Para el caso particular $m = 1$ y $n \geq 3$ obtuvimos en el Capítulo 2 estimaciones a priori con pesos para la solución del problema (3.1) en dominios $\mathcal{C}^2$.

En este capítulo damos la extensión natural de dicho resultado, esto es, probamos que existe una constante positiva $C = C(\Omega, m, n, \omega)$ tal que

$$
\|u\|_{W^{2m,p}_\omega(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{L^p_\omega(\Omega)},
\tag{3.2}
$$

para $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

La restricción a dominios más regulares se debe a que no podemos obtener estimaciones para la función de Green de estos operadores con menos hipótesis sobre los dominios y por lo tanto usaremos las estimaciones (1.7) [**DS04a**].

Observación 3.1. Recordemos que en el Capítulo 2 no fue probada la estimación (3.2) para $n = 2$, $m = 1$ y $\Omega \in \mathcal{C}^2$ ya que teníamos como hipótesis $n \geq 3$. En el presente capítulo, si bien creemos que no debe ser necesaria tanta regularidad, vemos que el resultado es válido para $\Omega \in \mathcal{C}^{10}$.

Recordemos que la solución del problema (3.1) puede escribirse como

$$
u(x) = \int_\Omega G_m(x,y)\, f(y)\, dy
\tag{3.3}
$$

donde $G_m(x,y)$ es la función de Green del operador $(-\Delta)^m$ en Ω y

$$
G_m(x,y) = \Gamma_m(x-y) + h_m(x,y)
$$

con $\Gamma_m(x)$ una solución fundamental de (3.1) y $h_m(x,y)$ satisface para cada $y \in \Omega$ fijo

$$\begin{cases} (-\Delta_x)^m h_m(x,y) = 0 & x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j h_m(x,y) = -\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \Gamma_m(x-y) & x \in \partial\Omega \quad 0 \le j \le m-1. \end{cases}$$

Luego

$$h_m(x,y) = -\sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} K_j(y,P) \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \Gamma_m(P-x)\, dS(P),$$

donde $K_j(y,P)$ son los núcleos de Poisson y $dS(P)$ denota la medida de superficie en $\partial\Omega$.

Las ideas y herramientas principales utilizadas para demostrar (3.2) son las mismas que para el operador Laplaciano, es decir, $m=1$, usando en este caso los siguientes resultados de acotación tanto para la función de Green como para los núcleos de Poisson dados en los preliminares

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \le C \quad \text{para } |\alpha| < 2m-n \tag{3.4}$$

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \le C \log\left(\frac{2\,\mathrm{diam}(\Omega)}{|x-y|}\right) \quad \text{para } |\alpha| = 2m-n \tag{3.5}$$

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \le C\,|x-y|^{2m-n-|\alpha|} \quad \text{para } |\alpha| > 2m-n \tag{3.6}$$

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \le C\,\frac{1}{|x-y|^n}\ \mathrm{mín}\left\{1, \frac{d(y)}{|x-y|}\right\}^m \quad \text{para } |\alpha| = 2m \tag{3.7}$$

$$|K_j(x,y)| \le C\,\frac{d(x)^m}{|x-y|^{n-j+m-1}} \quad \text{para } 0 \le j \le m-1. \tag{3.8}$$

Observación 3.2. Se sigue de (3.7) que para α con $|\alpha| = 2m$,

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \le C\,\frac{d(y)^m}{|x-y|^{m+n}}$$

y es equivalente a

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \le C\,\frac{d(x)^m}{|x-y|^{m+n}}. \tag{3.9}$$

En efecto, si $d(y) \le d(x)$ es directo de (3.7). Para el caso $d(x) < d(y)$, notamos $D_1^\alpha = D_x^\alpha$ y $D_2^\alpha = D_y^\alpha$. Así, por ser G_m simétrica y por (3.7) se sigue que

$$|D_2^\alpha G_m(x,y)| = |D_1^\alpha G_m(y,x)| \le C\,\frac{d(y)}{|x-y|^{n+1}} \le C\,\frac{d(x)}{|x-y|^{n+1}}.$$

Entonces

$$|D_1^\alpha G(x,y)| \le C\,\frac{d(x)}{|x-y|^{n+1}}.$$

3.1. Estimaciones para la solución y las derivadas de orden menor a $2m$

De las estimaciones (3.4), (3.5) y (3.6) se sigue que

$$|D_x^\alpha G_m(x,y)| \le C|x-y|^{1-n}$$

para α con $|\alpha| \le 2m-1$.

Entonces, de la misma manera que para el Lema 2.1 se tiene

$$|D_x^\alpha u(x)| \quad \le \quad \int_\Omega |D^\alpha G_m(x,y)|\,|f(y)|\,dy \le C \int_\Omega \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \le C\,Mf(x)$$

y probamos así el siguiente resultado.

Lema 3.3. *Sea u solución del problema (3.1). Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, m, n)$ tal que para cada $x \in \Omega$ y para todo α con $|\alpha| \le 2m-1$*

$$|D_x^\alpha u(x)| \le C\,Mf(x).$$

3.2. Estimaciones para las derivadas de orden $2m$ de la solución

En la expresión de $h_m(x,y)$ aparecen m núcleos de Poisson no necesariamente positivos, por lo que la estimación de sus derivadas requiere un poco más de cuidado que en el caso $m=1$ y debemos considerar además $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ tales que $|x-y| \le d(x)$, como muestra el siguiente lema.

Lema 3.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ con $|\alpha| \ge 2m-n+1$. Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, m, n, \alpha)$ tal que*

$$|D^\alpha h_m(x,y)| \le C\,d(x)^{2m-n-|\alpha|},$$

para $|x-y| \le d(x)$.

Demostración. Recordemos que $h_m(x,y)$ puede escribirse como

$$h_m(x,y) = -\sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} K_j(y,P) \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \Gamma_m(P-x)\,dS(P),$$

con lo cual, es suficiente hallar una estimación para $D_x^\alpha(\frac{\partial}{\partial\nu})^j \Gamma_m(P-x)$ y $K_j(y,P)$.

Por ser $\Gamma_m(x-y)$ una solución fundamental para el operador $(-\Delta)^m$ se sigue que

$$\left| D_x^\alpha (\frac{\partial}{\partial\nu})^j \Gamma_m(P-x) \right| \le C\,|P-x|^{2m-n-|\alpha|-j},$$

para $|\alpha| + j \geq 2m - n + 1$ y por (3.8)

$$|K_j(y, P)| \leq C\, \frac{d(y)^m}{|y - P|^{n-j+m-1}},$$

para $0 \leq j \leq m - 1$, $y \in \Omega$ y $P \in \partial\Omega$.

Como además $|x - y| \leq d(x)$ implica $d(y) < 2\, d(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha h_m(x, y)| &\leq C \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \frac{d(y)^m}{|y - P|^{n-1+m-j}}\, |P - x|^{2m-n-|\alpha|-j}\, dS(P)\\ &\leq C\, d(x)^{2m-n-|\alpha|} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \frac{d(y)^{m-j}}{|y - P|^{n-1+m-j}}\, dS(P),\end{aligned}$$

para $|\alpha| + j \geq 2m - n + 1$.

Entonces basta probar que cada integral de la suma es finita. Para ello escribimos $\partial\Omega = F_1 \cup F_2$, donde

$$F_1 := \{P \in \partial\Omega : |P_0 - P| > 2\, d(y)\} \quad y \quad F_2 := \{P \in \partial\Omega : |P_0 - P| \leq 2\, d(y)\},$$

con $P_0 \in \partial\Omega$ tal que $d(y) = |y - P_0|$.

- Para $P \in F_1$ se sigue que $\frac{1}{2}\, |P_0 - P| \leq |y - P|$. En efecto,

$$|P_0 - P| \leq d(y) + |y - P| \leq \frac{1}{2}\, |P_0 - P| + |y - P|.$$

Con lo cual

$$\int_{F_1} \frac{d(y)^{m-j}}{|y - P|^{n-1+m-j}}\, dS(P) \leq d(y)^{m-j} \int_{F_1} \frac{1}{|P_0 - P|^{n-1+m-j}}\, dS(P) \tag{3.10}$$

que resulta ser una integral en $\mathbb{R}^{n-1}$ y utilizando coordenadas polares

$$(3.10) \leq C\, d(y)^{m-j} \int_{2\, d(y)}^{\infty} r^{-m+j-1} dr \leq C.$$

- Para $P \in F_2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{F_2} \frac{d(y)^{m-j}}{|y - P|^{n-1+m-j}}\, dS(P) &\leq d(y)^{m-j} \int_{F_2} \frac{1}{d(y)^{n-1+m-j}}\, dS(P)\\ &\leq \frac{1}{d(y)^{n-1}} \int_{|P_0 - P| \leq 2\, d(y)} dS(P) \leq C\end{aligned}$$

pues $d(y) \leq |y - P|$. □

Se sigue del lema anterior que para cada $x \in \Omega$ y para α con $|\alpha| \geq 2m - n + 1$, $D_x^\alpha h_m(x, y)$ esta uniformemente acotada en un entorno de x y entonces

$$D_x^\alpha \int_\Omega h_m(x, y)\, f(y)\, dy = \int_\Omega D_x^\alpha h_m(x, y)\, f(y)\, dy. \tag{3.11}$$

Para analizar la parte correspondiente a $D_x^\alpha \Gamma_m$ para α con $|\alpha| = 2m$, observemos que para $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ con $|\beta| = 2m-1$ se sigue en forma análoga al Teorema 2.5 que, para $1 \le i \le n$

$$D_{x_i} \int_\Omega D_x^\beta \Gamma_m(x-y)\, f(y)\, dy = K f(x) + c\, f(x) \tag{3.12}$$

donde la igualdad se entiende en sentido débil, c es una constante y K es un operador de Calderón - Zygmund dado por

$$K f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} D_x^\alpha \Gamma_m(x-y)\, f(y)\, dy. \tag{3.13}$$

3.3. Resultado principal

Estamos entonces en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^{6m+4}$ para $n = 2$ y $\Omega \in \mathcal{C}^{5m+2}$ para $n \ge 3$. Sea u solución del problema (3.1) para $f \in L^p_\omega(\Omega)$ con $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, m, n, \omega)$ tal que*

$$\|u\|_{W^{2m,p}_\omega(\Omega)} \le C\, \|f\|_{L^p_\omega(\Omega)}.$$

Demostración. Para α con $\alpha \le 2m-1$ se sigue del Lema 3.3 que

$$\sum_{|\alpha| \le 2m-1} \|D_x^\alpha u\|_{L^p_\omega(\Omega)} \le C \|Mf\|_{L^p_\omega(\Omega)} \le C \|f\|_{L^p_\omega(\Omega)}.$$

Para α con $|\alpha| = 2m$, se sigue de la fórmula de representación (3.3), de (3.9), Lema 3.4 y (3.12), en forma análoga que en el caso $m = 1$ (ver Lema 2.8), que existe una constante positiva $C = C(\Omega, m, n)$ tal que para α con $|\alpha| = 2m$ y casi todo $x \in \Omega$

$$|D_x^\alpha u(x)| \le C \left\{ \widetilde{K} f(x) + M f(x) + |f(x)| \right\},$$

donde $\widetilde{K} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} D_x^\alpha \Gamma(x-y)\, f(y)\, dy \right|$.

Entonces la demostración del teorema es inmediata pues tanto el operador maximal M como $\widetilde{K}$ son acotados en el espacio $L^p_\omega(\Omega)$. $\square$

Capítulo 4

Aplicación a pesos de la forma $d(x)^\beta$

En este capítulo usamos las estimaciones a priori dadas en los Teoremas 2.9 y 3.5 para probar estimaciones de la forma

$$\|u\|_{L^q_\omega(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p_\omega(\Omega)}$$

bajo ciertas condiciones para p y q cuando $\omega = d(x)^\beta$. Por esta razón necesitamos primero analizar para qué valores de β la función $d(x)^\beta$ pertenece a la clase $A_p(\mathbb{R}^n)$.

Para el caso particular en que el dominio Ω es la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, Manfredi y Villamor en [**MV01**] muestran que $d(x)^\beta \in A_p(\mathbb{R}^n)$ para $-1 < \beta < p-1$.

Basándonos en la descomposición de Whitney, probamos que en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\Omega \in \mathcal{C}^2$ se obtiene la misma condición que en el caso de la bola unitaria como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^2$ y sea $d(x)$ la función distancia al borde de Ω. Entonces, $d(x)^\beta \in A_p(\mathbb{R}^n)$ para $-1 < \beta < p-1$.*

Demostración. Por definición de la clase $A_p(\mathbb{R}^n)$, tenemos que probar que existe una constante positiva C que no depende de Q tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^\beta\, dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^{-\beta/(p-1)}\, dx\right)^{p-1} \leq C \tag{4.1}$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Consideramos los siguientes casos:

1. $Q \cap \partial\Omega = \emptyset$
2. $Q \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

1. Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ un cubo de lado ℓ tal que $\operatorname{dist}(Q, \partial\Omega) > 0$.

- Si $\operatorname{diam}(Q) \leq \operatorname{dist}(Q, \partial\Omega)$ se sigue para $x \in Q$,

$$\operatorname{dist}(Q, \partial\Omega) \leq d(x) \leq \operatorname{diam}(Q) + \operatorname{dist}(Q, \partial\Omega) \leq 2\operatorname{dist}(Q, \partial\Omega)$$

y entonces existe una constante positiva C que no depende de Q tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^\beta\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^{-\beta/(p-1)}\right)^{p-1}\leq C,$$

para cualquier valor de $\beta\in\mathbb{R}$.

Suponemos primero que $\beta\geq 0$.

• Si $\operatorname{dist}(Q,\partial\Omega)\leq \operatorname{diam}(Q)\leq\operatorname{diam}(\Omega)$, consideramos la descomposición de Whitney para Q, es decir, una familia $\{Q_j^k\}$ de cubos diádicos, cerrados, cuyo interior son dos a dos disjuntos y que satisfacen

- $Q=\cup_{k=k_0}^\infty\cup_{j=1}^{N_k}Q_j^k$
- $\operatorname{diam}(Q_j^k)\leq\operatorname{dist}(Q_j^k,\partial Q)\leq 4\operatorname{diam}(Q_j^k)$
- $\operatorname{diam}(Q_j^k)=\ell\,2^{-k}$ para $j=1,...,N_k$.

Entonces para cada $x\in Q_j^k$ se tiene

$$d(x)\geq\operatorname{dist}(Q_j^k,\partial Q)\geq\operatorname{diam}(Q_j^k).$$

En consecuencia, si $\beta\geq 0$

$$\begin{aligned}\int_Q d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx &= \sum_{k=k_0}^\infty\sum_{j=1}^{N_k}\int_{Q_j^k}d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx\\ &\leq\sum_{k=k_0}^\infty\sum_{j=1}^{N_k}\int_{Q_j^k}\operatorname{diam}(Q_j^k)^{-\beta/(p-1)}\,dx\\ &\leq\sum_{k=k_0}^\infty\sum_{j=1}^{N_k}\int_{Q_j^k}(\ell\,2^{-k})^{-\beta/(p-1)}\,dx\\ &\leq C\,\ell^{n-\beta/n(p-1)}\sum_{k=k_0}^\infty 2^{-k+k\beta/(p-1)},\end{aligned}$$

donde denotamos por N_k la cantidad de cubos en la etapa k y usamos que $N_k\leq C\,2^{(n-1)k}$ para $k\geq k_0$ pues Ω es suficientemente suave (ver [**Har06**]).

Usando ahora que para $x\in Q$,

$$d(x)\leq\operatorname{diam}(Q)+\operatorname{dist}(Q,\partial\Omega)\leq 2\operatorname{diam}(Q)$$

obtenemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^\beta\,dx\leq\frac{2^\beta}{|Q|}\int_Q\operatorname{diam}(Q)^\beta\,dx\leq C\,\ell^{\beta/n}.$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^\beta\, dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^{-\beta/(p-1)}\, dx\right)^{p-1} \le C\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k+k\beta/(p-1)}\right)^{p-1},$$

que resulta finito siempre que $-k+k\beta/(p-1)<0$, es decir, $0\le\beta<p-1$.

• Si $\operatorname{diam}(Q)\ge\operatorname{diam}(\Omega)$, como $Q\cap\partial\Omega=\emptyset$, es claro que $Q\subset\Omega^c$. Luego, sea B una bola con radio $\operatorname{diam}(\Omega)$ que contenga a Ω y tal que $\operatorname{dist}(B,\Omega)>0$.

Definimos $D_1:=Q\cap B$ y $D_2:=Q\cap B^c$ y consideramos para D_1 su descomposición de Whitney dada por $\{Q_j^k\}$ tal que $\operatorname{diam}(Q_j^k)=|D_1|^{1/n}\,2^{-k}$. Observemos que por su definición, $|D_1|\le|Q|$ y $|D_1|\le|B|$.

Para $x\in Q_j^k$, se tiene que $d(x)\ge\operatorname{dist}(x,\partial D_1)\ge\operatorname{dist}(Q_j^k,\partial D_1)\ge\operatorname{diam}(Q_j^k)$. Luego, para $\beta\ge 0$

$$\begin{aligned}
\int_{D_1} d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx &= \sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_k}\int_{Q_j^k} d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx\\
&\le \sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_k}(|D_1|^{1/n}\,2^{-k})^{-\beta/(p-1)}\,|Q_j^k|\\
&\le C\,|D_1|^{-\beta/n(p-1)}\sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_k}(2^{-k})^{-\beta/(p-1)}\,(|D_1|^{1/n}\,2^{-k})^n\\
&C\,|D_1|^{1-\beta/n(p-1)}\sum_{k=k_0}^{\infty} N_k\,2^{k\beta/(p-1)}\,2^{-kn}\\
&\le C\,|D_1|^{1-\beta/n(p-1)}\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{k(-1+\beta/(p-1))}. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Pero también sucede que si $x\in D_1$, $d(x,\partial B)\le|D_1|$. Entonces,

$$|D_1|\,|D_1|^{-\beta/n(p-1)}\le\int_{D_1} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx$$

y se sigue por (4.2) que

$$\int_{D_1} d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx\le C\left(\int_{D_1} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx\right)\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{k(-1+\beta/(p-1))}.$$

Pero, si $\beta<p-1$ la suma es finita y

$$\int_{D_1} d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx\le C\int_{D_1} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx. \qquad (4.3)$$

Por otra parte, si $x \in D_2$, $d(x) \geq d(x, \partial B)$ y junto con (4.3) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx &= \frac{1}{|Q|}\left(\int_{D_1} d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx + \int_{D_2} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx\right)\\ &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx.\end{aligned}$$

Para analizar la integral restante en (4.1) observemos que

$$d(x) \leq d(x,\partial B) + \operatorname{dist}(B,\Omega) \leq d(x,\partial B) + \operatorname{diam}(\Omega),$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_Q d(x)^\beta\,dx &\leq C\left(\int_{\{x\in Q: d(x,\partial B)\leq diam(\Omega)\}} \operatorname{diam}(\Omega)^\beta\,dx + \int_{\{x\in Q: d(x,\partial B)\geq \operatorname{diam}(\Omega)\}} d(x,\partial B)^\beta\,dx\right)\\ &\leq C\left(\int_Q \operatorname{diam}(\Omega)^\beta\,dx + \int_Q d(x,\partial B)^\beta\,dx\right).\end{aligned}$$

Finalmente, si $0 \leq \beta < p-1$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^\beta\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} &\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx\right)^{p-1}\\ &+\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x,\partial B)^\beta\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} = I + II.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Como $\operatorname{diam}(Q) \geq \operatorname{diam}(\Omega)$ y $0 \leq \beta < p-1$, existe una constante positiva C que no depende de Q tal que $I \leq C$ y como $d(x,\partial B) \in A_p(\mathbb{R}^n)$ para $\beta < p-1$ [**MV01**], entonces II también está acotada independientemente de Q y vale (4.1).

2. En el caso $Q \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, definimos $D_1 := Q \cap \Omega$, $D_2 := Q \cap (B \setminus \Omega)$ y $D_3 := Q \cap B^c$.

- Si $\operatorname{diam}(Q) \leq \operatorname{diam}(\Omega)$, consideramos la descomposición de Whitney para D_1 y $D_2 \cup D_3$ obteniendo en ambos casos estimaciones similares al caso $\operatorname{diam}(Q) \leq \operatorname{diam}(\Omega)$ en 1.

- Si $\operatorname{diam}(Q) \geq \operatorname{diam}(\Omega)$, consideramos la descomposición de Whitney para D_1 y D_2. Entonces de forma análoga a (4.2) y (4.3) se sigue que si $\beta < p-1$

$$\int_{D_1} d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx \leq C\,|D_1| \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{k(-1+\beta/(p-1))} \leq C\int_{D_1} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx$$

y

$$\int_{D_2} d(x)^{-\beta/(p-1)}\,dx \leq C\,|D_2| \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{k(-1+\beta/(p-1))} \leq C\int_{D_2} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\,dx.$$

En D_3, $d(x) \geq d(x, \partial B)$, entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_{D_3} d(x)^{-\beta/(p-1)}\, dx \leq C\, \frac{1}{|Q|}\int_{D_3} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\, dx.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x)^{-\beta/(p-1)}\, dx \leq C\, \frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\, dx.$$

Para analizar la integral restante en (4.1), observemos que

- para $x \in D_1$, $d(x) \leq \operatorname{diam}(D_1) \leq \operatorname{diam}(\Omega)$,
- para $x \in D_2$, $d(x) \leq \operatorname{diam}(B) \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$,
- para $x \in D_3$, $d(x) \leq d(x, \partial B) + \operatorname{diam}(\Omega)$.

Entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x)^{\beta}\, dx \leq C + \frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x,\partial B)^{\beta}\, dx.$$

Finalmente

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x)^{\beta}\ dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x)^{-\beta/(p-1)}\ dx\right)^{p-1} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\ dx\right)^{p-1}$$
$$+\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x,\partial B)^{\beta}\, dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q} d(x,\partial B)^{-\beta/(p-1)}\ dx\right)^{p-1}$$

y al igual que analizamos (4.4) vemos que se cumple (4.1) si $0 \leq \beta < p - 1$.

El resultado para el caso $-1 < \beta < 0$ se obtiene de manera análoga al caso $\beta \geq 0$. □

4.1. Teoremas de inmersión en espacios con pesos

En esta sección probamos teoremas de inmersión para espacios con pesos potencias de la distancia al borde.

La técnica que usamos consiste en extender los Teoremas de inmersión clásicos que enunciaremos a continuación (ver por ejemplo [**Nec67**]) con un argumento simple e ingenioso introducido por Buckley y Koskela en [**BK98**].

Teorema 4.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+k}$ un dominio acotado Lipschitz y $u \in W^{2m,p}(\Omega)$. Entonces*

1. *Para $1 \leq p < \dfrac{n+k}{2m}$ y $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{2m}{n+k}$ existe una constante positiva C que no depende de u tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\, \|u\|_{W^{2m,p}(\Omega)}.$$

2. *Para* $p = \dfrac{n+k}{2m}$ *y* $1 \leq q < \infty$ *o para* $p > \dfrac{n+k}{2m}$ *y* $1 \leq q \leq \infty$ *existe una constante positiva* C *que no depende de* u *tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{2m,p}(\Omega)}.$$

Enunciemos y demostremos entonces el correspondiente Teorema de inmersión en espacios de Sobolev con pesos.

Teorema 4.3. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio acotado Lipschitz. Supongamos* $u \in W^{2m,p}_{d^\gamma}(\Omega)$ *con* $\gamma = k\beta$, *donde* $k \in \mathbb{N}$ *y* $0 \leq \beta \leq 1$. *Entonces*

1. *Para* $1 \leq p < \dfrac{n+k}{2m}$ *y* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{2m}{n+k}$ *existe una constante positiva* C *que no depende de* u *tal que*

$$\|u\|_{L^q_{d^\gamma}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{2m,p}_{d^\gamma}(\Omega)}.$$

2. *Para* $p = \dfrac{n+k}{2m}$ *y* $1 \leq q < \infty$ *o para* $p > \dfrac{n+k}{2m}$ *y* $1 \leq q \leq \infty$, *existe una constante positiva* C *que no depende de* u *tal que*

$$\|u\|_{L^q_{d^\gamma}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{2m,p}_{d^\gamma}(\Omega)}.$$

Demostración. 1. Introducimos el siguiente dominio

$$\Omega_{k,\beta} := \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^k \text{ tal que } |y| < d(x)^\beta\}.$$

Se tiene que como Ω es un dominio Lipschitz, entonces $\Omega_{k,\beta}$ también es un dominio Lipschitz (ver [**ADL06**]).

Luego, para $v \in L^p_{d^\gamma}(\Omega)$ definimos $V : \Omega_{k,\beta} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x,y) := v(x)$ e integrando en la variable y se tiene

$$\int_{\Omega_{k,\beta}} |V(x,y)|^p\,dx\,dy = \int_\Omega \int_{\{|y|<d(x)^\beta\}} |v(x)|^p\,dy\,dx = \omega_k \int_\Omega |v(x)|^p\, d(x)^{k\beta}\,dx, \tag{4.5}$$

donde ω_k denota la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^k$.

Sea ahora $u \in W^{2m,p}_{d^{k\beta}}(\Omega)$, entonces si $U(x,y) := u(x)$ se tiene de (4.5) que $U(x,y) \in W^{2m,p}(\Omega_{k,\beta})$, y como $\Omega_{k,\beta}$ es Lipschitz, por el Teorema 4.2 tenemos que

$$\|U\|_{L^q(\Omega_{k,\beta})} \leq C\,\|U\|_{W^{2m,p}(\Omega_{k,\beta})},$$

si $1 \leq p < \frac{n+k}{2m}$ y $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{2m}{n+k}$.

Entonces, nuevamente por (4.5) concluimos que

$$\|u\|_{L^q_{d^\gamma}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{2m,p}_{d^\gamma}(\Omega)}.$$

2. La demostración es análoga al caso 1. □

Observación 4.4. Se sigue de la demostración que el Teorema 4.3 es válido para un peso ω siempre que el conjunto dado por

$$\Omega_{k,\omega} := \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^k \text{ tal que } |y| < \omega(x)^{1/k}\}$$

sea un dominio Lipschitz.

4.2. Resultado principal

El resultado principal de este capítulo es una consecuencia de los distintos resultados vistos hasta ahora.

Si consideramos como peso $\omega = d^\gamma$ con $-1 < \gamma < p-1$, probamos en el Teorema 4.1 que $d^\gamma \in A_p(\mathbb{R}^n)$ y se desprende del Teorema 2.9 y Teorema 3.5, que

$$\|u\|_{W^{2m,p}_{d^\gamma}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^p_{d^\gamma}(\Omega)}.$$

Luego, por el Teorema 4.3 tenemos la siguiente estimación a priori para u.

Teorema 4.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^2$ para $m = 1$ y $n \geq 3$, $\Omega \in \mathcal{C}^{6m+4}$ para $n = 2$, $m \geq 1$ y $\Omega \in \mathcal{C}^{5m+2}$ para $n \geq 3$, $m \geq 2$.*

Sea u solución del problema (3.1) para $f \in L^p_{d^\gamma}(\Omega)$ con $\gamma = k\beta$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \gamma < p-1$ y $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{2m}{n+k}$ (con $q < \infty$ cuando $2mp = n+k$), entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, m, n, \gamma, p, q)$ tal que

$$\|u\|_{L^q_{d^\gamma}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^p_{d^\gamma}(\Omega)}. \tag{4.6}$$

Corolario 4.6. *Sea $p > m+1$ y $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{2m}{n+m}$(con $q < \infty$ cuando $2mp = n+m$), entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, m, n, p, q)$ tal que*

$$\|u\|_{L^q_{d^m}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^p_{d^m}(\Omega)}. \tag{4.7}$$

La estimación (4.7) fue probada en [**DS04a**] usando diferentes argumentos, donde las condiciones sobre p y q son $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{2m}{n+m}$.

En el caso particular $m = 1$, el mismo resultado fue probado en [**Sou04**], donde el autor muestra además que la estimación no es válida si $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > \frac{2}{n+1}$ (veremos con mayor detalle estos resultados en el Capítulo 5).

En el caso límite $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2m}{n+m}$ no se sabe que sucede en general. Sin embargo, para el caso particular $p > m+1$, el Corolario 4.6 nos da la validez de la estimación $\|u\|_{L^q_{d^m}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p_{d^m}(\Omega)}$, por lo que decimos que este resultado extiende en ese sentido a los anteriores.

Capítulo 5

Problemas Elípticos no lineales

Consideramos el problema no lineal

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
(-\Delta)^m u = a(x)\, v^p & \text{en } \Omega \\
(-\Delta)^m v = b(x)\, u^q & \text{en } \Omega \\
\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j u = \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \quad 0 \le j \le m-1,
\end{array}
\right.
\tag{5.1}
$$

donde, para $n \geq 2$ y $m \geq 1$, $\Omega = B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ o pequeñas deformaciones de B para $m = n = 2$ (ver [**DS04b**] para detalles de estas perturbaciones), $\frac{\partial}{\partial\nu}$ es la derivada en la dirección normal , p, $q > 0$, $pq > 1$, y a, b son funciones no negativas y acotadas.

En este capítulo queremos ver para qué valores de p y q las soluciones no negativas de (5.1) están en $L^\infty(\Omega)$, donde

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty\},$$

con la norma acotada por una constante independiente de la solución.

En un dominio $\mathcal{C}^2$, si $m = 1$, Souplet en [**Sou04**] probó que existe una constante positiva $C = (\Omega, p, q, a, b)$ tal que

$$\|u\|_\infty,\ \|v\|_\infty \leq C,$$

si $\max\{\alpha, \beta\} > n - 1$, donde

$$\alpha = \frac{2(p+1)}{pq-1} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2(q+1)}{pq-1}.$$

Mas aún, obtiene que el resultado es óptimo en el sentido que, si $\max\{\alpha, \beta\} < n-1$, entonces existen funciones a y b tales que (5.1) tiene una solución positiva (u, v) que no es acotada.

Luego, en este capítulo obtenemos resultados análogos para soluciones no negativas de (5.1) para el caso general $m \geq 2$.

Una herramienta importante en [**Sou04**] son ciertas estimaciones a piori con pesos para el problema lineal asociado dado por

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
-\Delta u = f & \text{en } \Omega \\
u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega.
\end{array}
\right.
$$

Para generalizar tales estimaciones a priori para el caso $m \geq 2$ fueron necesarias modificaciones no triviales. En primer lugar, ya que usaremos la positividad de la función de Green, debemos restringirnos a un dominio Ω como mencionamos al comienzo. Esto se debe a que, para $m \geq 2$, la función de Green no es necesariamente positiva en regiones más generales.

5.1. Estimaciones a priori con pesos para el problema lineal

En nuestro argumento, usamos resultados dados en [**DS04a**] para el problema lineal

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f & \text{en } \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases} \tag{5.2}$$

que enunciamos en el siguiente lema.

Observemos que estos resultados, y , por consecuencia, los que enunciaremos a continuación, son válidos en dominios más generales que los considerados en este capítulo. En efecto, las hipótesis usadas en [**DS04a**] son Ω un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^{6m+4}$ para $n = 2$ y $\Omega \in \mathcal{C}^{5m+2}$ para $n \geq 3$.

Lema 5.1. *Sea $u \in \mathcal{C}^{2m}(\overline{\Omega})$ solución del problema (5.2) para $f \in C(\overline{\Omega})$ y sea $d(x) = d(x, \partial\Omega)$. Entonces*

- *Si $2m > n$, existe una constante positiva C tal que para todo $\theta \in [0, 1]$*

$$\|u\, d^{-m+\theta n}\|_\infty \leq C\, \|f\, d^{m-(1-\theta)n}\|_{L^1(\Omega)}.$$

- *Para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \min\{\frac{2m}{n}, 1\}$, se tiene que si $\alpha \in (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \min\{\frac{2m}{n}, 1\}]$, existe una constante positiva C tal que para todo $\theta \in [0, 1]$*

$$\|u\, d^{-m+\theta n\alpha}\|_{L^q(\Omega)} \leq C\, \|f\, d^{m-(1-\theta)n\alpha}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración. Ver Proposición 4.2 en [**DS04a**]. □

Luego, podemos probar las siguientes estimaciones.

Proposición 5.2. *Sea $1 \leq p \leq q \leq \infty$ y sea u solución del problema (5.2) para $f \in L^p_{d^m}(\Omega)$. Entonces*

1. *Para $n \leq m$, se tiene $u \in L^\infty(\Omega)$ y*

$$\|u\|_\infty \leq C\, \|f\|_{L^1_{d^m}(\Omega)}.$$

2. *Para* $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\frac{2m}{n+m}$*, se tiene* $u\in L^p_{d^m}(\Omega)$ *y*

$$\|u\|_{L^q_{d^m}(\Omega)}\le C\,\|f\|_{L^p_{d^m}(\Omega)}.$$

Demostración. Se sigue del Lema 5.1 que para $2m>n$ y $\theta\in[0,1]$,

$$\|u\,d^{-m+\theta n}\|_\infty\le C\,\|f\,d^{m-(1-\theta)n}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Luego, tomando $\theta=1$ y usando que $-m+n<0$ y $d(x)\le\mathrm{diam}(\Omega)$ se obtiene

$$\|u\|_\infty\le C\,\|u\,d^{-m+n}\|_\infty\le C\,\|f\,d^m\|_{L^1(\Omega)}$$

y el punto 1. queda probado.

Por otro lado, sea $1\le p\le q\le\infty$. Usando nuevamente el Lema 5.1 se tiene que si existen α y θ tales que $\alpha\in(\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\mathrm{mín}\{1,\frac{2m}{n}\}]$, $\theta\in[0,1]$ y son solución del sistema

$$\begin{cases}-m+\theta\,n\,\alpha=\frac{m}{q}\\ m-(1-\theta)\,n\,\alpha=\frac{m}{p}\end{cases}$$

se tiene

$$\|u\|_{L^q_{d^m}(\Omega)}\le C\,\|f\|_{L^p_{d^m}(\Omega)},$$

para $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\mathrm{mín}\{1,\frac{2m}{n}\}$ y quedaría probado el punto 2.

Como los valores de α y θ que resuelven el sistema son

$$\alpha=\left(2+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\frac{m}{n}\quad\text{y}\quad\theta=\left(\frac{1}{q}+1\right)\left(2-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{-1},$$

basta ver que satisfacen el resto de las condiciones.

Se sigue que $\theta\in[0,1]$ por ser $1\le p$.

Por otro lado, por la definición de α es fácil ver que la condición $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\alpha$ es equivalente a $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\frac{2m}{n+m}$ que es cierto por hipótesis.

Luego, veamos que $\alpha\le\mathrm{mín}\{1,\frac{2m}{n}\}$.

Como $\alpha\le\frac{2m}{n}$ por ser $p\le q$, sólo queda considerar el caso $\frac{2m}{n}>1$, es decir, cuando el $\mathrm{mín}\{1,\frac{2m}{n}\}=1$.

Pero $\alpha\le1$ es equivalente a $\frac{2m-n}{m}\le\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ y tenemos entonces el punto 2. siempre que $\frac{2m-n}{m}\le\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\frac{2m}{n+m}$.

Supongamos ahora que $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\le\frac{2m-n}{m}$. En este caso usamos nuevamente la primer parte del Lema 5.1 y vemos que, como $2m>n$, se tiene para $\tilde\theta\in[0,1]$,

$$\|u\,d^{-m+\tilde\theta n}\|_\infty\le C\,\|f\,d^{m-(1-\tilde\theta)n}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Por otra parte, si $\tilde{\theta} \leq \frac{m}{nq} + \frac{m}{n}$,

$$\|u\|_{L^q_{d^m}(\Omega)} \leq \|u\, d^{-m+\tilde{\theta}n}\|_\infty$$

y si $1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{np} \leq \tilde{\theta}$,

$$\|f\, d^{m-(1-\tilde{\theta})n}\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p_{d^m}(\Omega)}.$$

Entonces, si podemos encontrar $\tilde{\theta}$ tal que $1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{np} \leq \tilde{\theta} \leq \frac{m}{nq} + \frac{m}{n}$ se tiene

$$\|u\|_{L^q_{d^m}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^p_{d^m}(\Omega)}.$$

Pero $\tilde{\theta}$ existe siempre que $1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{np} \leq \frac{m}{nq} + \frac{m}{n}$ que resulta equivalente a $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{2m-n}{m}$ y la proposición queda probada. □

Observación 5.3. Notar que la condición 2. de la Proposición 5.2 es óptima en el sentido que si $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > \frac{2m}{n+m}$ entonces no vale la estimación en general. La demostración la veremos al final del capítulo ya que usaremos las mismas técnicas usadas en la demostración del Teorema 5.6.

En la demostración del siguiente resultado denotaremos por $\phi_{1,m} > 0$ la primer autofunción del operador $(-\Delta)^m$ en $H_0^m(\Omega)$ normalizada por $\int_\Omega \phi_{1,m}(x)\,dx = 1$ y $\lambda_{1,m}$ el primer autovalor y usaremos que existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que $c_1\, d(x)^m \leq \phi_{1,m}(x) \leq c_2\, d(x)^m$ en Ω (ver [**CS01**]).

Proposición 5.4. *Sea $1 \leq k < \frac{n+m}{n-m}$ y sea u solución del problema (5.2) para $f \in L^1_{d^m}(\Omega)$ y $f \geq 0$. Entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\|u\|_{L^k_{d^m}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{L^1_{d^m}(\Omega)}.$$

Demostración. Tomando $p = 1$ en la Proposición 5.2 se tiene para $1 \leq k < \frac{n+m}{n-m}$

$$\|u\|_{L^k_{d^m}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^1_{d^m}(\Omega)}.$$

Luego, integrando por partes y por ser $f \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1_{d^m}} &= \int_\Omega (-\Delta)^m u(x)\, d(x)^m\, dx \leq C \int_\Omega (-\Delta)^m u(x)\, \phi_{1,m}(x)\, dx \\
&\leq C \int_\Omega u(x)\, (-\Delta)^m \phi_{1,m}(x)\, dx = C\lambda_{1,m} \int_\Omega u(x)\, \phi_{1,m}(x)\, dx \\
&\leq C \int_\Omega u(x)\, d(x)^m\, dx \leq C\|u\|_{L^1_{d^m}}.
\end{aligned}$$

□

5.2. Resultado principal

Consideremos el problema (5.1) y definamos los exponentes

$$\alpha = \frac{2m(p+1)}{pq-1} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2m(q+1)}{pq-1}.$$

Teorema 5.5. *Sea (u, v) solución del problema (5.1), y supongamos*

$$\max(\alpha, \beta) > n - m. \tag{5.3}$$

Entonces existe una constante positiva $C = C(\Omega, p, q, a, b)$ tal que

$$\|u\|_\infty,\ \|v\|_\infty \leq C.$$

Por otro lado, también obtenemos que la condición (5.3) es óptima en el sentido que nos da el siguiente teorema.

Teorema 5.6. *Supongamos*

$$\max(\alpha, \beta) < n - m.$$

Entonces existen funciones acotadas y positivas a y b, tales que (5.1) tiene una solución positiva (u, v) con $u \notin L^\infty(\Omega)$ y $v \notin L^\infty(\Omega)$.

Usando los resultados de la sección anterior, la demostración de ambos teoremas sigue los pasos del caso $m = 1$ dado en [**Sou04**]. El Teorema 5.6 será demostrado en la siguiente sección.

En la demostración del Teorema 5.5, es crucial la siguiente estimación

$$\int_\Omega u(x)\,\phi_{1,m}(x)\,dx,\ \int_\Omega v(x)\,\phi_{1,m}(x)\,dx \leq C. \tag{5.4}$$

Una extensión directa de los argumentos dados en [**Sou05**], para demostrar estas estimaciones no es posible. De hecho, la prueba se basa en un lema de Brezis y Cabré en[**BC98**] (ver Lema 3.2) que utiliza el principio del máximo en un subconjunto de Ω y un principio análogo no es válido en el caso de $m \geq 2$. Daremos una prueba diferente utilizando las siguientes estimaciones puntuales para la función de Green en un dominio Ω definido como en (5.1). Estas pueden encontrarse en [**DS04b**] para el caso particular $m = n = 2$ y en [**GS97**] para los casos restantes.

Para $2m < n$

$$G_m(x, y) \geq C\,|x-y|^{2m-n} \min\left\{1,\ \frac{d(x)^m\, d(y)^m}{|x-y|^{2m}}\right\}. \tag{5.5}$$

Para $2m = n$

$$G_m(x,y) \geq C \log\left(1 + \frac{d(x)^m\, d(y)^m}{|x-y|^{2m}}\right) \geq C \log\left(2 + \frac{d(y)}{|x-y|}\right) \text{mín}\left\{1, \frac{d(x)^m\, d(y)^m}{|x-y|^{2m}}\right\}. \tag{5.6}$$

Para $2m > n$

$$G_m(x,y) \geq C\, d(x)^{m-n/2}\, d(y)^{m-n/2}\, \text{mín}\left\{1, \frac{d(x)^{n/2}\, d(y)^{n/2}}{|x-y|^n}\right\}. \tag{5.7}$$

Lema 5.7. *Sea u solución para el problema lineal (5.2) con $f \geq 0$. Entonces existe una constante positiva C tal que para todo $x \in \Omega$*

$$\frac{u(x)}{d^m(x)} \geq C \int_\Omega f(y)\, d(y)^m\, dy.$$

Demostración. Usando la fórmula de representación para u se tiene

$$u(x) = \int_\Omega G_m(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Luego, basta probar que

$$G_m(x,y) \geq C\, d(x)^m\, d(y)^m.$$

Para ello, usamos las estimaciones puntuales para la función de Green dadas anteriormente para $(x,y) \in \Omega \times \Omega$.

