UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Cotas y Estimaciones Asintóticas para Autovalores de Problemas Elípticos No Lineales

Autor: Juan Pablo Pinasco

Director: Ricardo G. Durán

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Buenos Aires, 2005

Título: Cotas y Estimaciones Asintóticas para Autovalores de Problemas Elípticos No Lineales.

Resumen

En este trabajo obtendremos cotas y estimaciones asintóticas para los autovalores $\{\lambda_k\}_k$ del p-Laplaciano unidimensional con una función peso $r(t)$:

$$-(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' = \lambda r(t)|u(t)|^{p-2}u(t),$$

con diferentes condiciones de borde.

Obtendremos una generalización de la teoría de Sturm Liouville basada en desigualdades integrales, que nos permitirá presentar una demostración de la desigualdad de Lyapunov. Con ésta obtendremos cotas inferiores óptimas para autovalores. Daremos otras demostraciones diferentes de esta desigualdad y distintas aplicaciones.

Para el problema con condición de borde Neumann y pesos indefinidos demostraremos que los autovalores variacionales son todos. También obtendremos curvas que contienen el espectro de Fučik, y daremos otra demostración de que para esta condición de borde las líneas triviales del espectro son aisladas, y que la segunda curva presenta una separación de los ejes en infinito.

Combinando métodos variacionales con la teoría de Sturm Liouville no lineal, obtendremos el desarrollo asintótico de la función $N(\lambda)$ definida como

$$N(\lambda) = \#\{k \ : \ \lambda_k \leq \lambda\}.$$

Calcularemos el primer término en el desarrollo de $N(\lambda)$ y daremos una estimación del segundo término. Aquí, Ω puede ser una unión infinita de intervalos disjuntos, en tal caso, $\partial\Omega$ tendrá una dimensión interior de Minkowski $d \in [0,1)$, y el desarrollo será:

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p}\int_\Omega r^{1/p}(t)\,dt + O(\lambda^{d/p}),$$

donde

$$\pi_p = 2(p-1)^{1/p}\int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}.$$

De este desarrollo obtendremos la siguiente fórmula asintótica para el k-ésimo autovalor,

$$\lambda_k \sim \left(\frac{\pi_p k}{\int_\Omega r^{1/p}(t)dt}\right)^p.$$

Extenderemos los resultados obtenidos para la función $N(\lambda)$ para pesos que cambian de signo y a distintos problemas singulares, tales como el comportamiento asintótico de los autovalores radiales en $\mathbb{R}^N$ de la ecuación

$$-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = (\lambda - q(|x|))|u|^{p-2}u,$$

y del problema radial en una bola.

Palabras claves: autovalores, cotas, estimaciones asintóticas, $p-$Laplaciano, Sturm Liouville, desigualdad de Lyapunov.

Title: Bounds and Asymptotic Estimations for the Eigenvalues of Non Linear Elliptic Problems.

Abstract

This work is concerned with eigenvalue bounds and the asymptotic behaviour of the eigenvalues $\{\lambda_k\}_k$ of the weighted p-laplacian equation,

$$-(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' = \lambda r(t)|u(t)|^{p-2}u(t),$$

with different boundary conditions (Dirichlet, Neumann, mixed), where $\Omega \subset \mathbb{R}$ is an open set, $1 < p < +\infty$, λ is the eigenvalue parameter, and $r(t)$ is a real function.

We develop a non linear Sturm-Liouville theory with integral inequalities on the weights instead of the classical pointwise conditions. We obtain from it a Lyapunov inequality, which in turns gives optimal lower bounds for the eigenvalues $\{\lambda_k\}_k$.

For the Neumann eigenvalue problem with indefinite weights, we prove that the variational eigenvalues exhaust the spectrum. Also, we consider the Fučik spectrum with the Neumann boundary condition, and we will show different proofs of the isolation of the trivial lines and the existence of a gap at infinity.

By combining variational methods and the non linear Sturm Liouville theory, we obtain the asymptotic expansion of $N(\lambda)$, the spectral counting function defined as

$$N(\lambda) = \#\{k \ : \ \lambda_k \leq \lambda\}.$$

We compute the first term and we give an estimation of the error term. Here, $\Omega = \cup_{j\in\mathbb{N}} I_j$, and $\partial\Omega$ has an associated fractal dimension $d \in [0, 1)$. We show that the growth of the error term depends on the interior Minkowski dimension d of $\partial\Omega$:

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p} \int_\Omega r^{1/p}(t)\, dt + O(\lambda^{d/p}),$$

where

$$\pi_p = 2(p-1)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}.$$

As a corollary, we obtain the asymptotic behavior of eigenvalues:

$$\lambda_k \sim \left(\frac{\pi_p k}{\int_\Omega r^{1/p}(t) dt} \right)^p.$$

We extend the previous results to general weights $r(t)$ which are allowed to change signs, and without continuity hypotheses. Also, we consider singular eigenvalue problems related to the asymptotic distribution of radial eigenvalues.

Key Words: eigenvalue bounds, asymptotic behavior of eigenvalues, $p-$ Laplacian, Sturm Liouville theory, Lyapunov inequality

Agradecimientos

Este bien podría ser el capítulo más largo de la tesis, de no ser por alguna involuntaria omisión. Quiero agradecerles aquí a los que colaboraron directa o indirectamente conmigo en estos años.

En primer lugar, a Ricardo Durán: por compartir su visión equilibrada de la belleza y de la utilidad de las matemáticas, sus conocimientos, su capacidad, su dedicación, su confianza... En estos años redescubrí un resultado ya obtenido por sus alumnos anteriores: además de ser un excelente director, se transforma en un gran amigo.

A Nacho Zalduendo, Pablo Solernó y Oscar Barraza, que me brindaron su apoyo cuando recién empezaba a investigar (esta tesis la comencé en el viejo departamento de Matemáticas de San Andrés). Al Conicet, y a sus jurados y evaluadores anónimos, por la beca doctoral; y a mis docentes del Departamento de Matemáticas de Exactas de la UBA, que contribuyeron a mi formación. También, a la gente del Instituto de Ciencias de la Universidad de General Sarmiento, donde se terminó de escribir: Gabriel, Esteban, Cristian, Alberto, Sebastián, Gabriel, Alejandra, Alberto, Lili, Claudio, y Alejandro.

A todo el grupo de ecuaciones diferenciales, por haberme brindado un entorno cómodo para la investigación: Gabriela, Irene, Pablo, Claudia, Ariel, Sandra, Noemí, y muy especialmente, a Julio y Julián. También a Carlos, Evelyn y Román, por haber puesto a mi disposición sus hemerotecas. De Exactas, quiero agregar a Juan Pablo, María José, Pablo, Marina, María Elena, Matías, Sigrid, Silvia, Bruno, Pablo, Marisol, y Tico.

En estos años me acompañaron 'on-line' Joy, Mariano, Hernán, Lucas, Jime, Singing, Habbi, Javier, GuilleBe, Pini, Markelo, Itn... no hubiese sido igual sin ellos (aunque nunca sabremos si hubiese sido mejor o peor).

Y dejé para el final a toda mi familia: a mis padres, a mi hermano Damián, y a mi esposa Selva. A ellos les dedico la tesis.

Índice general

Resumen ii

Abstract iii

Agradecimientos iv

Introducción 1
- Capítulo 1 . . . 2
- Capítulo 2 . . . 2
- Capítulo 3 . . . 4
- Capítulo 4 . . . 5
- Capítulo 5 . . . 9
- Capítulo 6 . . . 13
- Capítulo 7 . . . 14

Introduction 18
- Chapter 1 . . . 19
- Chapter 2 . . . 19
- Chapter 3 . . . 21
- Chapter 4 . . . 22
- Chapter 5 . . . 25
- Chapter 6 . . . 29
- Chapter 7 . . . 30

1. Resultados preliminares 33
- 1.1. El problema de autovalores . . . 33
  - 1.1.1. Caracterización variacional . . . 33
  - 1.1.2. Coeficientes constantes . . . 34
  - 1.1.3. La Transformada de Prufer . . . 35
  - 1.1.4. La ecuación de Riccati . . . 36
  - 1.1.5. Existencia de autovalores . . . 36
- 1.2. Algunas propiedades . . . 37
  - 1.2.1. Comparación y oscilación . . . 37
  - 1.2.2. Autovalor principal del Neumann . . . 38
  - 1.2.3. Condición de borde mixta . . . 39
  - 1.2.4. Problema de Steklov . . . 39
- 1.3. Otros resultados . . . 40
  - 1.3.1. Notación . . . 40
  - 1.3.2. Dimensión y contenido de Minkowski . . . 40
  - 1.3.3. Algunas desigualdades . . . 40

2. Desigualdades integrales **41**
2.1. Comparación y oscilación 41
2.2. Aplicaciones 43

3. La desigualdad de Lyapunov **46**
3.1. Primera demostración 46
3.2. Segunda demostración 47
3.3. Tercera demostración 48
3.4. Cuarta demostración 49
3.5. Generalizaciones 50
3.5.1. Soluciones que cambian de signo 50
3.5.2. Pesos indefinidos 51
3.5.3. Coeficientes no constantes 51
3.5.4. Emden Fowler 52
3.5.5. Sistemas resonantes 52

4. Aplicaciones de la desigualdad de Lyapunov **54**
4.1. Autovalores del problema con condición de borde Neumann . . . 54
4.2. Cotas inferiores óptimas de autovalores 57
4.3. El problema de autovalores de Fučik 61
4.4. Operadores monótonos en espacios de Orlicz 63

5. Estimaciones asintóticas de autovalores **66**
5.1. Sturm-Liouville bracketing 66
5.2. Dirichlet Neumann bracketing 68
5.3. La distribución asintótica de los autovalores 68
5.4. Autovalores de problemas singulares 70
5.4.1. Cota superior para $N(\lambda)$ 70
5.4.2. Cota inferior para $N(\lambda)$ 71
5.4.3. Demostración del Teorema 5.4.1 72

6. Autovalores radiales en $\mathbb{R}^N$ **73**
6.1. El problema de autovalores 73
6.2. Una formulación equivalente 74
6.3. Demostración del Teorema 6.1.1 74

7. Dominios con borde fractal **79**
7.1. Introducción 79
7.2. Conjuntos de medida infinita 81
7.3. Segundo término para pesos indefinidos 85
7.3.1. Pesos positivos 86
7.3.2. Pesos indefinidos. 88
7.4. Ejemplos 89
7.4.1. Desarrollo asintótico con N términos 89
7.4.2. Desarrollo irregular 89

Bibliografía **92**

Introducción

En esta tesis estudiaremos distintos problemas de autovalores para el $p-$Laplaciano unidimensional en un intervalo (a, b),

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u,$$

con diferentes condiciones de borde:

- $u(a) = u(b) = 0$ (Dirichlet)
- $u'(a) = u'(b) = 0$ (Neumann)
- $u'(a) = u(b) = 0$ (Mixto)

donde $1 < p < +\infty$, r es una función integrable que puede cambiar de signo, y λ es un parámetro real. También consideraremos uniones infinitas de intervalos, y problemas en la semirrecta.

Brevemente, digamos que el operador Δ_p,

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

generaliza al Laplaciano usual,

$$\Delta u = div(\nabla u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$

y aparece en modelos de fluídos no newtonianos, filtraciones en medios porosos, y en elasticidad no lineal, ver por ejemplo [9, 10, 61, 69] y sus referencias. Más allá de sus aplicaciones, su interés teórico es enorme y ha incentivado el crecimiento del análisis funcional no lineal.

Como el operador $p-$Laplaciano no es lineal, es necesario aclarar en qué sentido hablamos de autovalores. Por la homogeneidad de la ecuación, si una función u es solución para una constante λ, también lo es cualquier múltiplo escalar de u. Llamamos entonces a λ un autovalor de la ecuación, y a u una autofunción asociada.

Entre los primeros matemáticos que se ocuparon del problema de autovalores para el $p-$Laplaciano podemos citar a H. Amann, M. S. Berger, F. Browder, S. Fučik, y J. Necas [3, 8, 11, 32]. En estos trabajos se demostró que, al igual que en el caso lineal, existe al menos una sucesión discreta de valores $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ para los cuales existe una solución no trivial.

Sin embargo, existen grandes diferencias con el caso lineal: la falta de soluciones explícitas, desarrollos en series, o expresiones asintóticas, por ejemplo, o de funciones de Green, la falta de un desarrollo similar al de Fourier. Esto dificulta el estudio de los autovalores hasta el punto que no es posible probar en general que todo el espectro consiste en la sucesión $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, si bien este problema ha sido prácticamente resuelto en problemas unidimensionales (ver [33]).

La obtención de cotas para los autovalores ha sido otro problema difícil de tratar, las dos técnicas usadas han sido simetrización y teoremas de comparación. La caracterización variacional permite obtener cotas superiores usando funciones test apropiadas, pero las cotas inferiores presentan más dificultad.

Nuestro objetivo en este trabajo es encontrar cotas inferiores óptimas y estimaciones asintóticas para los autovalores del $p-$Laplaciano, en especial con coeficientes singulares. En gran parte, ha sido motivado por los problemas planteados en los trabajos de Antman y Riddell [6, 68] acerca de la falta de estimaciones para los autovalores en problemas que generalizan el estudiado por Kolodner [47],

$$-u'' = \frac{\lambda u}{\sqrt{t^2 + u^2}} \qquad u(0) = 0 = u'(L).$$

El problema linealizado para $\|u\| \to 0$ se puede resolver exactamente utilizando funciones de Bessel, pero para otros coeficientes no se sabe cómo estimarlos, y tampoco se conoce la dependencia de los autovalores respecto de la norma de la solución.

Capítulo 1

En este capítulo presentamos varios resultados generales sobre la existencia de autovalores. Por otro lado, si bien actualmente se prefiere la caracterización por medio de la teoría de Lyusternik Schnirelmann en la formulación de Amann [3], también es posible obtenerlos vía un cociente de Rayleigh, siguiendo la idea original de Browder. La equivalencia fue demostrada por Riddell [68].

A lo largo del trabajo necesitaremos una serie de resultados sobre los autovalores del p-Laplaciano con distintas condiciones de borde. Si bien la mayoría de ellos son conocidos, y otros se obtienen en forma inmediata de éstos, creemos conveniente incluírlos en el Capítulo 1 como fuente de referencia, ya que serán utilizados a lo largo de toda la tesis. Como ejemplo, podemos destacar los teoremas de comparación y oscilación (teoría de Sturm Liouville no lineal), las propiedades de simplicidad de los autovalores, la estructura nodal de las autofunciones, y las técnicas de la ecuación del Riccati y de la transformada de Prufer.

Estos resultados se encuentran en los trabajos de B. M. Brown, M. Cuesta, D. De Figueiredo, M. Del Pino, P. Drabek, J. García Azorero, T. Godoy, J. P. Gossez, Y. X. Huang, R. Manásevich, I. Peral Alonso, W. Reichel, W. Walter [1, 2, 12, 14, 15, 17, 21, 16, 34, 35, 38, 43, 75].

Capítulo 2

En este capítulo veremos una generalización al caso $p \neq 2$ de los Teoremas de Sturm de oscilación y comparación basados en desigualdades integrales en lugar de condiciones puntuales. Esta clase de teoremas fue introducida por Nehari [59] en relación a la existencia de soluciones no oscilatorias en $(0, +\infty)$ del problema

$$u'' + q(t)u = 0.$$

Consideremos los siguientes problemas:

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \Lambda\rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad u'(0) = u(L) = 0, \tag{0.0.1}$$

$$-(|v'|^{p-2}v')' = \lambda r(t)|v|^{p-2}v, \qquad v'(0) = v(L) = 0, \tag{0.0.2}$$

donde $\rho, r \in C([0,L])$ son funciones no negativas que satisfacen, para todo $t \in [0,L]$, la condición

$$\int_0^t r(x)dx \geq \int_0^t \rho(x)dx. \tag{0.0.3}$$

Se tiene el siguiente Teorema de Comparación:

Teorema 0.0.1. *Sea Λ_1 el primer autovalor del problema* (0.0.1) *y λ_1 el del problema* (0.0.2). *Entonces, si se satisface la condición* (0.0.3), *$\lambda_1 \leq \Lambda_1$, y la igualdad vale si y sólo si $r(t) = \rho(t)$.*

La demostración para el p-Laplaciano es esencialmente la misma de Nehari para el caso lineal, y consiste en integrar por partes en la formulación variacional del problema.