Consideremos, por ejemplo, el caso $2m < n$ y supongamos que $\frac{d(x)^m\, d(y)^m}{|x-y|^{2m}} \geq 1$. Entonces, se sigue de (5.5), que

$$G_m(x,y) \geq C\,|x-y|^{2m-n} \geq d(x)^{m-n/2} d(y)^{m-n/2} \geq C d(x)^m d(y)^m,$$

donde usamos que Ω es acotado y que para $x, y \in \Omega$ se tiene $d(x), d(y), |x-y| \leq \text{diam}(\Omega)$.

Por otro lado, si el mínimo en (5.5) se alcanza en $\frac{d(x)^m\, d(y)^m}{|x-y|^{2m}}$ se tiene

$$G_m(x,y) \geq C\,|x-y|^{-n} d(x)^m d(y)^m \geq C d(x)^m d(y)^m.$$

La demostración para los casos $2m = n$ y $2m > n$ son análogas, usando (5.6) y (5.7) respectivamente. □

Una vez probado este lema, la demostración de (5.4) es la misma que dada por Souplet en [**Sou05**], pero la escribiremos para una mejor comprensión.

demostración de (5.4) . Sea (u,v) solución no negativa del problema (5.1). Como $d^m \simeq \phi_{1,m}$, se sigue del Lema 5.7 con $f = a(y)v(y)^p$ que

$$u(x) \geq C \left(\int_\Omega a(y) v(y)^p \phi_{1,m}(y)\, dy\right) \phi_{1,m}(x),$$

y si $f = b(z)u(z)^q$,

$$v(y) \geq C \left(\int_\Omega b(z)u(z)^q \phi_{1,m}(z)\, dz \right) \phi_{1,m}(y).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(y)v(y)^p \phi_{1,m}(y)\, dy &\geq C \int_\Omega a(y) \left(\int_\Omega b(z)u(z)^q \phi_{1,m}(z)\, dz \right)^p \phi_{1,m}(y)^p \phi_{1,m}(y)\, dy \\
&= C \left(\int_\Omega a(y)\phi_{1,m}(y)^{p+1}\, dy \right) \left(\int_\Omega b(z)u(z)^q \phi_{1,m}(z)\, dz \right)^p \\
&\geq C \left(\int_\Omega a(y)\phi_{1,m}(y)^{p+1}\, dy \right) \left(\int_\Omega b(z) \left(\int_\Omega a(y)v(y)^p \phi_{1,m}(y)\, dy \right)^q \phi_{1,m}(z)^{q+1}\, dz \right)^p \\
&= C \left(\int_\Omega a(y)\phi_{1,m}(y)^{p+1}\, dy \right) \left(\int_\Omega b(z)\phi_{1,m}(z)^{q+1}\, dz \right)^p \left(\int_\Omega a(y)v(y)^p \phi_{1,m}(y)\, dy \right)^{qp}.
\end{aligned}$$

De forma análoga vemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega b(y)u(y)^q \phi_{1,m}(y)\, dy \geq C & \left(\int_\Omega b(y)\phi_{1,m}(y)^{q+1}\, dy \right) \\
& \left(\int_\Omega a(z)\phi_{1,m}(z)^{p+1}\, dz \right)^q \left(\int_\Omega b(y)u(y)^q \phi_{1,m}(y)\, dy \right)^{qp}.
\end{aligned}$$

Luego, como $pq > 1$, si probamos que existe una constante positiva C tal que

$$\int_\Omega a(y)\phi_{1,m}(y)^{p+1}\, dy \geq C \quad \text{y} \quad \int_\Omega b(y)\phi_{1,m}(y)^{q+1}\, dy \geq C$$

se tiene

$$\int_\Omega a(y)v(y)^p \phi_{1,m}(y)\, dy \leq C \quad \text{y} \quad \int_\Omega b(y)u(y)^q \phi_{1,m}(y)\, dy \leq C. \tag{5.8}$$

Entonces, si tomamos a $\phi_{1,m}$ como función de prueba en el problema (5.1) vemos que

$$\int_\Omega a(y)v(y)^p \phi_{1,m}(y)\, dy = \int_\Omega (-\Delta)^m u(y)\phi_{1,m}(y)\, dy = \lambda_{1,m} \int_\Omega \phi_{1,m}(y)u(y)\, dy$$

y

$$\int_\Omega b(y)u(y)^q \phi_{1,m}(y)\, dy = \int_\Omega (-\Delta)^m v(y)\phi_{1,m}(y)\, dy = \lambda_{1,m} \int_\Omega \phi_{1,m}(y)v(y)\, dy.$$

Por lo tanto, de (5.8) se sigue (5.4).

Veamos ahora que $\int_\Omega a(y)\phi_{1,m}(y)^{p+1}\, dy \geq C$ y $\int_\Omega b(y)\phi_{1,m}(y)^{q+1}\, dy \geq C$:

Sea $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(y)\phi_{1,m}(y)^{p+1}\, dy &\geq \int_{\{\phi_{1,m} \geq \varepsilon\}} a(y)\phi_{1,m}(y)^{p+1}\, dy \geq \varepsilon^{p+1} \int_{\{\phi_{1,m} \geq \varepsilon\}} a(y)\, dy \\
&= \varepsilon^{p+1} \left(\int_\Omega a(y)\, dy - \int_{\{\phi_{1,m} < \varepsilon\}} a(y)\, dy \right)
\end{aligned}$$

$$\geq \varepsilon^{p+1}\left(\int_\Omega a(y)\,dy - \|a\|_\infty |\{\phi_{1,m} < \varepsilon\}|\right).$$

Luego $\int_\Omega a(y)\phi_{1,m}(y)^{p+1}\,dy \geq C > 0$ y de la misma manera $\int_\Omega b(y)\phi_{1,m}(y)^{q+1}\,dy \geq C > 0$. □

Demostracion del Teorema 5.5 . Recordemos que $\phi_{1,m} > 0$ es la primer autofunción de $(-\Delta)^m$ en $H_0^m(\Omega)$ normalizada por $\int_\Omega \phi_{1,m} = 1$ y existen constantes positivas $c_1, c_2 > 0$ tales que $c_1\, d^m \leq \phi_{1,m} \leq c_2\, d^m$.

Por (5.4) se tiene

$$\|u\|_{L^1_{dm}} + \|v\|_{L^1_{dm}} \leq C.$$

Entonces si $n \leq m$, por 1. de la Proposición 5.2,

$$\|u\|_\infty, \|v\|_\infty \leq C$$

y el teorema queda demostrado.

Análogamente que en el caso $m = 1$ en [**Sou04**], mediante un proceso iterativo iremos incrementando el valor de k hasta obtener $k = \infty$.

Por la Proposición 5.4 se tiene para $1 \leq k < \frac{n+m}{n-m}$

$$\|u\|_{L^k_{dm}} + \|v\|_{L^k_{dm}} \leq C(k). \tag{5.9}$$

Paso 1: Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $q \geq p$ y $\beta > n - m$. Luego se tiene $p < \frac{n+m}{n-m}$. En efecto $\beta = \frac{2m(q+1)}{pq-1} > n - m$. Entonces $(p-1)(q+1) \leq pq - 1 < \frac{2m(q+1)}{n-m}$ lo que implica que $(p-1) < \frac{2m}{n-m}$, es decir, $p < \frac{n+m}{n-m}$.

Luego, para algún valor de k tal que

$$k \geq p \quad \text{y} \quad k \geq \frac{n+m}{n-m} - \varepsilon, \tag{5.10}$$

con ε suficientemente pequeño a determinar más adelante, también vale (5.9).

Paso 2: Sea $k_1 \in (k, \infty]$ tal que

$$\frac{1}{k_1} > \frac{p}{k} - \frac{2m}{n+m}, \tag{5.11}$$

entonces por la Proposición 5.2 se tiene

$$\|u\|_{L^{k_1}_{dm}} \leq C\,\|(-\Delta)^m u\|_{L^{k/p}_{dm}} \leq C\,\|v^p\|_{L^{k/p}_{dm}} = C\,\|v\|^p_{L^k_{dm}}, \tag{5.12}$$

que resulta finito pues $1 \leq k < \frac{n+m}{n-m}$.

Observación 5.8. Notar que si $k > \frac{(n+m)pq}{2m(q+1)}$, tomando $\varepsilon > 0$ en (5.10), podemos encontrar $k_1 > \frac{(n+m)q}{2m}$ tal que vale (5.12).

En efecto, si $k > \frac{(n+m)pq}{2m(q+1)}$ entonces $\frac{p}{k} - \frac{2m}{n+m} < \frac{2m}{(n+m)q}$. Luego, puedo elegir $k_1 > k$ cumpliendo (5.11), es decir,

$$\frac{(n+m)pq}{2m(q+1)} < k < k_1 < \left(\frac{p}{k} - \frac{2m}{n+m}\right)^{-1}$$

y además $k_1 > \frac{(n+m)pq}{2m(q+1)}$, siempre que $\frac{(n+m)pq}{2m(q+1)} < \frac{(n+m)q}{2m}$ que es cierto pues $p \leq q$.

Paso 3: Asumamos

$$k_1 > q \tag{5.13}$$

y sea $k_2 \in (k_1, \infty]$ tal que

$$\frac{1}{k_2} > \frac{q}{k_1} - \frac{2m}{n+m}. \tag{5.14}$$

Entonces por la Proposición 5.2

$$\|v\|_{L^{k_2}_{dm}} \leq C \|(-\Delta)^m v\|_{L^{k_1/q}_{dm}} \leq C \|u^q\|_{L^{k_1/q}_{dm}} = C \|u\|^q_{L^{k_1}_{dm}},$$

que resulta finito por el paso 2.

Paso 4: Podemos ver que las condiciones (5.11), (5.13), (5.14) y además que $\text{mín}\{k_1, k_2\} > \frac{k}{\rho}$ para $\rho \in (0, 1)$ a determinar son equivalentes a

$$A := \frac{p}{k} - \frac{2m}{n+m} < \frac{1}{k_1} < \text{mín}\{\frac{\rho}{k}, \frac{1}{q}\} \tag{5.15}$$

y

$$\frac{q}{k_1} - \frac{2m}{n+m} < \frac{1}{k_2} < \frac{\rho}{k}. \tag{5.16}$$

De aquí en adelante buscaremos condiciones que impliquen o sean equivalentes a (5.15) y (5.16) y así poder determinar ρ y ε.

Si suponemos

$$k \leq \frac{(n+m)pq}{2m(q+1)}, \tag{5.17}$$

se tiene $A > 0$. En efecto $\frac{p}{k} \geq \frac{2m(q+1)}{(n+m)q} > \frac{2m}{n+m}$.

Luego (5.15) puede resolverse en $k_1 \in [1, +\infty)$ y $\frac{1}{k_1}$ puede tomarse arbitrariamente cercano a A siempre que

$$\frac{p-\rho}{k} < \frac{2m}{n+m} \tag{5.18}$$

y

$$\frac{p}{k} - \frac{2m}{n+m} < \frac{1}{q}. \tag{5.19}$$

Pero (5.18) vale siempre que

$$\frac{n-m}{n+m} p < \rho < 1, \tag{5.20}$$

y (5.20) es cierto porque $p < \frac{n+m}{n-m}$.

Por otro lado, como $\beta = \frac{2m\,(q+1)}{pq-1} > n-m$, tenemos que $\frac{1}{q} > \frac{p\,(n-m)}{n+m} - \frac{2m}{n+m}$. Luego, como $k < \frac{n-m}{n+m}$ puedo tomar ε suficientemente pequeño y obtener (5.19).

Veamos ahora la condición (5.16). Esta condición puede ser resuelta con $k_2 \in [1, \infty)$ siempre que

$$\frac{q}{k_1} - \frac{2m}{n+m} < \frac{\rho}{k}. \tag{5.21}$$

Tomando $\frac{1}{k_1}$ en (5.15) lo suficientmente cercano a su cota inferior A, se tiene que (5.21) es equivalente a

$$\rho > 1 - \eta \tag{5.22}$$

donde $\eta := \frac{2m}{n+m}\,(q+1)\,k - (pq-1)$.

En efecto, si $\frac{1}{k_1}$ esta cerca de $A = \frac{p}{k} - \frac{2m}{n+m}$, entonces $\frac{q}{k_1} - \frac{2m}{n+m}$ esta cerca de $\frac{qp}{k} - \frac{2mq}{n+m} - \frac{2m}{n+m}$ luego basta pedir que $\frac{qp}{k} - \frac{2mq}{n+m} - \frac{2m}{n+m} < \frac{\rho}{k}$, es decir, $1 - \eta < \rho$.

Por otro lado, $\rho < 1$ es equivalente a

$$k > \frac{n+m}{\beta}, \tag{5.23}$$

pero como $\beta > n-m$ es posible tomar ε pequeño en (5.10) talque vale (5.23).

Finalmente elegimos $\rho \in (0,1)$ suficientemente cercano a 1 tal que cumpla las condiciones (5.20) y (5.22).

Paso 5: Se sigue del paso 4 que si (5.9) vale para algún valor de k cumpliendo (5.10) y (5.17), entonces (5.9) sigue valiendo para k/ρ (esto es por (5.15) y (5.16)).

Luego, comenzando por (5.9) e iterando el proceso, vemos que podemos alcanzar un valor de $\bar{k} > \frac{(n+m)pq}{2m(q+1)}$ después de un número finito de pasos.

Entonces se sigue por la Observación 5.8 que podemos encontrar $\bar{k}_1 > \frac{(n+m)q}{2m} \geq \frac{(n+m)p}{2m}$ tal que $\|u\|_{L^{\bar{k}_1}_{d^m}} \leq C$.

Tomando ahora $k_1 := \bar{k}_1$, podemos tomar $k_2 := \infty$ en el paso 3 para concluir que $\|v\|_\infty \leq C$. Análogamente, por el paso 2, con $k := \bar{k}_1$ y $k_1 := \infty$ se sigue que $\|u\|_\infty \leq C$. □

5.3. Existencia de soluciones singulares

Para probar el Teorema 5.6, que afirma la optimalidad de la condición sobre α y β, la idea consiste en construir una función $f \in L^1_{d^m}(\Omega)$ tal que la correspondiente solución del problema lineal (5.2) sea no acotada.

Recordemos que consideramos Ω la bola unitaria para $n \geq 3$, y pequeñas deformaciones de la bola para $n = 2$. En ambos casos, dado $x_0 \in \partial\Omega$, existe $r > 0$ y un cono de revolución Σ_1 con vértice en x_0 tal que $\Sigma := \Sigma_1 \cap B(x_0, r) \subset \Omega$.

Luego, para $0 < \alpha < n - m$ definimos

$$f(x) := |x - x_0|^{-(\alpha+2m)} \chi_\Sigma(x) \tag{5.24}$$

donde χ_Σ denota la función característica en Σ.

Luego, es fácil ver que $f \in L^1_{d^m}(\Omega)$. En efecto, como $x_0 \in \partial\Omega$, $d(x) \leq |x - x_0|$ y se tiene

$$\int_\Omega |f(x)|\, d(x)^m \, dx = \int_\Sigma |x - x_0|^{-(\alpha+2m)}\, d(x)^m \, dx \leq \int_\Sigma |x - x_0|^{-(\alpha+m)} \, dx$$

que resulta finita por ser $0 < \alpha < n - m$.

Por otro lado se tiene el siguiente resultado.

Lema 5.9. *Sea u solución del problema lineal (5.2) para f definida en (5.24), entonces*

$$u(x) \geq C\, |x - x_0|^{-\alpha} \chi_\Sigma(x).$$

Demostración. Por la fórmula de representación

$$u(x) = \int_\Omega G_m(x,y)\, f(y)\, dy = \int_\Omega G_m(x,y)\, |y - x_0|^{-(\alpha+2m)} \chi_\Sigma(y)\, dy.$$

Por otro lado, recordemos que en la demostración del Lema 5.7 en la Sección 5.1 vimos que

$$G_m(x,y) \geq C\, d(x)^m\, d(y)^m,$$

es decir,

$$u(x) \geq \int_{\Sigma} d(x)^m \, d(y)^m \, |y - x_0|^{-(\alpha+2m)} \, dy.$$

Ahora bien, para $x \in \Sigma$ existe una constante positiva σ tal que

$$d(x) \geq \sigma |x - x_0|,$$

para todo $x \in \Sigma$.

Luego, si t es tal que $\sigma|x - x_0| \leq t \leq 2\sigma|x - x_0|$ y tomamos $y \in \Sigma \cap B(x,t)$, se tiene: $d(y) \geq \sigma|y - x_0|$ y $|y - x_0| \leq C|x - x_0|$.

Entonces se sigue para $x \in \Sigma$ que

$$\begin{aligned} u(x) &\geq \int_{\Sigma \cap B(x,t)} d(x)^m \, d(y)^m \, |y - x_0|^{-(\alpha+2m)} \, dy \\ &\geq C \int_{\Sigma \cap B(x,t)} |x - x_0|^m \, |y - x_0|^m \, |y - x_0|^{-(\alpha+2m)} \, dy \\ &\geq C|x - x_0|^{-\alpha} \int_{\Sigma \cap B(x,t)} |x - x_0|^m \, |y - x_0|^{-m} \, dy \geq C \, |x - x_0|^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

□

Estamos entonces en condiciones de demostrar el segundo resultado principal de este capítulo.

Demostración del Teorema 5.6. Recordemos que $\alpha = \frac{2m(p+1)}{pq-1}$ y $\beta = \frac{2m(q+1)}{pq-1}$, con $0 < \alpha, \beta < n - m$. Definimos

$$\phi := |x - x_0|^{-(\alpha+2m)} \, \chi_\Sigma(x) \ , \psi := |x - x_0|^{-(\beta+2m)} \, \chi_\Sigma(x).$$

Sea (u, v) solución positiva del problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = \phi & \text{en } \Omega \\ (-\Delta)^m v = \psi & \text{en } \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j u = \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \quad 0 \leq j \leq m-1. \end{cases}$$

Entonces, se sigue por (5.25) que $u \notin L^\infty$, $v \notin L^\infty$,

$$v^p \geq \left(C \, |x - x_0|^{-\beta} \chi_\Sigma\right)^p = C \, |x - x_0|^{-(\alpha+2m)} \, \chi_\Sigma = C \, \phi$$

y

$$u^q \geq \left(C \, |x - x_0|^{-\alpha} \chi_\Sigma\right)^q = C \, |x - x_0|^{-(\beta+2m)} \, \chi_\Sigma = C \, \psi.$$

Luego, si definimos $a := \phi / v^p \geq 0$ y $b := \psi / u^q \geq 0$, se tiene que a y b son funciones no negativas y acotadas y (u, v) cumple $(-\Delta)^m u = a(x) \, v^p$ y $(-\Delta)^m v = b(x) \, u^q$. □

Para terminar este capítulo, probaremos la Observación 5.3 que describe la optimalidad de la condición 2. dada en la Proposición 5.2 para el problema lineal.

Proposición 5.10. *Sea $1 \le p \le q \le \infty$ y $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > \frac{2m}{n+m}$. Entonces, existe $f \in L^p_{d^m}(\Omega)$ tal que $u \notin L^q_{d^m}(\Omega)$, donde u es solución del problema (5.2).*

Demostración. Sea $0 < \alpha < n-m$ y definimos como antes $f(x) = |x-x_0|^{-(\alpha+2m)}\chi_\Sigma(x)$. Entonces se tiene

$$\|f\|^p_{L^p_{d^m}(\Omega)} = \int_\Sigma |x-x_0|^{-(\alpha+2m)p}\, d(x)^m\, dx \le \int_\Sigma |x-x_0|^{-(\alpha+2m)p+m}\, dx$$

y entonces $f \in L^p_{d^m}(\Omega)$ para $p < \frac{n+m}{\alpha+2m}$.

Pero, como vimos antes, para $x \in \Sigma$ existe una constante positiva σ tal que $d(x) \ge \sigma|x-x_0|$, y entonces se sigue por el Lemma 5.9 que para $q \ge \frac{n+m}{\alpha}$, $u \notin L^q_{d^m}(\Omega)$.

Finalmente, observemos que como $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > \frac{2m}{n+m}$, podemos elegir $\alpha \in (0, n-m)$ tal que $\frac{n+m}{q} < \alpha < \frac{n+m}{p-2m}$. □

Observación 5.11. Recordemos que para $p > m+1$, sabemos por el Corolario 4.6 del Capítulo 4 que la solución del problema lineal satisface

$$\|u\|_{L^q_{d^m}(\Omega)} \le C\, \|f\|_{L^p_{d^m}(\Omega)}.$$

Observación 5.12. Estos resultados pueden extenderse a dominios Ω más generales donde sean válidas las estimaciones (5.5), (5.6) y (5.7).

Capítulo 6

El problema de Dirichlet en un polígono

Consideramos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta U = f & \text{en } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ poligonal.

Estimaciones para la solución del problema (6.1) en espacios de Sobolev sin peso fueron estudiadas por Grisvard en [**Gri85**]. El autor encuentra que el comportamiento de la solución es singular cerca de los vértices del polígono.