Por otra parte, se tiene el siguiente teorema de oscilación (el caso lineal se debe a Levin [53]):

Teorema 0.0.2. *Sea u una solución positiva de:*

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad -u'(0)/u(0) = \gamma \geq 0, \quad u(L) = 0,$$

y sea v una solución de:

$$-(|v'|^{p-2}v')' = \lambda r(t)|v|^{p-2}v, \qquad -v'(0)/v(0) = c \geq 0.$$

Si se cumple

$$c^{p-1} + \int_0^t r(t)dt \geq \gamma^{p-1} + \int_0^t \rho(t)dt \tag{0.0.4}$$

para todo $t \in [0,L]$, entonces v tiene un cero en $(0,L)$, a menos que $c = \gamma$ y $r(t) = \rho(t)$.

En este caso, la demostración se obtiene utilizando las técnicas de Levin vía la ecuación de Riccati.

Cuando los pesos satisfacen las desigualdades puntuales $r(t) \geq \rho(t)$, se tienen los teoremas clásicos de Sturm de comparación y oscilación. Para el p-Laplaciano fueron demostrados por Li y Yeh, y por Walter [54, 75], y valen para condiciones de borde más generales.

Veremos a continuación los siguientes resultados como ejemplos de aplicación de estos teoremas a problemas de autovalores:

Proposición 0.0.3 (Comparación de autovalores). *Sean $\alpha, \beta \in [0, \pi/2)$. Entonces, si $\beta > \alpha$, el primer autovalor λ_α del problema*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda_\alpha q(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0)\cos(\alpha) + u(0)\sin(\alpha) = 0 = u(L) \end{cases}$$

es menor o igual que el primer autovalor λ_β del mismo problema con la condición de borde

$$u'(0)\cos(\beta) + u(0)\sin(\beta) = 0 = u(L).$$

Proposición 0.0.4 (Convergencia de autovalores). *Sea $\rho_n(t) = 1 + |t|^n$, y $\lambda_{1,n}$ el primer autovalor del problema*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\rho_n(t)|u|^{p-2}u \\ u(-1) = 0 = u(1) \end{cases} \tag{0.0.5}$$

Entonces, $\lambda_{1,n} \to \frac{\pi_p^p}{2^p}$, el primer autovalor Dirichlet con $\rho = 1$.

Proposición 0.0.5 (Problemas extremales). *Sea $q(t) \in Q_m$, donde*

$$Q_m = \left\{ q \in C([0,L]) \ : \ \int_0^L q(t)dt = m \right\}$$

y $m > 0$. Entonces, el primer autovalor λ_1^q del problema

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda q(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0) = u(L) = 0 \end{cases} \tag{0.0.6}$$

satisface

$$\lambda_1^q > \frac{1}{mL^{p-1}}.$$

Esta cota inferior es óptima y no se alcanza para ningun peso $q(t) \in Q_m$.

Este resultado puede extenderse al problema con condición de borde Dirichlet de la siguiente forma:

Proposición 0.0.6. *Sea $q(t) \in Q_m$. Entonces, el primer autovalor λ_1^q del problema*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda q(t)|u|^{p-2}u \\ u(0) = 0 = u(L) \end{cases} \tag{0.0.7}$$

satisface

$$\lambda_1^q > \frac{2^p}{mL^{p-1}}.$$

Esta cota inferior es óptima y no se alcanza para ningun peso $q(t) \in Q_m$.

La demostración de este último resultado se obtiene utilizando el punto c donde la primera autofunción alcanza su máximo, descomponiendo luego el problema (0.0.6) en dos problemas mixtos en $(0, c)$ y (c, L) y aplicando la proposición anterior.

Capítulo 3

En este capítulo estudiaremos la desigualdad de Lyapunov para operadores no lineales. Esta desigualdad fue obtenida originalmente en [55] para el caso lineal $p = 2$, utilizando las soluciones explícitas de la ecuación, y ha sido demostrada de diversas maneras, ver por ejemplo los trabajos de Eliason, Harris y Kong, Patula, y Reid [23, 40, 60, 67]. Para el $p-$Laplaciano, fue obtenida independientemente en [52, 63].

Para la ecuación

$$-u'' = q(t)u,$$

esta desigualdad impone una condición para la existencia de una solución que se anule en dos puntos a y b:

$$\frac{4}{b-a} \leq \int_a^b q(t)dt.$$

La Proposición 0.0.5 nos permite extender la demostración al caso no lineal sin necesidad de utilizar soluciones explícitas, o funciones de Green:

Teorema 0.0.7. *Sea $q \in L^1(a,b)$, $q^+(t) = max\{q(t), 0\}$. Si existe una solución del problema*

$$-(|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{p-2}u, \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

entonces

$$\frac{2^p}{(b-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q^+(t)dt. \tag{0.0.8}$$

Veremos además otras tres demostraciones diferentes de esta desigualdad. En una utilizaremos la desigualdad de Holder, y la que sigue es completamente elemental y sólo se basa en integrar la ecuación. La última utiliza la desigualdad de Jensen, y se extiende para operadores monótonos quasilineares en espacios de Orlicz que generalizan el $p-$Laplaciano usual, ver [19].

Finalmente, consideraremos algunas extensiones. En primer lugar, estudiaremos la ecuación

$$-(s(t)|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{p-2}u, \quad u(a) = 0 = u(b),$$

y se tiene sin mayores cambios la desigualdad

$$\frac{2^p}{[\int_a^b s^{\frac{-1}{p-1}}(t)dt]^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt$$

(este resultado fue obtenido originalmente en [52]).

En segundo lugar, consideraremos el problema generalizado de Emden Fowler,

$$-(|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{\gamma-2}u, \quad u(a) = 0 = u(b),$$

donde $\gamma > 0$. Como aquí no hay homogeneidad en la ecuación, la desigualdad involucra además la norma infinito de la solución.

Posteriormente, generalizaremos la desigualdad al caso de un sistema resonante de ecuaciones ordinarias no lineales,

$$\begin{cases} -(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' &= f(t)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta} \\ -(|v'(t)|^{q-2}v'(t))' &= g(t)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \end{cases}$$

donde los parámetros positivos α, β satisfacen

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1.$$

Para este problema, se tiene la desigualdad

$$2^{\alpha+\beta} \leq (b-a)^{\frac{\alpha}{p'}+\frac{\beta}{q'}} \left(\int_a^b f^+(t)\,dt\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_a^b g^+(t)\,dt\right)^{\frac{\beta}{q}},$$

este resultado fue obtenido con P. de Napoli en [18] siguiendo los pasos de nuestra segunda demostración. Hasta donde sabemos, no hay resultados similares para sistemas aún en el caso lineal.

Cuando $p = 2$, es sabido que la desigualdad es óptima, en el sentido de que no puede reemplazarse el término $4/(b-a)$ por una constante mayor. Veremos que en el caso del p-Laplaciano la desigualdad es también óptima. Pero para esto, necesitaremos primero obtener cotas inferiores de los autovalores con condición de borde Dirichlet. Este problema será estudiado en el capítulo siguiente, pero su demostración se puede deducir también de la Proposición 0.0.6.

Capítulo 4

En este capítulo veremos distintas aplicaciones de la desigualdad de Lyapunov (0.0.7) a problemas de autovalores.

En primer lugar, consideraremos el problema de autovalores con condiciones de borde Neumann:

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \mu r(t)|u|^{p-2}u \\ u'(a) = 0 = u'(b). \end{cases} \tag{0.0.9}$$

donde el peso $r(t) \in L^\infty$. Si consideramos pesos que pueden cambiar de signo, en este caso existirá una doble sucesión de autovalores variacionales,

$$\sigma^+ = \{0 \le \mu_1^+ < \mu_2^+ < \dots\} \qquad \sigma^- = \{0 \ge \mu_1^- > \mu_2^- > \dots\}.$$

Cuando $r(t)$ cambia de signo, recordemos que hay un autovalor principal, en el sentido de que existe una única autofunción asociada al mismo (y sus múltiplos), que es positiva. Además, este autovalor principal es el único cuya autofunción asociada es positiva: toda otra autofunción, variacional o no, debe tener al menos un cero (ver [43]).

Para el problema de Dirichlet se sabe además que este autovalor es aislado: existe un entorno del mismo en el cual no hay otros autovalores. Esto permite definir el segundo autovalor como el ínfimo de los autovalores mayores que el primero, y la demostración se debe a Cuesta [14].