Obtenedremos en este capítulo estimaciones a priori con pesos ω en la clase $A_p(\mathbb{R}^2)$ del siguiente tipo

$$\|U\|_{L^p_\omega(\Omega)} + \sum_{|\beta|=1} \|\rho(x) D_x^\beta U\|_{L^p_\omega(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=2} \|\sigma(x) D_x^\alpha U\|_{L^p_\omega(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{L^p_\omega(\Omega)},$$

donde $\rho(x)$ y $\sigma(x)$ son funciones que dependen de la distancia de x al vértice más cercano del polígono y del ángulo correspondiente a dicho vértice y $C = C(\Omega)$.

Como vimos en los preliminares, podemos escribir la solución U mediante su fórmula de representación

$$U(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y) \, f(y) \, dy, \tag{6.2}$$

donde $G_\Omega(x,y)$ es la función de Green asociada a Ω, que puede escribirse a su vez como

$$G_\Omega(x,y) = \Gamma_\Omega(x-y) + H_\Omega(x,y), \tag{6.3}$$

con $\Gamma_\Omega(x) = \dfrac{1}{2\pi} \log |x|^{-1}$ la solución fundamental clásica para el problema de Poisson y $H_\Omega(x,y)$ cumple para cada $y \in \Omega$ fijo

$$\begin{cases} \Delta_x H_\Omega(x,y) = 0 & x \in \Omega \\ H_\Omega(x,y) = -\Gamma_\Omega(x-y) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Para estudiar las derivadas de la función de Green $G_\Omega(x,y)$, usamos la Transformada de Schwartz Christoffel, una aplicación conforme que lleva el disco unidad B al poligono Ω. Esto nos permite usar resultados conocidos de la función de Green en B.

Notación: Decimos que $f \preceq g$ en $\Omega \times \Omega$ siempre que exista una constante positiva $C = C(\Omega)$ tal que $f(x,y) \leq C\, g(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega \times \Omega$.

Recordemos que si $h : B \longrightarrow \Omega$ es una transformación conforme se tiene

$$\Delta(U \circ h) = |h^{'}|^2\, (\Delta U) \circ\, h.$$

Luego, $U \circ h$ satisface

$$\begin{cases} -\Delta U = |h^{'}|^2 (f \circ\, h) & \text{en } B \\ U = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

Entonces para $u \in B$ se tiene

$$U \circ h(u) = \int_B G_B(u,v)\,(f \circ h)(v)\,|h^{'}|^2\, dv,$$

donde G_B es la función de Green en B. Si hacemos ahora un cambio de variables y llamamos $g : \Omega \longrightarrow B$ a la transformación inversa de h, $u = g(x)$ y $v = g(y)$ se tiene que el Jacobiano de la transformación está dado por $J_h(u,v) = |h^{'}|^2$ y por lo tanto

$$U(x) = \int_\Omega G_B(g(x), g(y))\, f(y)\, dy,$$

y obtenemos finalmente una expresión para la función de Green G_Ω dada por

$$G_\Omega(x,y) = G_B(g(x), g(y)) = G_B(u,v). \tag{6.4}$$

Con este mismo argumento, encontramos una expresión para la función H_Ω como sigue

$$H_\Omega(x,y) = H_B(g(x), g(y)) = H_B(u,v), \tag{6.5}$$

donde $H_B(u,v)$ satisface para cada $v \in B$ fijo

$$\begin{cases} \Delta_u H_B(u,v) = 0 & u \in B \\ H_B(u,v) = -\Gamma_B(u-v) & u \in \partial B. \end{cases}$$

con $\Gamma_B = \Gamma_\Omega$.

La función de Green en el disco unidad

La función de Green $G_B(u,v)$ asociada al problema de Dirichlet (6.1) en el disco unidad $B \subset \mathbb{R}^2$ se conoce en forma explícita

$$G_B(u,v) = \frac{1}{2\pi}\log|v-u|^{-1} - \frac{1}{2\pi}\log\left(|u|\left|v - \frac{u}{|u|^2}\right|\right)^{-1}$$

así como también son conocidas las siguientes estimaciones para sus derivadas:

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)| \leq C\,|u-v|^{-|\alpha|}\ \text{mín}\left\{1, \frac{d(v)}{|u-v|}\right\} \qquad \text{para } |\alpha| = 1,2.$$

Entonces, usando que la función de Green es simétrica, podemos probar de forma análoga a la Observación 3.2 que

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)| \leq C\,|u-v|^{-|\alpha|}\ \text{mín}\left\{1, \frac{d(u)}{|u-v|}\right\} \qquad \text{para } |\alpha| = 1,2. \tag{6.6}$$

6.1. La Transformada de Schwarz-Christoffel

En esta sección definimos la transformación conforme h que aplica el disco unidad B del plano complejo en un polígono cerrado simple de manera que podamos utilizar las estimaciones conocidas para la función de Green en el disco.

Dado Ω un polígono cerrado simple de N lados con sus vértices en los puntos del plano z_j con $j \in \{1,...,N\}$, denotamos para cada j:

- θ_j al ángulo interior en z_j
- k_j una constante real tal que $k_j\pi$ es el ángulo exterior en z_j.

Entonces se satisface la relación $k_j\pi + \theta_j = \pi$ para cada $j \in \{1,...,N\}$. Así, para $0 < \theta_j < \pi$ se tiene $0 < k_j < 1$ y para $\pi \leq \theta_j < 2\pi$ se tiene $-1 < k_j \leq 0$.

Como los ángulos exteriores varían entre $-\pi$ y π, se sigue que $k_j \in (-1,1)$, y como la suma de los ángulos exteriores de un polígono cerrado es 2π, entonces $\sum_{j=1}^N k_j = 2$.

Sea

$$h'(u) = (u-w_1)^{-k_1}(u-w_2)^{-k_2}...(u-w_N)^{-k_N},$$

donde $u \in B$ y $w_1,...,w_N$ son tales que $|w_j| = 1$. Entonces $h'(u)$ es analítica en todo el disco B excepto en los puntos w_j.

Si u_0 es un punto en la región donde es analítica, se sigue que

$$h(u) := \int_{u_0}^{u} h'(s)\,ds \tag{6.7}$$

es analítica en esa región, donde la integral es sobre cualquier camino de u_0 hasta u contenido ahí. Como podemos elegir el camino por ser analítica, tomaremos en general la recta que une u_0 y u.

Para definir h en el elemento w_j de manera que sea continua, tomamos por ejemplo w_1 y notamos que el único factor que no es analítico en w_1 es $(u - w_1)^{-k_1}$.

Escribimos $h^{'}(u) = (u - w_1)^{-k_1}\phi(u)$ donde $\phi(u) = (u - w_2)^{-k_2}...(u - w_N)^{-k_N}$ es analítica en w_1 y puede escribirse en un entorno $B(w_1, R)$ de w_1 como su serie de Taylor, entonces se tiene

$$h^{'}(u) = (u - w_1)^{-k_1}\phi(w_1) + (u - w_1)^{1-k_1}\,\psi(u)$$

donde ψ es analítica en $B(w_1, R)$.

Como $1 - k_1 > 0$, podemos asignar el valor cero en $u = w_1$ a la función $(u - w_1)^{1-k_1}\,\psi(u)$. Así, la integral

$$\int_{u_1}^{u} (s - w_1)^{1-k_1}\,\psi(s)\,ds$$

a lo largo de un camino contenido en $\overline{B} \cap B(w_1, R)$ resulta continua en w_1.

Por otro lado,

$$\int_{u_1}^{u} (s - w_1)^{-k_1}\,ds = \frac{1}{1 - k_1}\left[(u - w_1)^{1-k_1} - (u_1 - w_1)^{1-k_1}\right]$$

también representa una función continua en w_1. Finalmente, si tomamos un camino de u_0 hasta u_1 y lo unimos con un camino de u_1 hasta u se tiene que $h(u)$ definida en (6.7) es continua en w_1, y con el mismo argumento, vemos que es continua en todo el disco B.

Definición 6.1. La transformación de Schwarsz-Christoffel viene dada por

$$h(u) = A\int_{u_0}^{u} (s - w_1)^{-k_1}(s - w_2)^{-k_2}...(s - w_N)^{-k_N}\,ds + C$$

donde A y C son constantes complejas.

Esta transformación aplica el interior del disco unidad B en el interior del polígono cerrado simple cuyos vértices son las imágenes de los puntos w_j como se muestra en la Figura 1. En este caso, los vértices del polígono son los puntos $z_j = h(w_j)$ y llamaremos a los puntos w_j pre-vértices. La transformación inversa de h la denotamos por g, así $u = g(x)$ y $v = g(y)$.

Sin perdida de generalidad, en adelante trabajaremos con esta transformación sin tener en cuenta las constantes A y C (para más detalles sobre esta transformación ver por ejemplo [**CB84**]).

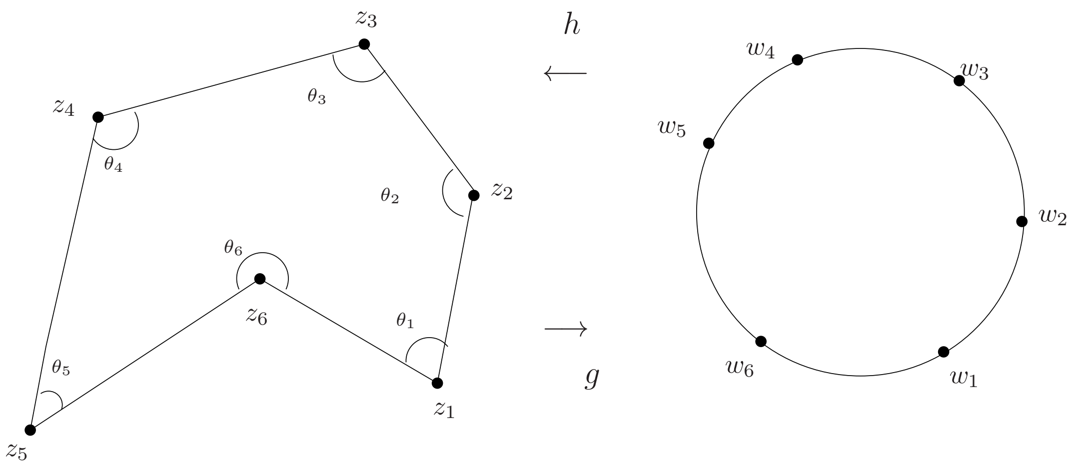

FIGURA 1.

6.2. Desigualdades auxiliares

Para $d_m = \text{mín}_{i\neq j} |w_i - w_j|$ definimos los conjuntos $B_j = \overline{B(w_j, \frac{d_m}{4}) \cap B}$, con $j \in \{1, ..., N\}$, y $B_{N+1} := B \setminus \cup_{j=1}^{N} B_j$.

Luego, si Ω_j es la imagen del conjunto B_j por la transformación h, se tiene que Ω_j es un entorno de z_j y la familia de conjuntos $\{\Omega_j\}_{j=1}^{N+1}$ es un cubrimiento para Ω, mas aún, $\Omega = \cup_{j=1}^{N+1}\Omega_j$ (ver figura 2).

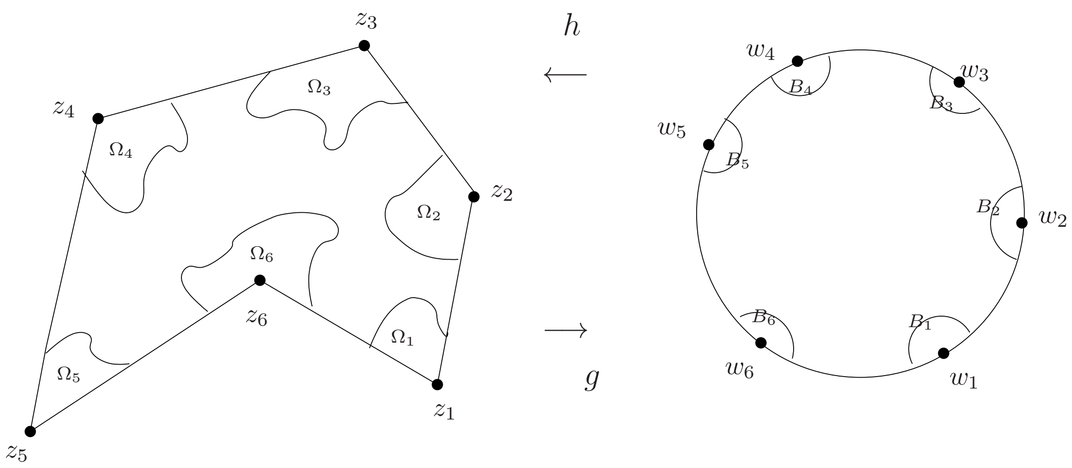

FIGURA 2.

Esto nos permite estudiar el comportamiento de la función de Green $G_\Omega(x, y)$ asociada al problema (6.1) y sus derivadas en un entorno de cada ángulo θ_j determinado por el vértice z_j.

- Para $x \in \Omega_j$ se tiene:

1. Si $y \in \Omega_j$, entonces $u, v \in B_j$ y se encuentran lejos de los otros pre-vértices. Así, $\frac{d_m}{4} < |s - w_i| \leq 1$ para s en la recta que une u con v.
2. Si $y \in \Omega_i$ con $i \neq j$, $i \neq N+1$, entonces $u \in B_j$, $v \in B_i$ y $|u - v| > \frac{d_m}{4}$.
3. Si $y \in \Omega_{N+1}$, se tiene que $v \in B_{N+1}$. Entonces o bien $|u - v| > \frac{d_m}{8}$ o bien u y v se encuentran a distancia mayor a $\frac{d_m}{8}$ de todos los pre-vértices del polígono.

- Para $x \in \Omega_{N+1}$ se tiene que $|u - w_i| > \frac{d_m}{4}$ para todo $i \in \{1, ..., N\}$.

Notación: A partir de aquí, sin perder generalidad y para simplificar la notación en las demostraciones, tomamos $j = 1$ en representación de cualquier $j \in \{1, ..., N\}$.

Lema 6.2. *Sea h la transformada de Schwarz-Christoffel dada en la Definición 6.1. Entonces para $u, v \in B_1$ se tiene*

$$|h(u) - h(v)| \preceq |u - w_1|^{-k_1}|u - v| \quad \textit{para } k_1 > 0, \tag{6.8}$$

$$|h(u) - h(v)| \preceq |u - v| \quad \textit{para } k_1 \leq 0. \tag{6.9}$$

Demostración. Por su definición

$$h(u) - h(v) = \int_v^u (s - w_1)^{-k_1} \phi(s)\, ds,$$

con $\phi(s) = (s - w_2)^{-k_2} ... (s - w_N)^{-k_N}$ analítica en w_1 y $|\phi(s)| \preceq 1$.

Para $k_1 > 0$ consideramos separadamente los siguientes casos:

Caso 1: $|u - w_1| \leq |v - w_1|$.

Se tiene que $|u - w_1| \leq |s - w_1|$ para todo s en la recta que une u con v, entonces

$$\begin{aligned} |h(u) - h(v)| &\leq \int_v^u |s - w_1|^{-k_1} |\phi(s)|\, ds \leq \int_v^u |u - w_1|^{-k_1} |\phi(s)|\, ds \\ &\preceq |u - w_1|^{-k_1} \int_v^u 1\, ds \preceq |u - w_1|^{-k_1} |u - v|. \end{aligned}$$

Caso 2: $|u - w_1| > |v - w_1|$.

Para todo s en la recta que une u con v se tiene $|v - w_1| \leq |s - w_1|$, entonces, en forma análoga al Caso 1 obtenemos

$$|h(u) - h(v)| \preceq |v - w_1|^{-k_1} |u - v|.$$

Cuando $|u - v| \leq \frac{1}{2}|u - w_1|$ se sigue que $|u - w_1| \leq |u - v| + |v - w_1| \leq \frac{1}{2}|u - w_1| + |v - w_1|$ y entonces

$$\frac{1}{2}|u - w_1| \leq |v - w_1|$$

y la estimación es válida en este caso.

Para $|u-w_1|>|v-w_1|$ y $|u-v|>\frac{1}{2}|u-w_1|$ tenemos

$$\begin{aligned}|h(u)-h(v)| &\leq \left|\int_v^u (s-w_1)^{-k_1}\phi(s)\,ds\right| \preceq |v-w_1|^{1-k_1}+|u-w_1|^{1-k_1}\\ &\preceq |u-w_1|^{1-k_1} \preceq |u-v||u-w_1|^{-k_1}.\end{aligned}$$

Para $k_1<0$, $|s-w_1|^{-k_1}<1$ y así para $u,v\in B_1$ se sigue que

$$|h(u)-h(v)| \leq \int_v^u |s-w_1|^{-k_1}|\phi(s)|\,ds \preceq |u-v|.$$

□

6.3. Estimación para la función de Green en el polígono

Cualquiera sea el dominio Ω de $\mathbb{R}^2$ acotado, sabemos que para todo $x,y\in\Omega$ (ver [**MM09**])

$$G_\Omega(x,y) \preceq \log\left(1+\frac{\min\{d(x),d(y)\}}{|x-y|}\right) \preceq |x-y|^{-1}. \tag{6.10}$$

Estimación para las derivadas de primer orden de la función de Green

Con el fin de estimar las derivadas de primer orden para $G_\Omega(x,y)$ aplicamos la regla de la cadena en la ecuación (6.4) y obtenemos

$$|D_x^\alpha G_\Omega(x,y)| \leq 2\,|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g'(x)| \quad \text{para } |\alpha|=1, \tag{6.11}$$

donde, por ser g analítica y h su inversa

$$|g'(x)| = \frac{1}{|h'(u)|} \preceq |u-w_1|^{k_1}|u-w_2|^{k_2}...|u-w_N|^{k_N}. \tag{6.12}$$

- **Caso $0<\theta_1<\pi$:**

Lema 6.3. *Sea $x\in\Omega_1$, donde $0<\theta_1<\pi$. Entonces para $y\in\Omega$ y $|\alpha|=1$ se tiene*

$$|D_x^\alpha G_\Omega(x,y)| \preceq |x-y|^{-1}.$$

Demostración. Para $y\in\Omega_1$ basta ver

$$|g'(x)|\,|h(u)-h(v)| \preceq |u-v|. \tag{6.13}$$

En efecto, como $h(u)=x$ y $h(y)=v$, se tiene por (6.6) que

$$|D_x^\alpha G_\Omega(x,y)| \preceq |D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g'(x)| \preceq |u-v|^{-1}\,|g'(x)| \preceq |x-y|^{-1},$$

y de (6.12) vemos que $|g^{'}(x)| \preceq |u-w_1|^{k_1}$ y tenemos (6.13) por el Lema 6.2.

Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$, se tiene $|u-v| > \frac{d_m}{4}$ y

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)| \preceq |u-v|^{-1}|u-w_1|^{k_1} \preceq 1.$$

Finalmente, para $y \in \Omega_{N+1}$, sólo nos queda analizar cuando u y v se encuentran a distancia mayor a $\frac{d_m}{8}$ de todos los pre-vértices del polígono. Pero esto nos dice que $|g^{'}(x)| \preceq 1$ y $|h^{'}(x)| \preceq 1$ es decir,

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)| \preceq |u-v|^{-1} \preceq |x-y|^{-1}.$$

□

• **Caso** $\pi \leq \theta_1 < 2\pi$**:** Para el caso que el ángulo interior θ_1 es mayor que π, en la acotación aparece una dependencia de la distancia al vértice z_1, como vemos en el siguiente lema.

Lema 6.4. *Sea $x \in \Omega_1$, donde $\pi \leq \theta_1 < 2\pi$. Entonces para $y \in \Omega$ y $|\alpha| = 1$ se tiene*

$$|x-z_1|^{1-\frac{\pi}{\theta_1}}|D_x^\alpha G_\Omega(x,y)| \preceq |x-y|^{-1}.$$

Demostración. Tomemos $y \in \Omega_1$. Como $\theta_1 \geq \pi$, se tiene $k_1 \leq 0$ y por el Lema 6.2

$$|h(u)-h(v)| \preceq |u-v|.$$

Reemplazando en (6.11)

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha G_\Omega(x,y)| &\preceq |g^{'}(x)||u-v|^{-1} \preceq |u-w_1|^{k_1}|u-v|^{-1}\\ &\preceq |u-w_1|^{k_1}|h(u)-h(v)|^{-1} = |u-w_1|^{k_1}|x-y|^{-1}.\end{aligned}$$

Así, si existe $\gamma > 0$ tal que $|x-z_1|^\gamma \preceq |u-w_1|^{-k_1}$ tenemos

$$|x-z_1|^\gamma|D_x^\alpha G_\Omega(x,y)| \preceq |x-y|^{-1}. \tag{6.14}$$

Pero

$$|x-z_1| = |h(u)-h(w_1)| \preceq \left|\int_{w_1}^u (s-w_1)^{-k_1}\phi(s)\,ds\right| \preceq |u-w_1|^{1-k_1}, \tag{6.15}$$

entonces, tomando $\gamma := \frac{-k_1}{(1-k_1)} = 1 - \frac{\pi}{\theta_1} > 0$ se tiene (6.14) y el lema queda probado para $y \in \Omega_1$.

Para $y \notin \Omega_1$ $y \notin \Omega_{N+1}$, se tiene $|u-v| > \frac{d_m}{4}$ y

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)| \preceq |u-v|^{-1}|u-w_1|^{k_1} \preceq |u-w_1|^{k_1}$$

y se sigue como en (6.14).

Finalmente, para $y \in \Omega_{N+1}$ sólo nos queda analizar cuando u y v se encuentran a distancia mayor a $\frac{d_m}{8}$ de todos los pre-vértices del polígono y la demostración es análoga al caso $\theta_1 < \pi$. $\square$

Si $x \in \Omega_{N+1}$ la función de Green $G_\Omega(x,y)$ no tiene mayores singularidades que las propias de la función de Green en el disco, como vemos en el siguiente lema.

Lema 6.5. *Sea $x \in \Omega_{N+1}$. Entonces para $y \in \Omega$ y $|\alpha| = 1$ se tiene*

$$|D_x^\alpha G_\Omega(x,y)| \preceq |x-y|^{-1}.$$

Demostración. Como $x \in \Omega_{N+1}$, se tiene $\frac{d_m}{4} < |u - w_i| \leq 1$ para todo $i \in \{1, ..., N\}$. Entonces $|h(u) - h(v)| \preceq |u - v|$ y

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)| \preceq |u-v|^{-1} \preceq |x-y|^{-1}.$$

$\square$

Estimación para las derivadas de segundo orden de la función de Green

Para obtener una estimación para las derivadas de segundo orden de $G_\Omega(x,y)$ aplicamos nuevamente la regla de la cadena a la ecuación (6.4) y así

$$|D_x^\alpha G_\Omega(x,y)| \preceq |D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 + |D_u^\beta G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \quad \text{para } |\beta| = 1, |\alpha| = 2, \tag{6.16}$$

donde

$$|g^{''}(x)| \preceq |u - w_1|^{2k_1 - 1}. \tag{6.17}$$

Entonces, nos queda estimar separadamente cada término en (6.16).

- **Caso** $0 < \theta_1 < \pi$**:**

Lema 6.6. *Sea $x \in \Omega_1$ donde, $0 < \theta_1 < \pi$. Entonces si $|\beta| = 1$ se tiene:*
Para $y \in \Omega_1$ existe $0 \leq a < 1$ tal que

$$|x - z_1|^{1-a}\,|D_u^\beta G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq |x-y|^{-1-a}.$$

Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$

$$|D_u^\beta G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq 1.$$

Para $y \in \Omega_{N+1}$

$$|D_u^\beta G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq |x-y|^{-1}.$$

Demostración. Sea $y \in \Omega_1$. Consideramos los siguientes casos:

1. Si $|x-y| \leq |x-z_1|$, por (6.6), (6.17), y el Lema 6.2 se tiene para $a \geq 0$

$$\begin{aligned}
|D_u^{\beta} G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| &\preceq |u-v|^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1} \\
&\preceq |x-y|^{-1}|u-w_1|^{-k_1}|u-w_1|^{2k_1-1} \\
&\preceq |x-y|^{-1-a}|x-y|^{a}|u-w_1|^{k_1-1} \\
&\preceq |x-y|^{-1-a}|x-z_1|^{a}|u-w_1|^{k_1-1}.
\end{aligned}$$

Entonces como $a \geq 0$ por (6.15) se tiene

$$|x-z_1|^{1-a}|D_u^{\beta} G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq |x-y|^{-1-a}.$$

2. Si $|x-y| \geq |x-z_1|$, por (6.6), (6.17), el Lema 6.2 y usando que $d(u) < |u-w_1|$ se tiene para $a \geq 0$

$$\begin{aligned}
|D_u^{\beta} G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| &\preceq \frac{d(u)}{|u-v|^2}|u-w_1|^{2k_1-1} \\
&\preceq d(u)|x-y|^{-2}|u-w_1|^{-2k_1}|u-w_1|^{2k_1-1} \\
&\preceq |x-y|^{-2} \\
&= |x-y|^{-1+a}|x-y|^{-1-a}.
\end{aligned}$$

Entonces como $a \geq 0$, por (6.15) se tiene

$$|x-z_1|^{1-a}|D_u^{\beta} G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq |x-y|^{-1-a}.$$

Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$, se sigue que $|u-v| > \frac{d_m}{4}$ y entonces

$$|D_u^{\beta} G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq \frac{d(u)}{|u-v|^2}|u-w_1|^{2k_1-1} \preceq |u-w_1|^{2k_1} \preceq 1.$$

Finalmente, para $y \in \Omega_{N+1}$, el caso que no está contenido en los anteriores es cuando u y v se encuentran a distancia mayor que $\frac{d_m}{8}$ de todos los pre-vértices del polígono, entonces $|g^{''}(x)| \preceq 1$ y

$$|D_u^{\beta} G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq |u-v|^{-1} \preceq |x-y|^{-1}.$$

□

Concluímos el análisis cerca de los vértices z_j con $0 < \theta_j < \pi$ con la estimación para el primer término en (6.16).

Lema 6.7. *Sea $x \in \Omega_1$, donde $0 < \theta_1 < \pi$. Entonces si $|\alpha| = 2$ se tiene:*

Para $y \in \Omega_1 \cup \Omega_{N+1}$

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}.$$

Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq 1.$$

Demostración. Para $y \in \Omega_1$, por (6.6), (6.8) y (6.12)

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(u)}{|u-v|^3}|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(u)}{|x-y|^3}|u-w_1|^{-k_1}.$$

Sea $X_0 \in \partial\Omega$ tal que $d(x) = |x - X_0|$ y $Q_0 \in \partial B$ tal que $g(X_0) = Q_0$. Entonces por el teorema del valor intermedio existe ξ_0 en la recta que une x con X_0 tal que

$$d(u) \le |u - Q_0| = |g(x) - g(X_0)| \le |g^{'}(\xi_0)||x - X_0| = |g^{'}(\xi_0)|d(x) \tag{6.18}$$

y aplicamos (6.12) a $g(\xi_0) = \eta$ para obtener

$$d(u) \preceq |\eta - w_1|^{k_1} d(x).$$

Entonces

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}|\eta - w_1|^{k_1}|u-w_1|^{-k_1}.$$

Si aplicamos sucesivamente el teorema del valor intermedio, existen ξ_i en la recta que une ξ_{i-1} con z_1 tales que

$$\begin{aligned}
|\eta - w_1| &\preceq |\eta_1 - w_1|^{k_1}|\xi_0 - z_1| \\
&\preceq |\eta_2 - w_1|^{k_1^2}|\xi_1 - z_1|^{k_1}|\xi_0 - z_1| \\
&\preceq |\eta_3 - w_1|^{k_1^3}|\xi_2 - z_1|^{k_1^2}|\xi_1 - z_1|^{k_1}|\xi_0 - z_1| \\
&\dots \\
&\preceq |\eta_M - w_1|^{k_1^M} \dots |\xi_2 - z_1|^{k_1^2}|\xi_1 - z_1|^{k_1}|\xi_0 - z_1| \\
&\preceq |x - z_1|^{k_1^M} \dots |x - z_1|^{k_1^2}|x - z_1|^{k_1}|x - z_1|
\end{aligned}$$

donde $g(\xi_i) = \eta_i$ y usamos en la última desigualdad $|\xi_i - z_1| \preceq |x - z_1|$ y $|\eta_i - w_1| \preceq |x - z_1|$ para todo i.

Pero la constante que representa $\preceq$ no depende de cuantas veces aplique este razonamiento, es decir, no depende de M. En efecto, al acotar $|g^{'}(\xi_i)|$, se tiene por (6.12) que

$$|g^{'}(\xi_i)| \leq |\eta_i - w_1|^{k_1} \left(\frac{dm}{4}\right)^p,$$

donde $p = \sum_{k_j<0} k_j$. Entonces obtenemos despúes de M veces la constante que representa $\preceq$ es

$$\left(\frac{dm}{4}\right)^{p \sum_{n=0}^{M} k_1^n}$$

y por ser $p < 0$ y $d_m < 4$, podemos acotarla por $\left(\frac{dm}{4}\right)^{p \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n}$ que es finito y no depende de M.

Luego, se tiene

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}|x-z_1|^\beta |u-w_1|^{-k_1},$$

para $\beta = \sum_{n=1}^{M+1} k_1^n = k_1\left(\frac{1-k_1^{M+2}}{1-k_1}\right)$.

Por otro lado, para $\gamma = \frac{k_1}{1-k_1}$ se sigue de (6.15)

$$|x-z_1|^{-\beta+\gamma}|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}.$$

Para $\varepsilon > 0$ podemos encontrar M suficientemente grande de manera que $-\beta+\gamma = k_1^{M+2}\frac{k_1}{1-k_1} < \varepsilon$. Entonces

$$|x-z_1|^{\varepsilon}|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3},$$

para todo ε y podemos tomar límite con ε tendiendo a cero. Así

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}.$$

Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$, se tiene $|u-v| > \frac{d_m}{4}$ y por (6.6)

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq |u-v|^{-2}|g^{'}(x)|^2 \preceq |u-w_1|^{2k_1} \preceq 1.$$

Finalmente, para $y \in \Omega_{N+1}$, con u y v a distancia mayor a $\frac{d_m}{8}$ de todos los pre-vértices del polígono, $|h(u)-h(v)| \preceq |u-v|$ y

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(u)}{|u-v|^3}|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}|\eta - w_1|^{k_1} \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}.$$

□

- **Caso $\pi \leq \theta_1 < 2\pi$:** Veamos ahora que sucede cerca de los vértices z_j con $\pi \leq \theta_j < 2\pi$.

Lema 6.8. *Sea $x \in \Omega_1$, donde $\pi \leq \theta_1 < 2\pi$. Entonces para $y \in \Omega$ y $|\beta| = 1$ se tiene:*

Para $y \in \Omega_1$

$$|x - z_1|^{2-\frac{\pi}{\theta_1}} |D_u^\beta G_B(u,v)|\, |g^{''}(x)| \preceq |x-y|^{-1}.$$

Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$

$$|x - z_1|^{2-\frac{\pi}{\theta_1}} |D_u^\beta G_B(u,v)|\, |g^{''}(x)| \preceq 1.$$

Para $y \in \Omega_{N+1}$

$$|D_u^\beta G_B(u,v)|\, |g^{''}(x)| \preceq |x-y|^{-1}.$$

Demostración. Tomemos $y \in \Omega_1$. Por (6.6), (6.17) y Lema 6.2 se tiene

$$|D_u^\beta G_B(u,v)|\, |g^{''}(x)| \preceq |u-v|^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1} \preceq |x-y|^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1}.$$

Luego, si existe $\gamma > 0$ tal que $|x-z_1|^\gamma \preceq |u-w_1|^{-2k_1+1}$ tenemos

$$|x-z_1|^\gamma |D_u^\beta G_B(u,v)|\, |g^{''}(x)| \preceq |x-y|^{-1}.$$

Pero por (6.15) basta tomar

$$\gamma = \frac{1-2k_1}{(1-k_1)} = 2 - \frac{\pi}{\theta_1}.$$

Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$ se tiene $|u-v| > \frac{d_m}{4}$ y

$$|D_u^\beta G_B(u,v)|\, |g^{''}(x)| \preceq |u-v|^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1} \preceq |u-w_1|^{2k_1-1}$$

y se sigue como antes.

Finalmente, para $y \in \Omega_{N+1}$, con u y v a distancia mayor a $\frac{d_m}{8}$ de todos los pre-vértices del polígono, $|h(u) - h(v)| \preceq |u-v|$ y

$$|D_u^\beta G_B(u,v)|\, |g^{''}(x)| \preceq |u-w_1|^{2k_1-1}|u-v|^{-1} \preceq |x-y|^{-1}.$$

□

Lema 6.9. *Sea $x \in \Omega_1$, donde $\pi \leq \theta_1 < 2\pi$ y sea $|\alpha| = 2$. Entonces*

1. *Para $y \in \Omega_1$ con $d(x) \leq \frac{1}{2}|x-z_1|$ se tiene*

$$|x - z_1|^{2-\frac{\pi}{\theta}_1} |D_u^\alpha G_B(u,v)|\, |g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}.$$

2. *Para $y \in \Omega_1$ con $\frac{1}{2}|x-z_1| < d(x) \leq |x-y|$, existe $a > 0$ tal que*

$$|x - z_1|^{a+2-2\frac{\pi}{\theta_1}} |D_u^\alpha G_B(u,v)|\, |g^{'}(x)|^2 \preceq |x-y|^{-2+a}.$$

3. *Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$ se tiene*

$$|x - z_1|^{2-\frac{\pi}{\theta_1}} \, |D_u^\alpha G_B(u,v)| \, |g^{'}(x)|^2 \preceq 1.$$

4. *Para $y \in \Omega_{N+1}$ se tienen las estimaciones 1. y 2.*

Demostración. Consideremos $y \in \Omega_1$ y $d(x) \leq \frac{1}{2}|x - z_1|$. Por (6.6), (6.9) y (6.12)

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)| \, |g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(u)}{|u - v|^3}|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(u)}{|x - y|^3}|u - w_1|^{2k_1}.$$

Pero, por (6.18), existe $\xi = h(\eta)$ en la recta que une x con X_0 para $X_0 \in \partial\Omega$ con $d(x) = |x - X_0|$ tal que

$$d(u) \leq |g^{'}(\xi)| d(x).$$

Entonces por (6.12)

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)| \, |g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x - y|^3}|\eta - w_1|^{k_1}|u - w_1|^{2k_1}. \tag{6.19}$$

Así, si tomamos $\gamma = \frac{-2k_1}{1-k_1}$ y $\beta = \frac{-k_1}{1-k_1}$ se obtiene por (6.15)

$$|x - z_1|^\gamma |\xi - z_1|^\beta \preceq |u - w_1|^{-2k_1}|\eta - w_1|^{-k_1} \tag{6.20}$$

y reemplazando en (6.19)

$$|\xi - z_1|^\beta |x - z_1|^\alpha |D_u^\alpha G_B(u,v)| \, |g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x - y|^3}. \tag{6.21}$$

Pero como $d(x) \leq \frac{1}{2}|x - z_1|$, $|x - z_1| \preceq |\xi - z_1|$. En efecto $|x - z_1| \leq |x - \xi| + |\xi - z_1|$ y tenemos los siguientes casos:

- si $|x - \xi| \leq \frac{1}{4}|x - z_1|$ es directo.
- si $|x - \xi| \geq \frac{1}{4}|x - z_1|$, como $d(x) \leq \frac{1}{2}|x - z_1|$ se tiene $|x - \xi| \geq \frac{1}{2}|x - z_1|$ y $|x - z_1| \leq |x - X_0| + |X_0 - z_1| \leq \frac{1}{2}|x - z_1| + |X_0 - z_1|$. Entonces

$$\frac{1}{2}|x - z_1| \leq |X_0 - z_1| \leq |X_0 - \xi| + |\xi - z_1| = d(\xi) + |\xi - z_1| \leq 2|\xi - z_1|.$$

Luego, por (6.21)

$$|x - z_1|^{\gamma+\beta}|D_u^\alpha G_B(u,v)| \, |g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x - y|^3},$$

donde $\gamma + \beta < 2 - \frac{\pi}{\theta_1}$ para $\theta_1 < 2\pi$. Esto nos dice que

$$|x - z_1|^{2-\frac{\pi}{\theta_1}}|D_u^\alpha G_B(u,v)| \, |g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x - y|^3}$$

y queda probado el punto 1.

Para probar el punto 2. vemos que, por (6.6) y el hecho que $\frac{1}{2}|x-z_1| < d(x) < |x-y|$ se tiene para $a > 0$

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{1}{|u-v|^2}|g^{'}(x)|^2$$
$$\preceq |x-y|^{-a}|u-w_1|^{2k_1}|x-y|^{-2+a}$$
$$\preceq |x-z_1|^{-a}|u-w_1|^{2k_1}|x-y|^{-2+a}. \tag{6.22}$$

Entonces, si $\gamma = \frac{-2k_1}{1-k_1}$, por (6.15)

$$|x-z_1|^{a+\gamma}|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq |x-y|^{-2+a}$$

como queríamos probar.

Para $y \notin \Omega_1$, $y \notin \Omega_{N+1}$ se tiene $|u-v| > \frac{d_m}{4}$. Entonces

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq |u-v|^{-2}|u-w_1|^{2k_1} \preceq |u-w_1|^{2k_1}$$

y se sigue como en (6.20).

Finalmente, para $y \in \Omega_{N+1}$, con u y v a distancia mayor a $\frac{d_m}{8}$ de todos los pre-vértices del polígono, $|h(u)-h(v)| \preceq |u-v|$ y también consideramos los casos 1. y 2. que se ven simplificados porque podemos acotar los factores $|u-w_1|^{2k_1}$ en las ecuaciones (6.19) y (6.22). $\square$

- **Caso $x \in \Omega_{N+1}$:** Se tiene $\frac{d_m}{8} < |u-w_i| \leq 1$ para todo i y $|h(u)-h(v)| \preceq |u-v|$. Esto hace suponer que no hay dependencia de la distancia a los vértices. Esto acurre para el término con $|\beta| = 1$. En efecto,

$$|D_u^\beta G_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq |u-w_1|^{2k_1-1}|u-v|^{-1} \preceq |x-y|^{-1}.$$

Sin embargo, requiere más cuidado para el término con $|\alpha| = 2$. Esto se debe a que comparamos $d(x)$ con $d(u)$ como en (6.18) y tenemos la existencia de un punto $\xi = h(\eta)$ que no sabemos si se encuentra lejos o no de los vértices. En efecto, si $|\alpha| = 2$,

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(u)}{|u-v|^3}|g^{'}(x)|^2 \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}|\eta-w_1|^{k_1},$$

suponiendo que w_1 es el pre-vértice más cercano a η.

Entonces, si $k_1 > 0$ tenemos

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)| \preceq \frac{d(x)}{|x-y|^3}.$$

Pero si $k_1 \leq 0$ tenemos una singularidad. Lo que hacemos es separar en los mismos casos que en la demostración del Lema 6.9, esto es

1. $d(x) \leq \frac{1}{2}|x - z_1|$: se sigue análogamente al punto 1. tomando sólo la condición para β.
2. $\frac{1}{2}|x - z_1| < d(x) < |x - y|$:

$$|D_u^\alpha G_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq |u-v|^{-2} \preceq |x-y|^{-2}$$

y se sigue análogamente al punto 2. En ambos casos, los factores que aparecen son potencias positivas de $|x - z_1|$, y por ser $x \in \Omega_{N+1}$, se tiene $|x - z_1| > \frac{d_m}{4}$, con lo cual efectivamente no hay dependencia de la distancia a dicho vértice.

6.4. Resultado principal

Para hallar estimaciones de las derivadas de segundo orden de $H_\Omega(x,y)$ la idea es la misma que para el caso $G_\Omega(x,y)$ y consiste en aplicar la regla de la cadena a la ecuación (6.5) para obtener

$$|D_x^\alpha H_\Omega(x,y)| \preceq |D_u^\alpha H_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 + |D_u^\beta H_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \qquad \text{para } |\alpha| = 2,\ |\beta| = 1. \tag{6.23}$$

Lema 6.10. *Sea $x \in \Omega_1$ y $|\alpha| = 2$. Entonces para $y \in \Omega$ se tiene*

1. *Si* $0 < \theta_1 < \pi$
$$|D_x^\alpha H_\Omega(x,y)| \preceq d(x)^{-2}.$$
2. *Si* $\pi \leq \theta_1 < 2\pi$
$$|x - z_1|^{2-\frac{\pi}{\theta}}|D_x^\alpha H_\Omega(x,y)| \preceq d(x)^{-2}.$$

Sea $x \in \Omega_{N+1}$ y $|\alpha| = 2$. Entonces para $y \in \Omega$ se tiene

$$|D_x^\alpha H_\Omega(x,y)| \preceq d(x)^{-2}.$$

Demostración. Como buscamos una acotación para cada término en (6.23), usamos los resultados probados en el Capítulo 2 para un dominio $\mathcal{C}^2$.

Por el Lema 2.2, y por ser B un dominio suave, para $|\beta| = 1$ y $|\alpha| = 2$

$$|D_u^\beta H_B(u,v)| \leq C\, d(u)^{-1} \quad \text{y} \quad |D_u^\alpha H_B(u,v)| \leq C\, d(u)^{-2}.$$

Para $x \in \Omega$, sea $X_0 \in \partial\Omega$ tal que $g(X_0) = U_0$ con $d(u) = |u - U_0|$. Entonces para todo valor de θ_1

$$d(x) \leq |x - X_0| = |h(u) - h(U_0)| \leq |h^{'}(\eta)||u - U_0| \preceq |\eta - w_1|^{-k_1} d(u), \tag{6.24}$$

para η en la recta que une u y U_0.