Sin embargo, para el problema de Neumann, si bien estos resultados parecen ser conocidos, resulta difícil encontrar sus demostraciones (ver al respecto [38]). Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 0.0.8. *El autovalor μ_1^+ es aislado; esto es, existe $\delta > 0$ tal que en el intervalo $(\mu_1^+; \mu_1^+ + \delta)$ no hay otros autovalores.*

La demostración está basada en la desigualdad de Lyapunov. Una vez obtenido este resultado, estamos en condiciones de formular la siguiente definición del segundo autovalor $\hat{\mu}_2$ del problema (0.0.9):

$$\hat{\mu}_2 = \min\{\mu \in \mathbb{R} : \mu > \mu_1^+ \text{ y } \mu \text{ es un autovalor}\}.$$

Siguiendo la demostración en [14], no es difícil demostrar ahora la siguiente proposición:

Proposición 0.0.9. *El autovalor $\hat{\mu}_2$ coincide con el segundo autovalor variacional μ_2^+ que se obtiene con la teoría de Lyusternik Schnirelman.*

Por último, tenemos:

Proposición 0.0.10. *El segundo autovalor es simple, y la autofunción correspondiente a μ_2^+ tiene un único cero.*

A partir de este resultado, se puede probar que los autovalores del problema Neumann son simples, se obtienen con el método de Lyusternik Schnirelman, y la n-ésima autofunción tiene n dominios nodales. Para la condición de borde Dirichlet con pesos positivos, este resultado se remonta a [33], y para pesos indefinidos, se encuentra en [4].

Teorema 0.0.11. *Todos los autovalores del problema* (0.0.9) *se obtienen con el método de Lyusternik Schnirelman. El n-ésimo autovalor μ_n^+ es simple, y la autofunción correspondiente a μ_n^+ tiene $n-1$ ceros en (a, b).*

Nuestro siguiente objetivo es encontrar cotas inferiores para los autovalores de distintos problemas. Las cotas superiores pueden obtenerse directamente en el cociente de Rayleigh con funciones test apropiadas, pero las inferiores son más difíciles de conseguir.

Para el problema de Dirichlet con $p = 2$, las cotas que aquí presentaremos se deben a Krein [49], quien las obtuvo como límite de un problema con pesos acotados entre dos constantes positivas y haciendo tender luego una a cero y la otra a infinito. Consideraremos el problema

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases} \tag{0.0.10}$$

en (a, b), y nuestro teorema principal es el siguiente:

Teorema 0.0.12. *Sea λ_n el $n-$ésimo autovalor del problema* (0.0.10). *Entonces,*

$$\frac{2^p n^p}{(b-a)^{p-1} \int_a^b r(t)dt} \leq \lambda_n. \tag{0.0.11}$$

Veremos además que esta cota es óptima:

Teorema 0.0.13. *Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ un número positivo. Existe una familia de funciones $r_{n,\varepsilon}$ tales que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\lambda_{n,\varepsilon} - \frac{2^p n^p}{(b-a)^{p-1} \int_a^b r_{n,\varepsilon}(t)dt} \right) = 0$$

donde $\lambda_{n,\varepsilon}$ es el $n-$ésimo autovalor de

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r_{n,\varepsilon}(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \tag{0.0.12}$$

La demostración del Teorema 0.0.12 es inmediata para el primer autovalor, ya que se reemplaza q por λr en la desigualdad de Lyapunov (0.0.7). Para los autovalores restantes, se repite el procedimiento en cada dominio nodal, y el resultado se obtiene aplicando la desigualdad (1.3.1).

La optimalidad de la cota se tiene utilizando los autovalores del problema de Steklov, y es interesante comparar éste resultado con la proposición (0.0.6). Observemos que aquel resultado -demostrado a partir de la teoría de Sturm Liouville con desigualdades integrales- se consigue ahora a partir de la desigualdad de Lyapunov, con lo cual se tiene una equivalencia entre el problema de minimizar el primer autovalor y la desigualdad de Lyapunov.

Para el problema con condiciones de borde Neumann se tiene la siguiente cota:

Teorema 0.0.14. *Sea μ_n el $n-$ésimo autovalor del problema* (0.0.9). *Entonces,*

$$\frac{2^p (n-1)^p}{(b-a)^{p-1} \int_a^b r(t)dt} \leq \mu_n.$$

Estos teoremas pueden extenderse sin mayor dificultad al caso de pesos indefinidos.

Por último, consideraremos los autovalores de Fučik en (a, b) con condición de borde Neumann,

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = r(t)[\alpha|u|^{p-2}u^+ - \beta|u|^{p-2}u^-] \\ u'(a) = 0 = u'(b) \end{cases} \tag{0.0.13}$$

donde $r(t) \in L^\infty$ puede cambiar de signo, $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Un par $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ es un autovalor de Fučik si el problema (0.0.13) tiene una solución no trivial $u\in H^1(a,b)$. Llamaremos Σ al conjunto de autovalores de Fučik.

Sea $r(t)>0$. Es claro que (μ_n,μ_n), $0\times\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\times 0$ pertenecen a Σ, donde μ_n es un autovalor del problema con condición de Neumann. Las rectas $0\times\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\times 0$ son llamadas las curvas triviales, y llamamos $\Sigma^*=\Sigma\setminus\{0\times\mathbb{R}\cup\mathbb{R}\times 0\}$. En este caso, $\Sigma\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$.

La primera curva Γ_1 se obtiene como el primer punto de intersección de Σ^* con una recta paralela a la diagonal $y=x$ pasando por el punto $(s,0)$ para cada $s\in\mathbb{R}$, una construcción introducida por Cuesta, de Figueiredo y Gossez en [15].

Cuando $r(t)\equiv 1$ y $p=2$, de Figueiredo y Gossez [16] probaron que las dos rectas $0\times\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\times 0$ eran aisladas en Σ. Además, probaron que la primera curva Γ_1 no es asintótica a cero, sino que permanecía separada de los ejes. Este hecho se conoce como la existencia de un gap en infinito, y es un fenómeno propio del problema Neumann unidimensional.

Veremos aquí una demostración diferente de la existencia del gap en infinito y de que las rectas triviales son aisladas. Esto será consecuencia de una separación entre Γ_1 y las rectas triviales que estimaremos utilizando la desigualdad de Lyapunov.

Teorema 0.0.1. *Sea $\int_a^b r(t)dt=m$. Existe una hipérbola $y=f(t)$ tal que $\beta\geq f(\alpha)$ para todo autovalor de Fučik $(\alpha,\beta)\in\Gamma_1$ del problema* (0.0.13). *Además,*

$$\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha)=\frac{1}{m(b-a)^{p-1}}.$$

El problema con pesos indefinidos fue considerado por Aziz y Gossez [1, 2], y en este caso existen curvas en todos los cuadrantes. En los cuadrantes $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^-$ existe al menos una doble sucesión infinita de curvas continuas que pasan por los autovalores $(\mu^\pm,\mu^\pm)$. La cantidad de curvas en los cuadrantes $\mathbb{R}^+\times R^-$, $\mathbb{R}^-\times R^+$ depende del número de cambios de signo del peso r. En este caso, el teorema 0.0.1 puede generalizarse de la siguiente forma:

Teorema 0.0.2. *Sea $(\alpha,\beta)\in\Sigma^*$, $\alpha>0$ y $m^+>0, m^->0$ definidos como:*

$$m^+=\int_a^b r^+(t)dt,\qquad m^-=\int_a^b r^-(t)dt.$$

(i) Si $\beta>0$, existe una hipérbola $y=f^+(t)$,

$$f^+(t)=\frac{1}{m^+(b-a)^{p-1}}\left(1+\frac{1}{m^+(b-a)^{p-1}t+1}\right),$$

tal que $\beta\geq f^+(\alpha)$.

(ii) Si $\beta<0$, existe una hipérbola $y=f^\pm(x)$,

$$f^\pm(t)=\frac{-1}{m(b-a)^{p-1}}\left(1+\frac{1}{m(b-a)^{p-1}t-1}\right),$$

tal que $\beta\leq f^\pm(\alpha)$.

Cambiando r por $-r$, el teorema se extiende facilmente al caso $\alpha<0$. Estos resultados se encuentran en [65].