Supongamos ahora que $0 < \theta_1 < \pi$, entonces $k > 0$. Luego

$$|D_u^\alpha H_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq d(u)^{-2}|u-w_1|^{2k_1} \preceq |\eta - w_1|^{-2k_1} d(x)^{-2}|u-w_1|^{2k_1}$$

y

$$|D_u^\beta H_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq d(u)^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1} \preceq |\eta - w_1|^{-k_1} d(x)^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1}.$$

Consideramos los siguientes casos:

Caso 1: $|\eta - w_1| > \frac{1}{2}|u-w_1|$. Se tiene

$$|D_u^\alpha H_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 + |D_u^\beta H_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq d(x)^{-2} + d(x)^{-1}|x-z_1|^{-1} \preceq d(x)^{-2}.$$

Caso 2: $|\eta - w_1| \leq \frac{1}{2}|u-w_1|$. Bajo estas condiciones $d(u) \geq \frac{1}{2}|u-w_1|$. En efecto,

$$|u-w_1| \leq |\eta - u| + |\eta - w_1| \leq d(u) + \frac{1}{2}|u-w_1|.$$

Entonces $d(u)^{-1} \leq \frac{1}{2}|u-w_1|^{-1}$ y no es necesaria la estimación (6.24). En este caso, se tiene directamente por (6.15)

$$\begin{aligned}|D_u^\alpha H_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 + |D_u^\beta H_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| &\preceq d(u)^{-2}|u-w_1|^{2k_1} + d(u)^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1}\\ &\preceq |u-w_1|^{-2+2k_1} \preceq |x-z_1|^{-2} \preceq d(x)^{-2}.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\pi \leq \theta_1 < 2\pi$, entonces $k_1 \leq 0$, y de la ecuación (6.24) vemos que $d(x) \preceq d(u)$. Entonces

$$|D_u^\alpha H_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq d(x)^{-2}|u-w_1|^{2k_1},$$

y usando nuevamente (6.15)

$$|x-z_1|^{\frac{-2k_1}{1-k_1}}|D_u^\alpha H_B(u,v)|\,|g^{'}(x)|^2 \preceq d(x)^{-2},$$

donde $\frac{-2k_1}{1-k_1} < 2 - \frac{\pi}{\theta}{}_1$.

De la misma manera

$$|D_u^\beta H_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq d(u)^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1} \preceq d(x)^{-1}|u-w_1|^{2k_1-1}$$

y se tiene

$$|x-z_1|^{\frac{1-2k_1}{1-k_1}}|D_u^\beta H_B(u,v)|\,|g^{''}(x)| \preceq d(x)^{-1},$$

donde $\frac{1-2k_1}{1-k_1} = 2 - \frac{\pi}{\theta}{}_1$.

Si tomamos $x \in \Omega_{N+1}$, $|g^{'}(x)| \preceq 1$ y $|g^{''}(x)| \preceq 1$, y

$$|D_x^\alpha H_B(x,y)| \preceq d(u)^{-2} + d(u)^{-1}$$

y por (6.24) vemos que si η se encuentra cerca del pre-vértice w_1 con $k_1 \leq 0$, se tiene $d(x) \preceq d(u)$.

Pero si $k_1 > 0$, debemos separar en los casos vistos previamente:

Caso 1: $|\eta - w_1| > \frac{1}{2}|u - w_1| > \frac{d_m}{8}$.

Caso2: $|\eta - w_1| \leq \frac{1}{2}|u - w_1|$, entonces $d(u) > \frac{1}{2}|u - w_1| > \frac{d_m}{8}$.

En ambos casos obtenemos $d(x) \preceq d(u)$ como queríamos probar. $\square$

El término en la expresión (6.3) que nos queda por estimar es $D^\alpha \Gamma_\Omega(x-y)$. Aquí no es necesario componer con la transformación de Schuartz-Christofel ya que no está involucrado el dominio. Por lo tanto, por el Teorema 2.5 del Capítulo 2 se tiene para $i = 1, 2$, $j = 1, 2$

$$D_{x_i} \int_\Omega D_{x_j} \Gamma_\Omega(x-y)\, f(y)\, dy = K f(x) + c\, f(x)$$

en sentido débil, donde c es una constante y K es el operador integral singular de Calderón-Zygmund dado por

$$K f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} D_{x_i x_j} \Gamma_\Omega(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Lema 6.11. *Sea U solución del problema (6.1). Entonces para $x \in \Omega$, y $|\beta| = 1$*

$$|U(x)| + |\rho(x)\, D_x^\beta U(x)| \preceq\, M f(x).$$

donde

$$\rho(x) := \begin{cases} |x - z_i|^{1-\frac{\pi}{\theta_i}} & \textit{para } x \in \Omega_i \textit{ con } \theta_i \geq \pi \\ 1 & \textit{para } x \in \Omega_i \textit{ con } \theta_i < \pi \textit{ o } x \in \Omega_{N+1}. \end{cases}$$

Demostración. Por los resultados vistos en la Sección 6.3

$$|G_\Omega(x,y)| \preceq |x-y|^{-1} \;\text{ y }\; |\rho(x) D_x^\beta G_\Omega(x,y)| \preceq |x-y|^{-1}.$$

Entonces el resultado se sigue fácilmente de la misma manera que el Lema 2.1. $\square$

Lema 6.12. *Sea U solución del problema (6.1). Entonces para $x \in \Omega$ y $|\alpha| = 2$*

$$|\sigma(x) D_x^\alpha U(x)| \preceq \left\{ \widetilde{K} f(x) + M f(x) + |f(x)| \right\},$$

donde $\widetilde{K}f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} D_x^\alpha \Gamma_\Omega(x-y)\, f(y)\, dy \right|$ *y*

$$\sigma(x) := \begin{cases} |x-z_i|^{2-\frac{\pi}{\theta_i}} & \textit{para } x \in \Omega_i \textit{ con } \theta_i \geq \frac{\pi}{2} \\ |x-z_i|^{1-a} & \textit{para } x \in \Omega_i \textit{ con } \theta_i < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \textit{para } x \in \Omega_{N+1}, \end{cases}$$

para $0 \leq a < 1$.

Demostración. De la misma manera que en la demostración del Lema 2.8, por la fórmula de representación (6.2) y (6.3) tenemos

$$\begin{aligned} D_x^\alpha U(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<|x-y|\leq d(x)} D_x^\alpha \Gamma_\Omega(x-y)\, f(y)\, dy + cf(x) \\ &+ \int_{|x-y|\leq d(x)} D_x^\alpha H_\Omega(x,y)\, f(y)\, dy + \int_{|x-y|>d(x)} D_x^\alpha G_\Omega(x,y)\, f(y)\, dy \\ &:= I + II + III + IV. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$|I| \leq |Kf(x)| + \widetilde{K}f(x) \leq 2\widetilde{K}f(x)$$

y $|II| \leq Cf(x)$.

Por el Lema 6.10 y como $\sigma(x) \preceq 1$ para $x \in \Omega_i$ donde $0 < \theta_i \leq \pi$, se cumple

$$\int_{|x-y|\leq d(x)} \sigma(x) D_x^\alpha H_\Omega(x,y)\, f(y)\, dy \preceq d(x)^{-2} \int_{|x-y|\leq d(x)} |f(y)|\, dy \preceq CMf(x).$$

Finalmente, por los resultados vistos en la Sección 6.3 se tiene

$$\int_{|x-y|>d(x)} \sigma(x) D_x^\alpha G_\Omega(x,y)\, f(y)\, dy \preceq Mf(x)$$

y el lema queda probado. □

Estamos entonces en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 6.13. *Sea* Ω *un polígono en* $\mathbb{R}^2$ *y sea* U *solución del problema (6.1) para* $f \in L^p_\omega(\Omega)$ *y* $\omega \in A_p(\mathbb{R}^2)$. *Entonces*

$$\|U\|_{L^p_\omega(\Omega)} + \sum_{|\beta|=1} \|\rho(x) D_x^\beta U\|_{L^p_\omega(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=2} \|\sigma(x) D_x^\alpha U\|_{L^p_\omega(\Omega)} \preceq \|f\|_{L^p_\omega(\Omega)}.$$

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata del Lema 6.11 y el Lema 6.12 tomando $\Omega = \cup_{i=1}^{N+1} \Omega_i$. □

Parte 2

Operadores Elípticos en el espacio de Energía

Capítulo 7

Espacios de Sobolev $W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)$

Dada una familia de pesos $\{\omega_\alpha\}_{|\alpha|\leq 1}$ tal que para cada α, $\omega_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)$ definimos el espacio de Sobolev

$$W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega) = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \; D^\alpha f \in L^p_{\omega_\alpha}(\Omega)\}$$

y para $f \in W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha f\|^p_{L^p_{\omega_\alpha}(\Omega)} \right)^{1/p}, \tag{7.1}$$

donde el espacio $L^p_{\omega_\alpha}(\Omega)$ es el espacio de funciones medibles definidas en Ω tales que

$$\|f\|_{L^p_{\omega_\alpha}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \omega_\alpha(x) \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Observación 7.1. Para asegurar que $W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)$ sea un espacio de Banach con la norma definida en (7.1), tomamos $\omega_\alpha^{-1/(p-1)} \in L^1_{loc}(\Omega)$ para $|\alpha| = 1$ (ver [**KO84**]). Observar que dicha condición para ω_α implica que $D^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Por otra parte, $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)$, pues $\omega_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces introducimos el espacio

$$W^{1,p}_{\omega_\alpha,0}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)},$$

donde la clausura es tomada con respecto a la norma $W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)$.

Cuando $\omega_\alpha = \omega$ para todo α, $W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega) = W^{1,p}_{\omega}(\Omega)$ es el espacio de Sobolev con pesos usados en las secciones anteriores.

7.1. Densidad de funciones suaves en espacios de Sobolev con pesos

En $L^p(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ es denso. Queremos ver condiciones para $\omega \in \mathcal{M}(\Omega)$, bajo las cuales $C_0^\infty(\Omega)$ sea también denso en el espacio $L^p_\omega(\Omega)$. Si $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$, este resultado fue probado por Chua en [**Chu92**].

En el siguiente teorema probamos la densidad de las funciones $C_0^\infty(\Omega)$ en $L^p_\omega(\Omega)$ bajo ciertas condiciones para ω que no necesariamente se relacionan con la condición $A_p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 7.2. *Sea $\omega \in \mathcal{M}(\Omega)$ y supongamos que para todo compacto $K \subset \Omega$, existen constantes positivas a_K y b_K tales que $a_K \leq \omega(x) \leq b_K$ para casi todo $x \in K$. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p_\omega(\Omega)$.*

Demostración. Si Ω es un dominio acotado, definimos

$$\Omega_n := \{x \in \Omega : \frac{1}{n} < d(x, \partial\Omega)\},$$

y tenemos que $\Omega = \lim_{n\to\infty} \Omega_n$, entonces dada $f \in L^p_\omega(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} |f(x)|^p\, \omega(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \chi_{\Omega_n}(x)\, \omega(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \chi_\Omega(x)\, \omega(x)\, dx = \int_\Omega |f(x)|^p\, \omega(x)\, dx,\end{aligned}$$

por Teorema de Convergencia de Lebesgue. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que

$$\left(\int_{\Omega\setminus\Omega_{n_0}} |f(x)|^p\, \omega(x)\, dx \right)^{1/p} < \varepsilon/2.$$

Por otro lado, como Ω_{n_0} esta contenido en un compacto de Ω, existen constantes positivas a_0 y b_0 tales que $a_0 \leq \omega(x) \leq b_0$ para casi todo $x \in \Omega_{n_0}$, por lo tanto

$$\left(\int_{\Omega_{n_0}} |f(x)|^p\, a_0\, dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega_{n_0}} |f(x)|^p\, \omega(x)\, dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega_{n_0}} |f(x)|^p\, b_0\, dx \right)^{1/p}$$

y resulta $f \in L^p(\Omega_{n_0})$.

Luego, como $C_0^\infty(\Omega_{n_0})$ es denso en $L^p(\Omega_{n_0})$, existe $g \in C_0^\infty(\Omega_{n_0})$ tal que

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega_{n_0})} < \frac{\varepsilon}{2\, b_0^{1/p}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|f - g\|_{L^p_\omega(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f - g|^p \omega(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_{n_0}} |f|^p \omega(x) dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega_{n_0}} |f - g|^p \omega(x) dx \right)^{1/p} \\ &< \varepsilon/2 + b_0^{1/p} \frac{\varepsilon}{2\, b_0^{1/p}} = \varepsilon,\end{aligned}$$

y como $g \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene $C_0^\infty(\Omega)$ denso en $L^p_\omega(\Omega)$.

Si Ω es un dominio no acotado, definimos

$$\Omega_n := \{x \in \Omega : \frac{1}{n} < d(x, \partial\Omega)\} \cap B(0, n)$$

y procedemos de la misma manera que en el caso Ω acotado. $\square$

Consideremos ahora el espacio $C_c^\infty(\Omega)$ de las funciones infinitamente derivables con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ restringidas a Ω, es decir

$$C_c^\infty(\Omega) := \{f : \text{ existe } g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } f = g|_\Omega\}.$$

Observación 7.3. Es claro que la sola condición $\omega \in \mathcal{M}(\Omega)$ es suficiente para tener $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p_\omega(\Omega)$. Sin embargo para que el espacio $C_c^\infty(\Omega) \subset L^p_\omega(\Omega)$ necesitamos además que $\omega \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$.

Lema 7.4. *Sea $\omega_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\omega_\alpha \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$. Entonces $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos $f \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $f = g|_\Omega$ con $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p \, \omega_\alpha(x) \, dx &= \int_{\Omega \cap \operatorname{sop} g} |D^\alpha g(x)|^p \, \omega_\alpha(x) \, dx \\ &\le \left(\sup_{x \in \Omega \cap \operatorname{sop} g} |g(x)|^p \right) \int_{\Omega \cap \operatorname{sop} g} \omega_\alpha(x) \, dx.\end{aligned}$$

Entonces, por ser $\operatorname{sop} g$ compacto, se tiene que $\Omega \cap \operatorname{sop} g \subset K \subset \overline{\Omega}$, para K compacto. Luego, por ser $\omega_\alpha \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$, resulta $D^\alpha f \in L^p_{\omega_\alpha}(\Omega)$ para cada α. $\square$

Se sigue de la Observación 7.1 y del Lema 7.4 el siguiente corolario.

Corolario 7.5. *Sea $\omega_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\omega_\alpha \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y $\omega_\alpha^{-1/(p-1)} \in L^1_{loc}(\Omega)$ para todo α con $|\alpha| \le 1$. Entonces*

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)} \subset W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega).$$

Sin embargo, las hipótesis del Corolario 7.5 no son en general suficientes para la igualdad de los espacios como muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 7.6. Sea $n = 2$, $p = 2$, $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ y $s > 1$

$$\omega(x) = \begin{cases} (\ln(2/|x|))^s & \text{para } x_1 x_2 > 0 \\ (\ln(2/|x|))^{-s} & \text{para } x_1 x_2 < 0 \end{cases}$$

y sea $\omega_\alpha = \omega$ para todo α con $|\alpha| \le 1$.

Observemos que $\omega \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y por lo tanto $\omega^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces, por el Corolario 7.5, $\overline{C^\infty_c(\Omega)} \subset W^{1,p}_\omega(\Omega)$ y sin embargo $\overline{C^\infty_c(\Omega)} \neq W^{1,p}_\omega(\Omega)$. En efecto, en coordenadas porlares sea

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x_1 > 0 \text{ y } x_2 > 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \text{para } x_1 < 0 \text{ y } x_2 > 0 \\ 0 & \text{para } x_1 < 0 \text{ y } x_2 < 0 \\ \cos\theta & \text{para } x_1 > 0 \text{ y } x_2 < 0. \end{cases}$$

Se tiene $u \in W^{1,p}_\omega(\Omega)$ y $u \notin \overline{C^\infty_c(\Omega)}$ (ver [**Zhi98**]).

Observemos que este ejemplo nos dice que el resultado del Teorema 7.2 es falso si no consideramos hipótesis adicionales sobre ω (como por ejemplo la de acotación sobre compactos considerada).

Mencionamos a continuación resultados conocidos que dan condiciones sobre los pesos ω_α para que $\overline{C^\infty_c(\Omega)} = W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)$.

• El espacio de Sobolev clásico, correspondiente a $\omega_\alpha = 1$ para todo α con $|\alpha| \leq 1$, para Ω un dominio Lipschitz (ver por ejemplo [**Ada75**]).

• Por supuesto, si existen constantes positivas a_α, b_α tales que $a_\alpha \leq \omega_\alpha(x) \leq b_\alpha$ para casi todo $x \in \Omega$ para todo α con $|\alpha| \leq 1$, el espacio $W^{1,p}_{\omega_\alpha}(\Omega)$ es equivalente al espacio de Sobolev clásico.

• Si $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$, Ω un dominio (ε, δ) (ver [**Chu92**]). (Observar que $\omega \in L^1_{loc}(\Omega)$ y la condición $A_p(\mathbb{R}^n)$ implican $\omega^{-1/(p-1)} \in L^1_{loc}(\Omega)$, pero no podemos asegurar que $\omega \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$. Por lo tanto no estamos necesariamente en las hipótesis del Corolario 7.5).

• Si $\omega(x) = d(x)^\beta$ con $\beta > -1$ y Ω un dominio Lipschitz (ver [**Kuf85**]). (Observar que en este caso $\omega(x)$ está en las hipótesis del Corolario 7.5).

Capítulo 8

Sobre problemas de Cauchy bien planteados

Dadas funciones adecuadas f y g sobre Ω, consideramos el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_{tt}u + Au = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u(0,\cdot) = f & \text{en } \Omega \\ \partial_t u(0,\cdot) = g & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde

$$A = -\frac{1}{m} \operatorname{div} M \nabla \ . \tag{8.1}$$

Definimos el espacio de Hilbert

$$H = \{\varphi \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_\Omega |\varphi(x)|^2 m(x) d\mu < \infty\}, \tag{8.2}$$

donde $d\mu$ es la medida de Lebesgue y definimos el espacio energía

$$\mathcal{E} = \{\varphi \in H : D^\alpha \varphi \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ y } b(\varphi,\varphi) < \infty\}, \tag{8.3}$$

donde

$$b(\varphi,\nu) = \int_\Omega M(x) \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \nu(x) \, d\mu, \tag{8.4}$$

para φ, ψ adecuados, equipado con la norma

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{E}} := b(\varphi,\varphi) + \|\varphi\|^2_H.$$

Sabemos que para que el problema de Cauchy este bien planteado necesitamos analizar si el operador A es esencialmente autoadjunto, y si no lo es, cuales son las condiciones de borde apropiadas para poder elegir una única extensión autoadjunta.

En [**GSST10**] los autores analizan ejemplos del problema de Cauchy para la propagación de ondas en algunos espacios tiempos estáticos con singularidades, los cuales llevan a operadores como los definidos en (8.1) que no son esencialmente autoadjuntos y carece de sentido tanto físico como matemático dar condiciones de borde (las singularidades del espacio están en el borde del dominio y esto se traduce en una singularidad en el operador A).

Más precisamente, en dichos ejemplos observan que, a pesar de no ser el operador A esencialmente autoadjunto y aún en ausencia de condiciones de borde, el problema está bien planteado siempre que la solución tenga energía finita.

Motivados por esos ejemplos caracterizan cuándo existe una única extensión autoadjunta del operador A con dominio incluído en el espacio de energía.

Para una mejor comprensión mencionamos algunos de los resultados principales de este trabajo que luego extenderemos a otro tipo de dominios.

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, y sea A el operador de la forma

$$A = -\frac{1}{m} \operatorname{div} M \nabla, \tag{8.5}$$

donde $M = (m_{ij})$ es una matriz de $(n+1) \times (n+1)$.

Suponemos:

- (H1) para todo $(x,z) \in \Omega$, $m(x,z) > 0$ y $M(x,z) = M(x,z)^t > 0$
- (H2) $m \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y $m \in C^\infty(\Omega)$
- (H3) $m_{ij} \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y $m_{ij} \in C^\infty(\Omega)$ para $i, j = 1, ..., n+1$.

Consideremos el espacio H y $\mathcal{E}$ definidos en (8.2) y (8.3), luego, el operador A esta definido en $C_0^\infty(\Omega)$ y por (H1) resulta simétrico en H. Como $m \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y $m_{ij} \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ se sigue que $C_c^\infty(\Omega)$ esta incluído en H y $\mathcal{E}$.

Se pide además

- (H4) $C_c^\infty(\Omega)$ denso en H y $\mathcal{E}$.

Observación 8.1. Bajo estas hipótesis $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en H. Por lo tanto el operador $A : C_0^\infty(\Omega) \subset H \longrightarrow H$ está bien definido en H.

Definición 8.2. Decimos que A tiene la propiedad alternativa para que el problema de Cauchy esté bien planteado (que denotaremos *awpp* por su nombre en inglés: alternative well posedness property), si existe una única extensión autoadjunta para A con dominio contenido en el espacio energía $\mathcal{E}$.

Teorema 8.3. *Sea A el operador dado por (8.5) cumpliendo (H1-H4).*

1. *Supongamos que A tiene la propiedad* awpp. *Entonces, para todo conjunto medible Γ en $\mathbb{R}^n$ con $\mu(\Gamma) \neq 0$ se tiene*

$$\int_0^1 \int_\Gamma \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} dx\, dz = \infty.$$

2. *Supongamos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe una bola abierta B que contiene a x tal que*

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega_B(z)} dz = \infty,$$

donde $\omega_B(z) = \int_B m_{n+1,n+1}(y,z)dy$. Entonces A tiene la propiedad awpp.