Finalmente, mencionaremos el problema de autovalores:

$$-(\varphi(u'))'=\lambda q(t)\varphi(u)\qquad u(a)=0=u(b),$$

donde φ es una función impar, diferenciable, y no decreciente, que satisface

$$\varphi(0) = 0, \qquad \lim_{s \to +\infty} \varphi(s) = +\infty.$$

Diremos que una función $u \in C^1(a,b)$ es una solución si $\varphi(u')$ es absolutamente continua y se satisface la ecuación en casi todo punto.

El problema de la existencia de un primer autovalor ha sido estudiado en $\mathbb{R}^n$ (con técnicas muy diferentes) en García Huidobro, Manásevich, Le y Schmitt [36], Gossez y Manásevich [39], Mustonen y Tienari [57], y Tienari [71]. En estos trabajos se prueba la existencia de un autovalor principal, cuya autofunción asociada es positiva.

La pérdida de homogeneidad de la ecuación nos obliga a hablar de un autovalor $\lambda_1^{(\mu)}$, donde μ indica la restricción $\{u : \int_a^b q(t)\Phi(u)dt = \mu\}$. Un problema interesante es decidir si

$$\lambda_1 = \inf_{\mu} \lambda_1^{(\mu)}$$

es mayor que cero. Suponiendo que $\psi(s) = s.\varphi(s)$ es una función par y convexa que satisface la condición Δ_2, una respuesta positiva fue obtenida en [36] para problemas sin pesos, y en el caso undimensional, una demostración diferente se deduce de la cuarta demostración de la desigualdad de Lyapunov (ver [18]). Si la función $\varphi(s)$ no satisface la condición Δ_2, se tiene el mismo resultado si la longitud del intervalo (a,b) es menor o igual a 2.

Mencionaremos además algunas extensiones para el problema de Fučik con condición de Neumann (el Dirichlet fue estudiado por García Huidobro, Manásevich y Zanolín en [37]). Si $\psi(s)$ satisface la condición Δ_2, las curvas triviales $0 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times 0$ son aisladas en el espectro y también existe un gap en infinito.

El punto clave para obtener este resultado es que 0 es el único autovalor con una autofunción positiva para el problema

$$-(\varphi(u'))' = \lambda r(t)\varphi(u) \qquad u'(a) = 0 = u'(b).$$

Demostremos unicamente esta propiedad, ya que el resto de la demostración es similar a la del Teorema 0.0.1.

Capítulo 5

Nuestro siguiente objetivo es encontrar estimaciones asintóticas para los autovalores del p-Laplaciano.

Consideremos el problema de autovalores con condición de borde Dirichlet en un intervalo $I = (a,b)$:

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\rho(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \tag{0.0.14}$$

Cuando el peso ρ está comprendido entre dos constantes positivas,

$$c_1 \leq \rho(t) \leq c_2,$$

la teoría de Sturm y las soluciones explícitas para el problema con coeficientes constantes (ver [21, 75]) nos permiten obtener cotas inferiores y superiores para el $n-$ésimo autovalor λ_n.

Sin embargo, esto no es posible en problemas singulares, tales como aquellos en dominios no acotados, con pesos que se anulan, o con pesos que tienden a infinito. Para esta clase de problemas, nuestro enfoque será diferente.

Fijado un valor λ, estimaremos el número de autovalores que sean menores o iguales que λ. Definimos para esto la función

$$N(\lambda) = \#\{k \ : \ \lambda_k \leq \lambda\}.$$

Si obtenemos una fórmula asintótica de la forma

$$N(\lambda) \sim c\lambda^d \qquad \text{cuando} \quad \lambda \to +\infty,$$

entonces, reemplazando el k-ésimo autovalor en esta expresión, tenemos:

$$k \sim c\lambda_k^d,$$

con lo cual se tiene una expresión asintótica para el autovalor:

$$\lambda_k \sim \frac{1}{c} k^{1/d}.$$

Para obtener el desarrollo asintótico de $N(\lambda)$ se puede utilizar la técnica del "Dirichlet-Neumann bracketing", introducida por Courant [13]. La extensión de la misma al $p-$Laplaciano se debe a Friedlander [31], y en forma independiente una versión ligeramente distinta fue obtenida en [25]. Otra posibilidad, es reemplazar esta técnica de tipo variacional con otra que llamaremos "Sturm-Liouville bracketing", similar a la anterior, pero útil para problemas sin caracterización variacional de los autovalores. Expliquemos brevemente en qué consisten.

El "Dirichlet-Neumann bracketing" se basa en la caracterización variacional de los autovalores. Los autovalores (Dirichlet) del $p-$Laplaciano en un intervalo I se obtienen minimizando el cociente de Rayleigh en $W_0^{1,p}(I)$. Si dividimos I en dos intervalos I_1, I_2, tenemos las siguientes inclusiones de distintos espacios de Sobolev:

$$W_0^{1,p}(I_1) \oplus W_0^{1,p}(I_2) \subset W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I_1) \oplus W^{1,p}(I_2).$$

Ahora, el proceso de minimización nos permite utilizar los autovalores de los problemas Dirichlet en I_1 e I_2 como cotas superiores de los autovalores en I; y a su vez, los autovalores Neumann en I_1 e I_2 como cotas inferiores.

Como los problemas de Neumann y de Dirichlet con coeficientes constantes en un intervalo tienen asintóticamente el mismo número de autovalores, se tiene

$$N(\lambda, I) \sim N(\lambda, I_1) + N(\lambda, I_2) \tag{0.0.15}$$

El "Sturm-Liouville bracketing" utiliza en cambio la estructura nodal de las autofunciones. La teoría de Sturm Liouville nos dice que cuando el autovalor crece, aumenta el número de ceros de la autofunción. Comparemos los autovalores λ_n, el $n-$ésimo autovalor del problema (0.0.14) en I, que tiene exactamente n dominios nodales ($n-1$ ceros interiores), con los autovalores $\lambda_k^{(1)}$ y $\lambda_j^{(2)}$ de los intervalos I_1, I_2. El teorema de Comparación de Sturm nos dice que si $\lambda_n \geq \lambda_k^{(1)}$, y $\lambda_n \geq \lambda_j^{(2)}$, entonces $n > k + j + O(1)$, ya que en cada dominio nodal de las autofunciones asociadas a $\lambda_k^{(1)}$ y a $\lambda_j^{(2)}$, existe un cero de la autofunción asociada a λ_n. De la misma forma se obtiene la otra desigualdad cuando se consideran los demás casos para los mayores autovalores menores a λ en los intervalos I, I_1, e I_2, y se consigue el resultado asintótico

$$n \sim k + j,$$

que se traduce en la ecuación (0.0.15).

En ambos casos, subdividiendo I en intervalos muy pequeños y según la regularidad del peso ρ, se lo puede tomar como constante (estimando incluso el error que se comete), lo cual reduce el problema de contar los autovalores en I, al problema de contarlos en intervalos donde el operador tiene coeficientes constantes. Así podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 0.0.3. *Sea* $\{\lambda_n\}_n$ *la sucesión de autovalores del problema* (0.0.14), *r una función estrictamente positiva y acotada, y $r^{1/p}$ integrable Riemann. Entonces,*

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_0^b r^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p}) \tag{0.0.16}$$

cuando $\lambda \to \infty$*.*

Como corolario del Teorema 0.0.3 se tiene el comportamiento asintótico de los autovalores:

Teorema 0.0.4. *Sea* $\{\lambda_n\}_n$ *la sucesión de autovalores del problema* (0.0.14). *Entonces, cuando* $n \to \infty$*,*

$$\lambda_n \sim \left(\frac{\pi_p n}{\int_a^b r^{1/p}} \right)^p. \tag{0.0.17}$$

Este resultado generaliza los resultados de Weyl para el Laplaciano, y también puede considerarse un problema inverso: obtener a partir de la sucesión de autovalores, información sobre el dominio o los coeficientes de la ecuación. Este problema es conocido por el título del excelente trabajo de Kac [46]: ¿se puede oir la forma de un tambor?

Detengámonos brevemente en esta interpretación del problema de estimar $N(\lambda)$. Si se estudia la sucesión de autovalores del Laplaciano λ_k en un dominio Ω de R^n, la pregunta es qué relación tienen los coeficientes c_j y los exponentes a_j con el dominio Ω y los coefcientes de la ecuación en un desarrollo asintótico de la forma:

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_{j \geq 1} c_j \lambda^{a_j}.$$

La respuesta original de Weyl fue que c_1 era la medida del dominio Ω multiplicada por una constante que sólo depende de n, y que el exponente a_1 era $n/2$, es decir, dependía de la dimensión topológica del conjunto Ω.

Durante mucho tiempo se conjeturó que c_2 involucraba la medida del borde del dominio $\partial\Omega$, y el exponente a_2 era $(n-1)/2$, es decir, la dimensión del conjunto $\partial\Omega$. Más adelante, para el caso de dominios con borde fractal, se conjeturó que a_2 era $d/2$, con d alguna dimensión fractal de $\partial\Omega$. Distintos trabajos en esta dirección demostraron estas conjeturas en casos particulares (si bien permanecen aún abiertas en su máxima generalidad), y diversos métodos fueron introducidos para su estudio. En particular, las técnicas que involucran las soluciones fundamentales del Laplaciano, de la ecuación del calor y de la ecuación de ondas resultaron productivas. Para el lector interesado en estos métodos, recomendamos [44, 45, 50, 70] y las referencias en ellos.

Sin embargo, estas técnicas que resultan especialmente útiles para problemas con coeficientes singulares, para el $p-$Laplaciano no están disponibles.

Supongamos por un momento que el peso $r(t)$ se anula en un borde del intervalo (a, b), o que tiende a infinito pero se mantiene integrable, por ejemplo $r(t) = (t-a)^{-1/2}$. El Dirichlet Neumann bracketing tampoco puede ser aplicado directamente, lo cual nos obliga a buscar otro método para estimar los autovalores.

Observemos que el Teorema 0.0.12 no pone restricciones de acotación inferior o superior al peso r, lo cual nos permite obtener fácilmente una cota superior para la función $N(\lambda)$:

Teorema 0.0.15. *Sea $N(\lambda)$ la función que cuenta los autovalores del problema* (0.0.14). *Entonces,*

$$N(\lambda) \leq C\lambda^{1/p},$$

donde la constante C esta dada por

$$C = 2^{-1}\left((b-a)^{p-1}\int_a^b r(t)dt\right)^{1/p}.$$

Para obtener una cota inferior de $N(\lambda)$ es más sencillo, ya que basta considerar los autovalores del intervalo $(a+\varepsilon, b)$, que por la monotonía de los autovalores respecto del dominio son mayores que los del problema en el intervalo (a, b).

La cota superior nos permitirá aislar las singularidades del peso $r(x)$, tomando un intervalo arbitrariamente pequeño en torno a las mismas. Separando el intervalo en dos, $(a, a+\varepsilon)$ y $(a+\varepsilon, b)$, en el segundo no hay problemas para obtener el desarrollo asintótico

$$N(\lambda, (a+\varepsilon, b)) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_{a+\varepsilon}^b r^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p}),$$

mientras que en el primero se tiene la acotación

$$N(\lambda, (a, a+\varepsilon)) \leq 2^{-1}\left(\varepsilon^{p-1}\int_a^{a+\varepsilon} r(t)dt\right)^{1/p}\lambda^{1/p}.$$

Ahora, como el Sturm-Lioville bracketing puede utilizarse, tenemos las desigualdades:

$$N(\lambda, (a+\varepsilon, b)) \leq N(\lambda) \leq N(\lambda, (a+\varepsilon, b)) + 2^{-1}\left(\varepsilon^{p-1}\int_a^{a+\varepsilon} r(t)dt\right)^{1/p}\lambda^{1/p}.$$

Como la integral $\int_a^{a+\varepsilon} r(t)dt$ puede acotarse por un δ prefijado con tomar ε suficientemente chico, y $o(\lambda^{1/p}) < \delta\lambda$ para todo $\lambda > \lambda(\delta)$, al dividir por $\lambda^{1/p}$ tenemos

$$\frac{1}{\pi_p}\int_a^b r^{1/p}(t)dt - 2\delta \leq \frac{N(\lambda)}{\lambda^{1/p}} \leq \frac{1}{\pi_p}\int_a^b r^{1/p}(t)dt + \delta + 2^{-1}\varepsilon^{1-1/p}\delta^{1/p},$$

lo cual nos da el comportamiento asintótico deseado,

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_0^b r^{1/p}(t)dt$$

para problemas con coeficientes singulares.

Como aplicación de este método, estimaremos el número de autovalores de un problema singular que generaliza el p-Laplaciano radial:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -(t^\alpha|u'|^{p-2}u')' & = & \lambda t^\alpha m(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0) & = & 0 \\ u(b) & = & 0 \end{array}\right. \qquad (0.0.18)$$

donde $0 \leq \alpha \leq p-1$, y $m(t)$ es una función acotada y estrictamente positiva. En este caso, no podemos acotar por debajo los términos singulares t^α para obtener cotas inferiores de los autovalores, que se traducen en una cota superior para $N(\lambda)$. Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 0.0.5. *Sea $\{\lambda_n\}_n$ la sucesión de autovalores del Problema (0.0.18). Entonces,*

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_0^b m^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p}) \qquad (0.0.19)$$

cuando $\lambda \to \infty$.

El caso $\alpha \geq p - 1$ fue resuelto recientemente, utilizando una generalización del teorema de comparación con desigualdades integrales 0.0.1, ver [64].

Este teorema generaliza los resultados para $p = 2$ obtenidos por Baouendi y Goulaouic, y Pham The Lai, [7, 62]. Sin embargo, en estos trabajos los coeficientes eran $C^\infty(\bar{\Omega})$, y debían satisfacer una condición de transversalidad en el borde del dominio, sus derivadas no podían anularse en el borde. El operador unidimensional modelo era el de Legendre,

$$L_2 u = -\frac{d}{dr}\left((1-t^2)\frac{du}{dt}\right), \qquad t \in (-1, 1),$$

nuestras técnicas permiten extender los resultados a los operadores

$$L_{\beta,\gamma} u = -\frac{d}{dt}\left((1-t)^\beta (1+t)^\gamma \frac{du}{dt}\right), \qquad t \in (-1, 1),$$

para $0 < \beta, \gamma < 1$ y el caso general se obtiene como en el trabajo citado [64].

Otro ejemplo de este método se puede ver en [66], donde se lo aplica al estudio de los autovalores de un problema lineal en la semirrecta.

Capítulo 6

En este capítulo vamos a estudiar el p-Laplaciano radial en R^N,

$$-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = (\lambda - q(|x|))|u|^{p-2}u, \qquad (0.0.20)$$

que esencialmente es un problema unidimensional, donde $r = |x|$,

$$\begin{gathered} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}(\lambda - q(r))|u|^{p-2}u \\ u'(0) = 0, \quad u \in L^p(0, \infty; r^{N-1}), \end{gathered} \qquad (0.0.21)$$

para el cual la existencia de una sucesión de autovalores simples $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$, fue demostrada por Brown y Reichel en [12] para potenciales $q(r)$ en $C^1(0, \infty)$ que satisfacen:

(a) Existe $\alpha > 0$ y $\beta > max\{(p-n)/(p-1), 0\}$ tal que $q(r) \geq \alpha r^\beta$ para r suficientemente grande, y $q'(r)/q(r)^{1+1/p} \to 0$ cuando $r \to \infty$.

El problema de hallar la distribución de los autovalores radiales fue planteado en [12]. Para $p = 2$ y $N = 1$, este problema fue resuelto por Milne [56], con las hipótesis adicionales $q \in C^3$, convexa, y $q''(x) = o(q'(x)^{4/3})$. Luego, Titchmarsh [72] simplificó la demostración, pidiendo $q \in C^2$ en vez de C^3 pero manteniendo las otras hipótesis. Finalmente, Hartman [41] la obtuvo a partir de estimaciones asintóticas para el número de ceros del problema $u'' + Q(t)u = 0$, pidiendo $q \in C^1$, creciente y $q'(r)/q(r)^{3/2} \to 0$ cuando $r \to \infty$. Nuestra demostración combina sus ideas con las técnicas de la transformada de Prufer usada en [22], e impondremos en el potencial $q(r)$ la siguiente condición:

(b) Existe $r_0 > 0$ tal que $q(r)$ es creciente para $r \geq r_0$, y $q(0) = 0$.

La condición $q(0) = 0$ no es en realidad muy restrictiva, ya que sólo fija una cota inferior para el primer autovalor: $\lambda_1 > 0$. El caso general $q(0) = c \neq 0$ se deduce de éste, ya que definiendo $\hat{\lambda} = \lambda - c$, $\hat{q}(r) = q(r) - c$, se obtiene

$$\hat{\lambda} - \hat{q}(r) = (\lambda - c) - (q(r) - c) = \lambda - q(r).$$

Observemos por último que los resultados en [22, 41, 56, 72] corresponden sólo al caso $N = 1$, sin el coeficiente singular r^{N-1}.