Corolario 8.4. *Supongamos, además de las condiciones del punto 2. del Teorema 8.3, que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\rho > 0$ tal que*

$$\sup_{z\leq 1} \left(\int_{B(x,\rho)} m_{n+1,n+1}(y,z)dy \right) \left(\int_{B(x,\rho)} \frac{1}{m_{n+1,n+1}(y,z)} dy \right) < \infty. \tag{8.6}$$

Entonces A tiene la propiedad awpp *si y sólo si, para toda bola B en $\mathbb{R}^n$, se tiene*

$$\int_0^1 \int_B \frac{1}{m_{n+1,n+1}(y,z)} dy\, dz = \infty. \tag{8.7}$$

Para demostrar el Teorema 8.3, los autores en [**GSST10**] dan una caracterización de la propiedad *awpp*. Escribimos la demostración ya que este resultado es clave en la aplicación a la teoría de espacios de Sobolev con pesos que comenzamos a analizar en el Capítulo 7.

Lema 8.5. *El operador A cumple la* awpp *si y sólo si $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}_0$ es la clausura del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ en $\mathcal{E}$.*

Demostración. Supongamos que A tiene la *awpp* y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_0$ los operadores autoadjuntos asociados con la forma b dada por (8.4) definidos en $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_0$ respectivamente.

Ambas son extensiones del operador A con dominio incuído en $\mathcal{E}$, y por lo tanto son iguales. Entonces, debe ser $D(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}) = D(\mathcal{A}_0^{\frac{1}{2}})$, es decir, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$.

Recíprocamente, si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, la única extensión autoadjunta de A con dominio en $\mathcal{E}$ es la extensión de Friedrichs. Pero la forma b definida en $\mathcal{E}$ es la clausura de la forma b definida en $C_0^\infty(\Omega)$ y el lema queda probado. $\square$

Este lema, nos permite ver el punto crucial en la *awpp*. Por ejemplo, si consideramos $A = \Delta$ en un dominio donde no es esencialmente autoadjunto, necesitamos poner condiciones de borde y en ese caso $\mathcal{E} = W^{1,2}(\Omega)$ y $\mathcal{E}_0 = W_0^{1,2}(\Omega)$ que obviamente no son el mismo espacio.

Se entiende entonces que la propiedad *awpp* dice que el menor espacio de energía posible es también el más grande, y por esta razón no son necesarias las condiciones de borde para obtener una única extensión autoadjunta en $\mathcal{E}$.

Observación 8.6. Como señalan los autores, es claro que las hipótesis (H1-H4) pueden debilitarse. Sin embargo, en el contexto del trabajo, fueron pedidas para evitar dificultades adicionales que no son esenciales para la comprensión de la *awpp*.

Usamos la teoría de espacios de Sobolev con pesos vista en el Capítulo 7 para debilitar las hipótesis de la siguiente manera:

- (H1) para todo $(x,z) \in \Omega$, $m(x,z) > 0$ y $M(x,z) = M(x,z)^t > 0$
- (H2) $m \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y supongamos que para todo compacto $K \subset \Omega$, existen constantes positivas a_K y b_K tales que $a_K \leq m(x,z) \leq b_K$ para casi todo $(x,z) \in K$
- (H3) $m_{ij} \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$, continuas y $m_{ij}^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Luego, por (H1) y (H2), A está bien definido con dominio denso en H, $D(A) = C_0^\infty(\Omega)$ como consecuencia del Teorema 7.2 y resulta simétrico en H.

Por (H2) y (H3) se tiene que $C_c^\infty(\Omega)$ esta incluído en el espacio energía $\mathcal{E}$.

Suponemos además

- (H4) $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $\mathcal{E}$ (ya que no es cierto en general que bajo (H1)-(H3), (H4) se cumpla).

De aquí en adelante tomaremos estas nuevas hipótesis sobre los coeficientes del operador A.

8.1. Extensión de la *awpp* a otro tipo de dominios

En esta sección extendemos el resultado anterior a otros dominios de $\mathbb{R}^{n+1}$.

• Sea

$$A = -\frac{1}{m}\operatorname{div} M\,\nabla \tag{8.8}$$

definido en $C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ donde $\Omega_\gamma := \{(x,z) : x \in \mathbb{R}^n, z > \gamma(x)\}$ con $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$.

Suponemos que se satisfacen las hipótesis (H1)-(H4) dadas en la Observación 8.6.

Definimos el espacio de Hilbert H_γ y el espacio de energía $\mathcal{E}_\gamma$ como en (8.2) y (8.3) respectivamente.

Con la idea de aplicar el Teorema 8.3 definimos la transformación lineal $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_\gamma$ dada por

$$\phi(y,w) = (y, w + \gamma(y)) = (x,z).$$

A la inversa de esta transformación la llamamos $\psi : \Omega_\gamma \longrightarrow \Omega$ y viene dada por

$$\psi(x,z) = (x, z - \gamma(x)) = (y,w),$$

cuya matriz Jacobiana es

$$[D\psi] = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & . \\ & & I & & . \\ & & & & 0 \\ -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} & . & . & -\frac{\partial\gamma}{\partial x_n} & 1 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

Definimos en Ω el operador

$$\tilde{A} := -\frac{1}{\tilde{m}} \operatorname{div} \tilde{M}\, \nabla, \tag{8.9}$$

donde:

1. $\tilde{m}(y, w) := (m \circ \phi)(y, w) = m(x, z)$
2. $\tilde{M}(y, w) := [D\psi](x, z)M(x, z)[D\psi]^T(x, z)$.

Se sigue de la definición de $\tilde{m}$ y $\tilde{M}$ que satisfacen las hipótesis (H1)-(H4) dadas en la Observación 8.6. Entonces $\tilde{A}$ está bien definido, $\tilde{A} : D(\tilde{A}) = C_0^\infty(\Omega) \subset H \longrightarrow H$ donde

$$H = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_\Omega |f(y, w)|^2 \tilde{m}(y, w) d\mu < \infty\},$$

y definimos

$$\mathcal{E} = \{f \in H \cap D^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega) : \tilde{b}(f, f) < \infty\},$$

donde

$$\tilde{b}(f, g) = \int_\Omega \tilde{M}(y, w)\, \nabla f(y, w) \cdot \nabla g(y, w)\, d\mu. \tag{8.10}$$

Dado que $\det [D\psi] = 1$, ψ define una isometría entre H y H_γ y entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_\gamma$.

Observación 8.7. Se sigue por construcción del operador $\tilde{A}$ y por las propiedades antes mencionadas, que existe una biyeccion entre los espacios $C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ y $C_0^\infty(\Omega)$. Entonces decir que A tiene la *awpp* es equivalente a decir que $\tilde{A}$ tiene la *awpp*.

Podemos ahora enunciar y demostrar el siguiente resultado.

Teorema 8.8. *Sea A el operador dado en (8.8) cumpliendo las hipótesis (H1)- (H4).*

1. *Supongamos que A tiene la propiedad* awpp. *Entonces, para todo conjunto medible D en $\mathbb{R}^n$ con $\mu(D) \neq 0$ se tiene*
$$\int_D \int_{\gamma(x)}^{\gamma(x)+1} \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} dz\, dx = \infty.$$
2. *Supongamos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe una bola abierta B que contiene a x tal que*
$$\int_0^1 \frac{1}{\omega_B(z)} dz = \infty,$$
donde $\omega_B(z) = \int_B (\Gamma M \Gamma^T)(s, z+\gamma(s)) ds$ con $\Gamma = (-\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, .., -\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}, 1)$. Entonces A tiene la propiedad awpp.

Demostración. 1. Supongamos que existe un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ con $\mu(D) \neq 0$ tal que

$$\int_D \int_{\gamma(x)}^{\gamma(x)+1} \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} dz\, dx < \infty. \tag{8.11}$$

Probaremos que $\mathcal{E}_\gamma \neq \mathcal{E}_{\gamma_0}$. Para ello, vemos que existe un funcional λ en $\mathcal{E}_\gamma$ que se anula en $\mathcal{E}_{\gamma_0}$ pero que no es el funcional nulo.

Llamemos $U_a = \{(x,z) : x \in D \text{ y } \gamma(x) < z < \gamma(x) + a\}$ y sea $\eta \in C_c^\infty(U_{1/2})$, donde $\eta = 1$ en $U_{1/4}$ y definimos
$$\lambda(\varphi) = \int_{U_1} \partial_z \left(\varphi(x,z)\, \eta(x,z)\right)\, d\mu.$$

• λ define un funcional lineal en $\mathcal{E}_\gamma$:

$$\begin{aligned}|\lambda(\varphi)| &= \left| \int_{U_1} \partial_z \varphi(x,z)\, \eta(x,z) + \varphi(x,z)\, \partial_z \eta(x,z)\, d\mu \right| \\ &\leq \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^{n+1}} |\eta(x,z)| \int_{U_1} |\partial_z \varphi(x,z)|\, d\mu + \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^{n+1}} |\partial_z \eta(x,z)| \int_{U_1 \setminus U_{1/2}} |\varphi(x,z)|\, d\mu.\end{aligned}$$

Ahora bien,
$$\begin{aligned}\int_{U_1} |\partial_z \varphi(x,z)|\, d\mu &= \int_{U_1} |\partial_z \varphi(x,z)|\, m_{n+1,n+1}^{1/2}(x,z) \frac{1}{m_{n+1,n+1}^{1/2}(x,z)} d\mu \\ &\leq \left(\int_\Omega |\partial_z \varphi(x,z)|^2 m_{n+1,n+1}(x,z) d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{U_1} \frac{1}{m_{n+1,n+1}(x,z)} d\mu \right)^{1/2} \\ &\leq C\, b(\varphi,\varphi)^{1/2},\end{aligned}$$

por (8.11) y definición de $b(\varphi,\varphi)$.

Además
$$\int_{U_1 \setminus U_{1/2}} |\varphi(x,z)|\, d\mu = \int_{U_1 \setminus U_{1/2}} |\varphi(x,z)|\, m^{1/2}(x,z) \frac{1}{m^{1/2}(x,z)} d\mu$$

$$\leq \left(\int_\Omega |\varphi(x,z)|^2 m(x,z) d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{U_1 \setminus U_{1/2}} \frac{1}{m(x,z)} d\mu \right)^{1/2}$$
$$\leq C \, \|\varphi\|_H,$$

ya que $U_1 \setminus U_{1/2} \subset \Omega$ y $m^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces existe una constante $C > 0$ talque $|\lambda(\varphi)| \leq C \, \|\varphi\|_{\mathcal{E}}$.

Obviamente si $\varphi \in C^\infty(\Omega)$

$$\lambda(\varphi) = \int_{U_1} \partial_z \left(\varphi(x,z) \, \eta(x,z) \right) \, d\mu = - \int_D \varphi(x, \gamma(x)) \, dx.$$

Luego como $\lambda(\varphi) = 0$ para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y λ es un funcional continuo, $\lambda \,|_{\mathcal{E}_{\gamma_0}} \equiv 0$ pero no es el funcional nulo.

2. Supongamos que A no tiene la *awpp*. Entonces, por la Observación 8.7 y el Teorema 8.3

$$\int_0^1 \frac{1}{\tilde{\omega}_B(w)} dw < \infty.$$

Pero $\tilde{\omega}_B(w) = \int_B \tilde{m}_{n+1,n+1}(s,w) ds = \int_B (\Gamma M \Gamma^T)(s, w + \gamma(s)) ds = \omega_B(w)$. $\square$

Observación 8.9. Este resultado sigue siendo válido si tomamos $\gamma \in \mathcal{C}^1$.

- Consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^1$.

Notación 8.10. Cuando necesitamos hacer referencia a una coordenada i en particular, notamos $x = (x_1, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, .., x_{n+1}) = (\mathbf{x}, x_i)$ donde $\mathbf{x} = (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{n+1})$.

Para cada $X \in \partial\Omega$ existe un sistema de coordenadas locales (D_X, γ_X) donde $X = (\mathbf{x}, \gamma_X(\mathbf{x}))$; D_X un entorno local de X; $\gamma_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\Omega \cap D_X = \{(\mathbf{x}, x_i) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \gamma_X(\mathbf{x}) < x_i\} \cap D_X$$

$$\partial\Omega \cap D_X = \{(\mathbf{x}, x_i) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \gamma_X(\mathbf{x}) = x_i\} \cap D_X.$$

Entonces existen δ_X y ε_X tales que $\partial\Omega$ está contenido en la unión de conjuntos abiertos de la forma

$$V_X := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} := (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{n+1}) \in D_X \text{ y } \gamma_X(\mathbf{x}) - \delta_X < x_i < \gamma_X(\mathbf{x}) + \varepsilon_X\}.$$

Por ser $\partial\Omega$ compacto, podemos cubrirlo con finitos de estos conjuntos, es decir, existen finitos elementos $X^k \in \partial\Omega$ con $k = 1, ..., N$ tal que $\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^N V_{X^k}$.

Notación 8.11. Por simplicidad llamaremos V_k, ε_k, δ_k y γ_k a V_{X^k}, ε_{X^k}, δ_{X^k} y γ_{X^k} respectivamente.

Observación 8.12. $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^{N} V_k$ donde

$$V_k := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} := (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{n+1}) \in D_k \text{ y } \gamma_k(\mathbf{x}) \leq x_i < \gamma_k(\mathbf{x}) + \varepsilon\} \tag{8.12}$$

y $V_0 := \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{N} V_k$. Con este cubrimiento trabajamos a partir de ahora.

De la misma manera que en el caso $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ trabajamos con el operador de la forma

$$A = -\frac{1}{m} \text{ div } M \nabla,$$

donde m y M satisfacen (H1)-(H4) dadas en la Observación 8.6.

Definimos H y $\mathcal{E}$ como en (8.2) y (8.3) respectivamente.

Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.13. *Asumamos que A tiene la propiedad* awpp. *Entonces para cualquier conjunto U_δ de la forma*

$$U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} = (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{n+1}) \in D \subset \mathbb{R}^n \ y\ \gamma(\mathbf{x}) < x_i < \gamma(\mathbf{x}) + \delta\},$$

donde $\delta > 0$ tal que $U_\delta \subset \Omega$, $1 \leq i \leq n+1$ fijo y $\gamma : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función que parametriza localmente el borde de Ω, se tiene

$$\int_{U_\delta} \frac{1}{m_{i,i}(x)}\, d\mu = \infty.$$

Demostración. La demostración sigue de la misma forma que en 1. Teorema 8.8. $\square$

Observación 8.14. En particular, si $m_{i,i}^{-1} \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ para todo i con $1 \leq i \leq n+1$, entonces A no puede tener la *awpp*.

Recordemos que $\{V_k\}_{k=1}^{N}$ dado en la Observación 8.12 es un cubrimiento de $\partial\Omega$, entonces para todo $X \in \partial\Omega$, $X = (\mathbf{x}, \gamma_k(\mathbf{x}))$, donde $\mathbf{x} \in D_k$.

Teorema 8.15. *Supongamos que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $(\mathbf{x}, \gamma_k(\mathbf{x})) \in \partial\Omega$ existe una bola $B \subset D_k$ que contiene a $\mathbf{x}$ tal que*

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\omega_B(t)} dt = \infty, \tag{8.13}$$

donde

$$\omega_B(t) = \int_B (\Gamma M \Gamma^T)(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x},$$

con $\Gamma = (-\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}, ..., -\frac{\partial\gamma}{\partial x_{i-1}}, 1, -\frac{\partial\gamma}{\partial x_{i+1}}, ..., -\frac{\partial\gamma}{\partial x_{n+1}})$ *y* $0 < t < \varepsilon$, *donde* γ_k, D_k *y* x_i *corresponden al elemento* V_k *del cubrimiento de* Ω, $1 \leq k \leq N$.

Bajo estas hipótesis A tiene la propiedad awpp.

Demostración. Supongamos que A no tiene la *awpp*. Luego $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_0$, es decir, existe al menos un funcional $\lambda \in \mathcal{E}'$ talque $\lambda = 0$ en $\mathcal{E}_0$ y una función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\lambda(\varphi) \neq 0$.

Sea $\{\xi_k\}_{k=0}^N$ la partición de la unidad asociada a $\{V_k\}_{k=0}^N$. Luego, se tiene que

$$\varphi = \sum_{k=0}^N \varphi_k,$$

donde

- $\varphi_k := \varphi\, \xi_k$
- $\mathrm{sop}\,(\varphi_k) \subset V_k \cap \overline{\Omega}$
- $\sum_{k=0}^N \xi_k = 1.$

Como $\lambda(\varphi) = \sum_{k=0}^N \lambda(\varphi_k) = \sum_{k=1}^N \lambda(\varphi_k) \neq 0$, existe al menos un k tal que $1 \leq k \leq N$ y $\lambda(\varphi_k) \neq 0$. Supongamos sin perder generalidad que $\lambda(\varphi_k) = 1$ y

$$V_k = \{x \in \overline{\Omega} : \mathbf{x} = (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}) \in D \text{ y } \gamma_k(\mathbf{x}) \leq x_i < \gamma_k(\mathbf{x}) + \varepsilon\}.$$

Sea ahora la transformación $\phi_k : D \times (0, \varepsilon) \longrightarrow V_k$ dada por

$$\phi_k(y) := (\mathbf{y}, y_i + \gamma_k(\mathbf{y})), \tag{8.14}$$

y sea $\psi_k : V_k \longrightarrow D \times (0, \varepsilon)$ la transformación inversa de ϕ_k.

Definimos $g = f \circ \phi_k : D \times (0, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{E}$ y $\tilde{\lambda}$ como $\tilde{\lambda}(g) = \lambda(f_k)$ donde $f_k = f\xi_k$.

Sea

$$\tilde{\mathcal{E}}_k := \{g = f \circ \phi_k : \|g\|_{\tilde{\mathcal{E}}_k} < \infty\},$$

donde

$$\|g\|_{\tilde{\mathcal{E}}_k} := \|f_k\|_{\mathcal{E}}.$$

De esta manera $\tilde{\lambda}$ resulta un funcional lineal en $\tilde{\mathcal{E}}_k$. En efecto,

$$|\tilde{\lambda}(g)| = |\lambda(f_k)| \leq \|\lambda\|_{\mathcal{E}'} \|f_k\|_{\mathcal{E}}.$$

Dado $\mathbf{y} \in D$, sea $\zeta_0(\mathbf{y}) = (\varphi_k \circ \phi_k)(\mathbf{y}, 0)$ (recordemos que el elemento nulo se encuentra en la posición i-ésima) y definimos el espacio $E = \{\eta \in W^{1,2}_{loc}(0, \varepsilon_k) : \zeta_0 \otimes \eta \in \tilde{\mathcal{E}}_k\}$ que, con la norma $\|\eta\|_E = \|\zeta_0 \otimes \eta\|_{\tilde{\mathcal{E}}_k}$, resulta un espacio de Banach y $C^\infty_c(\Omega)$ es denso en E.

Sea $\eta \in C^\infty_c(0, \varepsilon)$ y $\zeta_k(y) := \eta(0)\,(\varphi_k \circ \phi_k) - \zeta_0 \otimes \eta$.

La función $\zeta_k \circ \psi_k$ (la "subida"de ζ_k) tiene las siguientes propiedades:

- sop $(\zeta_k \circ \psi_k) \subset K \subset \Omega$ donde K es un conjunto compacto. En efecto, para $x \in V_k \cap \partial\Omega$ se tiene $(\zeta_k \circ \psi_k)(x) = \zeta_k(\mathbf{y}, 0) = 0$
- $\zeta_k \circ \psi_k \in \mathcal{E}$.

Luego, $|\tilde{\lambda}(\zeta_k)| = |\lambda((\zeta_k \circ \psi_k)\xi_k)| = 0$ pues λ se anula en $\mathcal{E}_0$.

Entonces

$$\tilde{\lambda}(\zeta_0 \otimes \eta) = \tilde{\lambda}(\eta(0)\,(\varphi_k \circ \phi_k)) = \eta(0)\,\lambda(\varphi_k \xi_k) = \eta(0).$$

Por lo tanto

$$|\eta(0)| \leq \|\tilde{\lambda}\|\,\|\eta\|_E = \|\tilde{\lambda}\|\,\|\zeta_0 \otimes \eta\|_{\tilde{\mathcal{E}}_k}. \tag{8.15}$$

• Analizemos $\|\eta\|^2_E$: Como $\zeta_0 \otimes \eta \in \tilde{\mathcal{E}}_k$ existe una función $f \in \mathcal{E}$ tal que $\zeta_0 \otimes \eta = f \circ \phi_k$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \|\zeta_0 \otimes \eta\|^2_{\tilde{\mathcal{E}}_k} &= \|f_k\|^2_{\mathcal{E}} = b(f_k, f_k) + \|f_k\|^2_H \\ &= \int_{V_k \cap \overline{\Omega}} M(x)\ \mathrm{grad}\, f_k(x)\ \mathrm{grad}\, f_k(x)\, d\mu \\ &+ \int_{V_k \cap \overline{\Omega}} |f_k(x)|^2\, m(x)\, d\mu. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Definimos

1. $\tilde{m}(\mathbf{y}, y_i) := (m \circ \phi_k)(\mathbf{y}, y_i) = m(\mathbf{x}, x_i)$
2. $\tilde{M}(\mathbf{y}, y_i) := [D\psi_k](\mathbf{x}, x_i) M(\mathbf{x}, x_i) [D\psi_k]^T(\mathbf{x}, x_i)$.

Entonces, con el cambio de variables $\phi_k(y) = x$ se puede escribir

$$\begin{aligned} (8.16) &= \int_{D\times(0,\varepsilon)} \tilde{M}(y)\ \mathrm{grad}\,(\zeta_0 \otimes \eta)(y)\ \mathrm{grad}\,(\zeta_0 \otimes \eta)(y)\, d\mu + \int_{D\times(0,\varepsilon)} |\zeta_0 \otimes \eta(y)|^2\, \tilde{m}(y)\, d\mu \\ &= \int_0^\varepsilon \tilde{\omega}(y_i)\, \eta'(y_i)^2\, dy_i + \int_0^\varepsilon \tilde{\beta}(y_i)\, \eta'(y_i)\, \eta(y_i)\ dy_i + \int_0^\varepsilon (\tilde{\alpha}(y_i) + \tilde{c}(y_i))\, \eta(y_i)^2\ dy_i, \end{aligned}$$

para

$$\tilde{\omega}(y_i) = \int_D \tilde{m}_{i,i}\, \zeta_0^2\, d\mathbf{y}$$

$$\tilde\beta(y_i) = 2\int_D \sum_{k\neq i} \tilde m_{k,i}\,\zeta_0\,\partial_k\zeta_0\,d\mathbf{y}$$

$$\tilde\alpha(y_i) = \int_D \tilde M'\ \operatorname{grad}\zeta_0\ \operatorname{grad}\zeta_0\,d\mathbf{y}$$

$$\tilde c(y_i) = \int_D |\zeta_0|^2\,\tilde m\,d\mathbf{y},$$

y donde la matriz $\tilde M'$ es la matriz $\tilde M$ sin la fila y columna i-ésima.

Reemplazando en (8.15) y por ser M definida positiva se tiene $\tilde\beta(y_i) \le 2\sqrt{\tilde\alpha(y_i)\,\tilde\omega(y_i)}$ para todo y_i y entonces

$$|\eta(0)|^2 \le C\left(\int_0^\varepsilon \tilde\omega(y_i)\,\eta'(y_i)^2\,dy_i + \int_0^\varepsilon (\tilde\alpha+\tilde c)(y_i)\,\eta^2(y_i)\,dy_i\right).$$

Luego,

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{\tilde\omega(y_i)}dy_i < C.$$

Pero, para toda bola B que contenga al soporte de ζ_0,

$$\tilde\omega(y_i) = \int_D \tilde m_{i,i}(\mathbf{y},y_i)\,\zeta_0(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \le C\int_B \tilde m_{i,i}(\mathbf{y},y_i)\,d\mathbf{y} =: \tilde\omega_B(y_i),$$

y entonces

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{\tilde\omega_B(y_i)}dy_i < C. \tag{8.17}$$

• Particionando $\mathbb{R}^n$ como en la demostración del Teorema 8.3 en el caso $\Omega = \mathbb{R}^n\times(0,\infty)$, se obtiene que $\exists\mathbf{y}\in D$ tal que para toda bola $B\subset D$ que contenga a $\mathbf{y}$ se tiene

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{\tilde\omega_B(y_i)}dy_i < \infty.$$

En efecto, para cada $j\ge 0$, sea $\{\xi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ una partición de la unidad tal que $\operatorname{sop}\xi_{j,k}\subset B(k\,2^{-j},\sqrt{n}\,2^{-j}) := B_{j,k}$.

Sea $j=0$: como $\varphi = \sum_k \varphi\,\xi_{0,k}$, con $\operatorname{sop}\xi_{0,k}\subset B(k,\sqrt{n})$ y $\lambda(\varphi)\neq 0$, entonces existe al menos un k_0 tal que $\lambda(\varphi\,\xi_{0,k_0})\neq 0$. Luego, $B_{0,k_0} = B(k_0,\sqrt{n})$ contiene al soporte de $\varphi\,\xi_{0,k_0}$ y se tiene (8.17) para $B = B_{0,k_0}$.

Ahora definimos $\varphi_0 = \varphi\,\xi_{0,k_0}$.

Sea $j=1$: como $\varphi_0 = \sum_k \varphi_0\,\xi_{1,k}$, existe al menos un k_1 tal que $\lambda(\varphi_0\,\xi_{1,k_1})\neq 0$. Luego se tiene (8.17) para $B = B_{1,k_1}$. Observar que $B_{1,k_1}\subset B_{0,k_0}$.

En forma inductiva, se construye una suceción de bolas para las cuales vale (8.17). El punto $\mathbf{y}\in D$ que estamos buscando es la intersección de estas bolas.

- Pero, por la definición de $\tilde{M}$,

$$\tilde{m}_{i,i}(\mathbf{y}, y_i) = (\Gamma \ M \ \Gamma^T) \circ \phi_k(\mathbf{y}, y_i) = (\Gamma \ M \ \Gamma^T)(\mathbf{y}, y_i + \gamma_k(\mathbf{y}))$$

donde $\Gamma = (-\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, ..., -\frac{\partial \gamma}{\partial x_{i-1}}, 1, -\frac{\partial \gamma}{\partial x_{i+1}}, ..., -\frac{\partial \gamma}{\partial x_{n+1}})$.

Entonces

$$\tilde{\omega}_B(y_i) = \int_B \tilde{m}_{i,i}(\mathbf{y}, y_i)\, d\mathbf{y} = \int_B (\Gamma \ M \ \Gamma^T)(\mathbf{y}, y_i + \gamma_k(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} = \omega_B(y_i)$$

y se tiene que $\exists \mathbf{x} \in D$ tal que para toda bola $B \subset D$ que contenga a $\mathbf{x}$

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{\omega_B(y_i)} dy_i < \infty.$$

□

Del teorema se desprende el siguiente corolario que nos da una equivalencia para la propiedad *awpp*.

Corolario 8.16. *Asumamos que para* $\mathbf{x} \in D_k$ *existe* $\rho > 0$ *tal que* $B(\mathbf{x}, \rho) \subset D_k$ *y*

$$\sup_{0 < x_i \leq \varepsilon} \left(\int_{B(\mathbf{x},\rho)} (\Gamma M \Gamma^T)(\mathbf{x}, x_i + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \right) \left(\int_{B(\mathbf{x},\rho)} \frac{1}{m_{i,i}(\mathbf{x}, x_i + \gamma_k(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x} \right) < \infty. \tag{8.18}$$

Entonces A tiene la propiedad awpp *si y sólo si para toda bola $B \subset D_k$ con $\mathbf{x} \in B$*

$$\int_0^\varepsilon \int_B \frac{1}{m_{i,i}(\mathbf{x}, x_i + \gamma_k(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}\, dx_i = \infty. \tag{8.19}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Spongamos que A tiene la *awpp* luego, por el Teorema 8.13

$$\int_{U_\delta} \frac{1}{m_{i,i}(x)}\, d\mu = \infty, \tag{8.20}$$

para todo conjunto de la forma $U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} = (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{n+1}) \in D \subset \mathbb{R}^n$ y $\gamma(\mathbf{x}) < x_i < \gamma(\mathbf{x}) + \delta\}$, donde γ es la función que parametriza localmente el borde de Ω.

Luego, escribimos (8.20) como una integral en variables separadas y haciendo el cambio de variables $x_i = t + \gamma_k(\mathbf{x})$ en la integral interior se tiene

$$\begin{aligned}\int_{U_\delta} \frac{1}{m_{i,i}(x)}\, d\mu &= \int_D \int_{\gamma(\mathbf{x})}^{\gamma(\mathbf{x})+\delta} \frac{1}{m_{i,i}(\mathbf{x}, x_i)}\, dx_i\, d\mathbf{x} \\ &= \int_0^\delta \int_D \frac{1}{m_{i,i}(\mathbf{x}, x_i + \gamma(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}\, dx_i = \infty.\end{aligned}$$

Pero esto es válido para cualquier conjunto U_δ, en particular si tomamos $D = B \subset D_k$, $\gamma = \gamma_k$ y $\delta = \varepsilon$. La implicación queda probada.

$\Leftarrow$) De la condición (8.18) tenemos que para $\mathbf{x} \in D_k$ existe ρ y una constante positiva C tal que

$$(8.21) \qquad \int_{B(\mathbf{x},\rho)} \frac{1}{m_{i,i}(\mathbf{x}, x_i + \gamma_k(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x} \le C \left(\int_{B(\mathbf{x},\rho)} (\Gamma M \Gamma^T)(\mathbf{x}, x_i + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Luego, por (8.19) con $B = B(\mathbf{x}, \rho)$

$$\int_0^{\varepsilon} \int_B \frac{1}{m_{i,i}(\mathbf{x}, x_i + \gamma_k(\mathbf{x}))}\, d\mathbf{x}\, dx_i = \infty$$

y se tiene junto con (8.21) que, para $\mathbf{x} \in D_k$ existe una bola B que contiene a $\mathbf{x}$ que definimos como $B(\mathbf{x}, \rho)$ tal que

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\omega_B(x_i)} dx_i = \infty,$$

donde

$$\omega_B(x_i) = \int_B (\Gamma M \Gamma^T)(\mathbf{x}, x_i + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x},$$

para $0 < x_i < \varepsilon$. Entonces, por el Teorema 8.15, se tiene que A tiene la *awpp*, como queríamos probar. $\square$

Observación 8.17. Existen condiciones sobre la matriz M que aseguran que A cumple la *awpp*. Por ejemplo si la condición (8.13) se satisface tomando

$$\omega_B(x_i) = \int_B m_{max}(\mathbf{x}, x_i + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x},$$

donde $m_{max}(x) := \max_{1 \le i,j \le n+1} m_{i,j}(x)$. Entonces A tiene la propiedad *awpp*.

En efecto, sea $\Gamma = (-\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, ..., -\frac{\partial \gamma}{\partial x_{i-1}}, 1, -\frac{\partial \gamma}{\partial x_{i+1}}, ..., -\frac{\partial \gamma}{\partial x_{n+1}})$. Luego, como por se M simétrica

$$\Gamma\ M\ \Gamma^T = \frac{\Gamma\ M\ \Gamma^T}{\|\Gamma\|^2} \|\Gamma\|^2 \le \rho(M)\, \|\Gamma\|^2,$$

donde

$$\rho(M) := \lambda_{max}(M) \le \|M\|_1 \le (n+1) \max_{1 \le i,j \le n+1} m_{i,j}$$

para $\lambda_{max}(M)$ el máximo autovalor de M y $\|M\|_1 = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|_1$.

Finalmente, como γ es suave $\|\Gamma\|^2 \le C$ y

$$(\Gamma\ M\ \Gamma^T) \circ \phi(\mathbf{y}, y_i) \le C\, (m_{max} \circ \phi_k)(\mathbf{y}, y_i) = C\, m_{max}(\mathbf{x}, x_i).$$

Si bien esta condición en general resulta mucho más fuerte, puede ser de utilidad, por ejemplo, en algunas matrices donde la función m_{max} sea uno de los elementos de la matriz.

8.2. Aplicación en espacios de sobolev con pesos

En esta sección aplicaremos los resultados de la sección anterior para estudiar la densidad de las funciones suaves a soporte compacto en espacios de Sobolev con pesos. En particular, consideraremos dos familias importantes de pesos: $A_2(\mathbb{R}^n)$ y potencias de la función distancia al borde.

Sea $W^{1,2}_{\omega_\alpha}(\Omega)$ el espacio de Sobolev definido en el Capítulo 7 y supongamos que $\omega_\alpha = \omega$ para todo α con $|\alpha| \leq 1$. Si consideramos el operador A definido en (8.1) donde M es la matriz diagonal con $m_{i,i} = \omega$ y $m = \omega$, entonces el espacio de energía asociado es $\mathcal{E} = W^{1,2}_{\omega}(\Omega)$ y $\mathcal{E}_0 = W^{1,2}_{\omega,0}(\Omega)$.

Teorema 8.18. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^1$. Supongamos $\omega \in A_2(\mathbb{R}^n)$ y continua en Ω. Entonces*

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W^{1,2}_{\omega}(\Omega).$$

Demostración. Recordemos que si $\omega \in A_2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que ω y $\omega^{-1} \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ y

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{-1}\,dx\right) \leq C$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Además vimos al final del Capítulo 7 que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{1,2}_{\omega}(\Omega)$. Entonces el operador asociado A satisface (H1)-(H4), y por la Observación 8.14, el operador A no puede tener la *awpp*, es decir

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W^{1,2}_{\omega}(\Omega).$$

□

Teorema 8.19. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con $\Omega \in \mathcal{C}^1$. Entonces*

1. *Si $a \geq 1$ entonces $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$.*
2. *Si $-1 < a < 1$ entonces $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$.*

Demostración. 1. Si $a \geq 1$ se tiene que $d^a \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$, es continua en Ω, $d^{-a} \in L^1_{loc}(\Omega)$ y también $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$ (ver [**KO84**]).

Luego, el operador A asociado satisface (H1)-(H4) y entonces basta probar que se cumple la condición (8.13) dada en el Teorema 8.15. En particular, podemos verificar las hipótesis más fuertes dadas por la Observación 8.17.

Analizamos

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{\omega_B(t)}dt = \infty,$$

donde

$$\omega_B(t) = \int_B m_{max}(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$$

y en este caso $m_{max}(x) := \max_{1 \le i,j \le n+1} m_{i,i}(x) = d(x)^a$.

Por ser la función distancia al borde Lipschitz, se tiene en cada V_k de la partición dada en la Observación 8.12 y para $X_0 \in \partial\Omega$

$$d^a(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x})) = [d(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x})) - d(X_0)]^a \le |(\mathbf{x}, t + \gamma_k(\mathbf{x})) - X_0|^a.$$

Entonces, si tomamos $X_0 = (\mathbf{x}, \gamma_k(\mathbf{x}))$ se tiene $d^a(x) \le |t|^a$ y

$$\omega_B(t) \le \int_B |t|^a\, d\mathbf{x} = C\ |t|^a.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{\omega_B(t)} dt \ge \int_0^\varepsilon \frac{1}{|t|^a} dt = \infty$$

para $a \ge 1$, es decir $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$.

2. Si $-1 < a < 1$, se tiene por Teorema 4.1 que $d^a \in A_2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por el Teorema 8.18, $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subsetneq W^{1,2}_{d^a}(\Omega)$. □

En general si tenemos un espacio de Sobolev dado por $W^{1,2}_{\omega_\alpha}(\Omega)$, podemos asociarle el operador A definido en (8.1) con M una matriz diagonal, donde $m_{i,i} = \omega_{\alpha_i}$ para $\alpha_i = e_i$ y $m = \alpha_0$. Es claro entonces que el espacio energía $\mathcal{E}$ es $W^{1,2}_{\omega_\alpha}(\Omega)$ y el correspondiente $\mathcal{E}_0$ resulta ser $W^{1,2}_{\omega_\alpha,0}(\Omega)$.

Luego, si Ω es un dominio como en el Teroema 8.3, podemos caracterizar los pesos ω_α de manera que el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ sea denso en $W^{1,2}_{\omega_\alpha}(\Omega)$, es decir, $W^{1,2}_{\omega_\alpha}(\Omega) = W^{1,2}_{\omega_\alpha,0}(\Omega)$.

Teorema 8.20. *Sea $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ y sea $W^{1,2}_{\omega_\alpha}(\Omega)$ el espacio de Sobolev con pesos ω_α donde*

- *$\omega_\alpha > 0$ y $\omega_\alpha \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ para todo α con $|\alpha| \le 1$,*
- *si $|\alpha| = 0$, ω_α satisface que, para todo compacto $K \subset \Omega$, existen constantes positivas a_K y b_K tales que $a_K \le \omega_\alpha(x) \le b_K$ para casi todo $x \in K$,*
- *ω_α continua y $\omega_\alpha^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$ si $|\alpha| = 1$.*

Supongamos que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{1,2}_{\omega_\alpha}(\Omega)$ y supongamos además que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe una bola B que contiene a x tal que

$$\int_0^1 \frac{1}{\omega_B(z)}\, dz = \infty, \tag{8.22}$$

donde $\omega_B(z) = \int_B \omega_\alpha(y,z)\, dy$, con $\alpha = (0, ..., 0, 1)$. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{1,2}_{\omega_\alpha}(\Omega)$.

Observación 8.21. El resultado sigue siendo válido tanto para $\Omega = \Omega_\gamma$ como para Ω un dominio acotado $\mathcal{C}^1$ reemplazando la hipótesis (8.22) por las dadas en el Teorema 8.8 y Teorema 8.15 respectivamente.

Bibliografía

[Ada75] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. 76

[ADL06] G. Acosta, R. G. Durán, and A. L. Lombardi, *Weighted Poincaré and Korn inequalities for Hölder α domains*, Math. Methods Appl. Sci. **29** (2006), no. 4, 387–400. 1, 34

[ADN59] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623–727. 1, 7, 8

[Agm65] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Prepared for publication by B. Frank Jones, Jr. with the assistance of George W. Batten, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 2, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965. 17

[BC98] H. Brezis and X. Cabré, *Some simple nonlinear PDE's without solutions*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **1** (1998), no. 2, 223–262. 41

[BK98] S. M. Buckley and P. Koskela, *New Poincaré inequalities from old*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **23** (1998), no. 1, 251–260. 33

[CB84] R. V. Churchill and J. W. Brown, *Complex variables and applications*, fourth ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1984. 54

[Chu92] S-K. Chua, *Extension theorems on weighted Sobolev spaces*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), no. 4, 1027–1076. 73, 76

[CS01] Ph. Clément and G. Sweers, *Uniform anti-maximum principle for polyharmonic boundary value problems*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 2, 467–474 (electronic). 40

[CZ52] A. P. Calderon and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139. 17

[DL06] R. G. Durán and A. L. Lombardi, *Finite element approximation of convection diffusion problems using graded meshes*, Appl. Numer. Math. **56** (2006), no. 10-11, 1314–1325. 1

[DS04a] A. Dall'Acqua and G. Sweers, *Estimates for Green function and Poisson kernels of higher-order Dirichlet boundary value problems*, J. Differential Equations **205** (2004), no. 2, 466–487. 9, 17, 23, 35, 38

[DS04b] ———, *On domains for which the clamped plate system is positivity preserving*, Partial differential equations and inverse problems, Contemp. Math., vol. 362, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 133–144. 9, 37, 41

[Gri85] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985. 1, 2, 51

[GS97] H-Ch. Grunau and G. Sweers, *Positivity for equations involving polyharmonic operators with Dirichlet boundary conditions*, Math. Ann. **307** (1997), no. 4, 589–626. 41

[GSST10] R. E. Gamboa Saravi, M. Sanmartino, and Ph. Tchamitchian, *An alternative well-posedness property and static spacetimes with naked singularities*, Classical and Quantum Gravity **27** (2010), no. 21, 215016. 2, 3, 77, 79

[GW82] M. Grüter and K-O. Widman, *The Green function for uniformly elliptic equations*, Manuscripta Math. **37** (1982), no. 3, 303–342. 9, 20

[Har06] P. Harjulehto, *Traces and Sobolev extension domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 8, 2373–2382 (electronic). 30

[KO84] A. Kufner and B. Opic, *How to define reasonably weighted Sobolev spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **25** (1984), no. 3, 537–554. 73, 90

[Kra67] J. P. Krasovskiĭ, *Isolation of the singularity in Green's function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 977–1010. 9

[Kuf85] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc., New York, 1985, Translated from the Czech. 76

[MM09] S. Mayboroda and V. Mazya, *Pointwise estimates for the polyharmonic green function in general domains*, arXiv:0903.1040v1 (2009). 57

[Muc72] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226. 7

[MV01] J. J. Manfredi and E. Villamor, *Traces of monotone functions in weighted Sobolev spaces*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 2, 403–422. 29, 32

[Nec67] J. Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967. 33

[Sou04] Ph. Souplet, *A survey on L^p_δ spaces and their applications to nonlinear elliptic and parabolic problems*, Nonlinear partial differential equations and their applications, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., vol. 20, Gakkōtosho, Tokyo, 2004, pp. 464–479. 2, 35, 37, 41, 44

[Sou05] ———, *Optimal regularity conditions for elliptic problems via L^p_δ-spaces*, Duke Math. J. **127** (2005), no. 1, 175–192. 41, 42

[Ste] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43. 7, 22

[Ste70] ———, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. 7

[Wid67] K-O. Widman, *Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations*, Math. Scand. **21** (1967), 17–37 (1968). 9, 18

[Zhi98] V. V. Zhikov, *On weighted Sobolev spaces*, Mat. Sb. **189** (1998), no. 8, 27–58. 76