Nuestro resultado principal es el siguiente teorema:

Teorema 0.0.16. *Sea $\{\lambda_n\}_n$ la sucesión de autovalores del problema* (0.0.21), *y $r_{\lambda_n} \in R$ tal que $q(r_{\lambda_n}) = \lambda_n$, donde $q(r)$ satisface las condiciones (a) y (b). Entonces,*

$$(n-1) \sim \frac{1}{\pi_p (p-1)^{1/p}} \int_0^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr.$$

Este teorema nos permite obtener el desarrollo asintótico de $N(\lambda)$:

Corolario 0.0.1. *Sean $\{\lambda_n\}_n$ y r_{λ_n} como en el Teorema 0.0.16. Entonces,*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi_p (p-1)^{1/p}} \int_0^{r_\lambda} (\lambda - q(r))^{1/p} dr$$

cuando $\lambda \to +\infty$.

Capítulo 7

Estudiaremos aquí la distribución asintótica de los autovalores para dominios con borde fractal.

A lo largo de este capítulo, consideraremos un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$, que será una unión disjunta de infinitos intervalos, $\Omega = \cup_j I_j$, cuyas longitudes tienden a cero, y estudiaremos el problema de autovalores Dirichlet

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u & t \in \Omega \\ u(t) = 0 & t \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.0.22}$$

Observemos primero que si λ es un autovalor con una autofunción asociada u, entonces la restricción $u|_{I_j}$ es una solución del problema en I_j. Ahora, λ será un autovalor del operador en I_j si $u|_{I_j}$ no es idénticamente nula en este intervalo y λ coincide con uno de los autovalores del problema en I_j. A la inversa, si λ es un autovalor para el $p-$Laplaciano en I_j, con una autofunción asociada u, extendiéndola por cero fuera de I_j será una autofunción de λ en Ω. Esto nos permite estudiar el problema de la distribución asintótica de los autovalores en Ω a partir de la distribución en cada intervalo:

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_j N(\lambda, I_j).$$

El Teorema 0.0.3 nos sugiere

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_j \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_{I_j} r^{1/p}(t) dt + o(\lambda^{1/p})$$

cuando $\lambda \to \infty$. Sin embargo, para obtener el desarrollo asintótico de $N(\lambda, \Omega)$ debemos analizar los términos $o(\lambda^{1/p})$ de cada sumando. Nuestro primer resultado será el siguiente:

Teorema 0.0.17. *Sea Ω de medida finita, y $r(t)$ una función continua y acotada en Ω. Entonces,*

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_\Omega r^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p}) \tag{0.0.23}$$

cuando $\lambda \to \infty$.

El Teorema 0.0.17 tiene dos generalizaciones posibles, que veremos a continuación.

Supongamos que $r \equiv 1$, y que la medida de Ω es infinita. En ese caso, la expresión anterior para $N(\lambda)$ no es válida. Sin embargo, para todo λ, la sumatoria

$$\sum_j N(\lambda, I_j)$$

es finita, ya que como la longitud de los intervalos tiende a cero, existirá un $j(\lambda)$ tal que $N(\lambda, I_j) = 0$ para todo $j > j(\lambda)$.

Tiene sentido entonces preguntarse si $N(\lambda)$ tendrá un desarrollo asintótico, y en caso afirmativo, cuál será. Nuestro próximo teorema resuelve este problema para determinadas familias de intervalos.

Teorema 0.0.18. *Sea $\Omega = \cup_j I_j$ y $d \in (1, +\infty)$. Entonces:*

i.- si $|I_j|_1 \asymp j^{-1/d}$, se tiene:

$$N(\lambda, \Omega) = O(\lambda^{d/p}) \quad \text{cuando } \lambda \to +\infty,$$

ii.- si $|I_j|_1 \sim j^{-1/d}$, se tiene:

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}) \quad \text{cuando } \lambda \to +\infty,$$

donde $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann en s.

Este teorema generaliza el resultado de Lapidus y Pomerance [51] para dominios de medida finita, $\Omega = \cup_j I_j$ con $d \in (0, 1)$, pero su demostración no puede aplicarse en dominios de medida infinita, ya que consiste en estimar el resto de la serie a partir de un j suficientemente grande.

Nuestra demostración se basa en transformar el problema de contar los autovalores en otro, en el problema de contar puntos de coordenadas enteras debajo de una curva. Este se conoce como el problema de los divisores de Dirichlet, ya que cuando $d = 1$, cada punto de coordenadas enteras debajo de la curva $y = t.x^{-1}$ nos da un divisor de un entero menor a n. Para éste y otros problemas similares, recomendamos el libro de Kratzel [48]

Cuando $0 < d < 1$ este método nos da una estimación del segundo término, y recuperamos los resultados de Lapidus y Pomerance. En ciertos casos particulares, se obtiene incluso una mejor estimación de error. Este es nuestro segundo resultado:

Teorema 0.0.19. *Sea $\Omega = \cup_j I_j$, donde $|I_j|_1 \sim j^{-1/d}$ y $d \in (0, 1)$. Entonces,*

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{|\Omega|_1}{\pi_p}\lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}) \quad \text{cuando} \quad \lambda \to +\infty.$$

En particular, si $|I_j|_1 = j^{-1/d}$ con $d \in (0, 1)$,

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\zeta(1/d)}{\pi_p}\lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + O(\lambda^{d/p(1+d)}) \quad \text{cuando} \quad \lambda \to +\infty.$$

Este teorema puede reformularse en términos de la dimensión interior de Minkowski del borde de la siguiente manera:

Teorema 0.0.20. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un abierto de medida finita $|\Omega|_1$. Si el borde $\partial\Omega$ tiene dimensión interior de Minkowski $d \in (0,1)$ y $\partial\Omega$ es Minkowski medible, entonces*

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{|\Omega|_1}{\pi_p}\lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}) \quad \textit{cuando} \quad \lambda \to +\infty.$$

Este teorema es consecuencia del Teorema 0.0.19 y de la relación entre las longitudes de los intervalos que componen Ω y la dimensión y medida de Minkowski de su borde, ver por ejemplo [24, 51].

Por otro lado, la segunda parte del Teorema 0.0.19 es el problema de los divisores de Dirichlet generalizado, ver [48]. El Teorema 0.0.20 puede interpretarse como una generalización, donde se imponen sólo condiciones asintóticas en el borde de la región.

Es interesante destacar que existe una gran relación entre problemas de 'lattice points', y el número asintótico de autovalores de operadores elípticos. El problema del círculo de Gauss (estimar el número de puntos con coordenadas enteras en un círculo en función de su radio) es equivalente a encontrar el desarrollo asintótica de la función $N(\lambda)$ en un cuadrado. Sin embargo, la conexión con el problema de los divisores de Dirichlet parece ser nueva, ver por ejemplo [42] para mayor información sobre las relaciones entre esta clase de problemas de teoría de números y el problema de estimar los autovalores del Laplaciano.

Destaquemos además que el problema de estimar los autovalores en dominios no acotados de medida infinita no está bien comprendido aún. Si bien para algunas regiones se tiene un desarrollo asintótico de la forma $c\lambda^a$, se ignora el significado geométrico o físico del coeficiente c y el exponente a, ver por ejemplo [74] y las referencias en ese trabajo.

Por último, estudiaremos el caso de peso no constante, y obtendremos una estimación del segundo término en función de la regularidad del peso r y del borde del dominio Ω. Estos resultados fueron obtenidos en [25, 26] y generalizan los resultados de Fleckinger y Lapidus en [28, 29].

Nos interesa el problema de autovalores (0.0.22) donde el peso r es una función acotada que puede cambiar de signo. La existencia de una doble sucesión de autovalores fue demostrada en [14]; y para dimensión $n = 1$, en [4] los autores demostraron que los autovalores variacionales eran todos.

Si definimos

$$R(\lambda, \Omega) = N(\lambda, \Omega) - \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p}\int_\Omega r^{1/p}(t)\,dt,$$

el Teorema 0.0.3 nos dice que

$$R(\lambda, \Omega) = o(\lambda^{1/p}),$$

y hemos visto que para coeficientes constantes el resultado puede mejorarse. Veremos aquí que podemos estimar el resto en términos de la dimensión interior de Minkowski d de $\partial\Omega$, esto es,

$$R(\lambda, \Omega) = O(\lambda^{d/p}).$$

Para pesos indefinidos, como existe una sucesión de autovalores positivos y otra de autovalores negativos, nuestro principal resultado será:

$$N^{\pm}(\lambda, \Omega) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p} \int_{\Omega} (r^{\pm})^{1/p}(t)\, dt + O(\lambda^{d^{\pm}/p}),$$

donde $N^{+}(\lambda)$ denota el número de autovalores positivos del problema (0.0.22) menores a un λ dado, y $r^{+}(t) = \text{máx}\{r(t), 0\}$; en forma análoga, $N^{-}(\lambda)$ denota el número de autovalores negativos mayores a $-\lambda$. Omitimos el enunciado preciso del teorema pues requiere ciertas hipótesis técnicas en r y Ω que detallaremos más adelante.

Introduction

In this work we study the following eigenvalue problem for the one dimensional $p-$laplacian in an open interval (a, b),

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u, \qquad (0.0.24)$$

with different boundary conditions,

- $u(a) = u(b) = 0$ (Dirichlet)
- $u'(a) = u'(b) = 0$ (Neumann)
- $u'(a) = u(b) = 0$ (Mixed)

where $1 < p < +\infty$, r is an integrable function which may changes signs, and λ is a real parameter. We also consider more general domains.

Briefly, let us say that the operator Δ_p,

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

generalizes the usual Laplacian operator,

$$\Delta u = div(\nabla u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

It appears in models of non-newtonian fluids, porous media filtrations, and nonlinear elasticity [9, 10, 61, 69]. Beside its applications, it has a great theoretical interest, and motivated the growth of the nonlinear functional analysis.

Let us note that the $p-$Laplacian in not a linear operator. However, due to the homogeneity of equation (0.0.24), if u is a solution for some λ, then any scalar multiple of u is also a solution. Hence, we call λ an eingenvalue of problem (0.0.24), and u its associated eigenfunction.

The eigenvalue problem for the $p-$Laplacian was considered by H. Amann, M. S. Berger, F. Browder, S. Fučik, and J. Necas [3, 8, 11, 32]. In those works, the authors obtained the existence of a discrete sequence $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ of eigenvalues as in the linear case.

However, there are many differences with the linear case: there are no known explicit solutions, nor series expansions, there are neither Green functions, nor Fourier analysis, due to the lack of linearity. Hence, the study of the eigenvalue problem is considerably difficult, and it is not known if the sequence $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ exhaust the spectrum. This problem was solved only for the one dimensional problem, (see [33]).

The variational characterization enable us to obtain upper bounds of eigenvalues by using appropriate test functions. Lower bounds are more involved, there exists some bounds for the eigenvalues obtained by symmetrization techniques in $\mathbb{R}^N$, and from comparison theorems.

Our goal here is to obtain optimal lower bounds and the asymptotic behavior of the eigenvalues of the $p-$laplacian. Part of this work was motivated also for the problems in Antman and Riddell [6, 68], i. e., the lack of information about the asymptotic behavior of eigenvalues of problems generalizing the one of Kolodner, [47],

$$-u'' = \frac{\lambda u}{\sqrt{t^2 + u^2}} \qquad u(0) = 0 = u'(L).$$

Here, the linearized problem when $\|u\| \to 0$ could be solved explicitly by using Bessel's functions. However, for non constant coefficients or different functions, it is not known how to estimate the eigenvalues. Also, it is not known the behavior of the eigenvalues respect to the norm of the solution.

Chapter 1

In this chapter we collect some general results about the existence of eigenvalues. The variational characterization due to Amann [3], based on the Lyusternik-Schnirelmann theory is the main tool in order to prove the existence of a sequence of eigenvalues. Also, it can be obtained by using a Rayleigh quotient following the original idea of Browder. The equivalence of both methods was proved by Ridell [68].

In this work we will need some results for different eigenvalue problems, which are well known. However, we prefer to include those results here for completeness. We may cite the Sturmian Comparison and Oscillation theory, simplicity of eigenvalues, the nodal structure of the eigenfunctions, the Prufer transformation and the Riccati techniques.

Those results can be found in the works of B. M. Brown, M. Cuesta, D. De Figueiredo, M. Del Pino, P. Drabek, J. García Azorero, T. Godoy, J. P. Gossez, Y. X. Huang, R. Manasevich, I. Peral Alonso, W. Reichel, W. Walter [1, 2, 12, 14, 15, 16, 17, 21, 34, 35, 38, 43, 75].

Chapter 2

In this chapter we study a generalization for $p \neq 2$ of the Sturmian comparison and oscillation theory with integral inequalities instead of pointwise inequalities. This theory was introduced by Nehari [59] to obtain non oscillatory solutions in $(0, +\infty)$ for the linear problem

$$u'' + q(t)u = 0.$$

Let us introduce the following eigenvalue problems,

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \Lambda\rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad u'(0) = u(L) = 0, \tag{0.0.25}$$

$$-(|v'|^{p-2}v')' = \lambda r(t)|v|^{p-2}v, \qquad v'(0) = v(L) = 0, \tag{0.0.26}$$

where $\rho, r \in C([0, L])$ are positive functions satisfying the following condition for every $t \in [0, L]$:

$$\int_0^t r(t)dt \geq \int_0^t \rho(t)dt. \tag{0.0.27}$$

We have the following Comparison Theorem:

Theorem 0.0.1. *Let Λ_1 be the first eigenvalue of problem* (0.0.25)*, and let λ_1 be the first eigenvalue of problem 0.0.26, and assume that condition* (0.0.27) *holds. Then, $\lambda_1 \leq \Lambda_1$, and equality is excluded unless $r(t) = \rho(t)$.*

For the linear case $p = 2$ this theorem was proved by Nehari. Our proof is essentially the same, and follows by integration by parts in the variational formulation of the problem.

Also, we have the following oscillation theorem (the linear case is due to Levin [53]):

Theorem 0.0.2. *Let u be a positive solution of*

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad -u'(0)/u(0) = \gamma \geq 0, \quad u(L) = 0,$$

and let v be a solution of

$$-(|v'|^{p-2}v')' = \lambda r(t)|v|^{p-2}v, \qquad -v'(0)/v(0) = c \geq 0.$$

Let us assume that

$$c^{p-1} + \int_0^t r(x)dx \geq \gamma^{p-1} + \int_0^t \rho(x)dx \tag{0.0.28}$$

holds for every $t \in [0, L]$. Then, v has a zero in $(0, L)$ unless $c = \gamma$ and $r(x) = \rho(x)$.

The proof follows by using Riccati equation techniques as in the linear case.

If $r(t)$ and $\rho(t)$ satisfy the pointwise inequality $r(t) \geq \rho(t)$, we recover the classical Sturmian theory. For the p-laplacian they were proved by Li and Yeh, and by Walter [54, 75], for more general boundary conditions.

We will prove the following results as an application of this theorems to eigenvalue problems:

Proposition 0.0.1 (Comparison of eigenvalues). *Let $\alpha, \beta \in [0, \pi/2)$. Then, if $\beta > \alpha$, the first eigenvalue λ_α of problem*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda_\alpha q(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0)\cos(\alpha) + u(0)\sin(\alpha) = 0 = u(L) \end{cases}$$

is lower or equal than the first eigenvalue λ_β of the same problem with the boundary condition

$$u'(0)\cos(\beta) + u(0)\sin(\beta) = 0 = u(L).$$

Proposition 0.0.2 (Convergence of eigenvalues). *Let $\rho_n(t) = 1 + |t|^n$, and $\lambda_{1,n}$ be the first eigenvalue of problem*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\rho_n(t)|u|^{p-2}u \\ u(-1) = 0 = u(1). \end{cases}$$

Then, $\lambda_{1,n} \to \frac{\pi_p^p}{2^p}$, the first Dirichlet eigenvalue with $\rho = 1$.

Proposition 0.0.3 (An extremal eigenvalue problem). *Let $q(t) \in Q_m$, where*

$$Q_m = \left\{ q \in C([0, L]) \ : \ \int_0^L q(t)dt = m \right\}$$

for $m > 0$. Then, the first eigenvalue λ_1^q of the problem

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda q(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0) = 0 = u(L), \end{cases} \tag{0.0.29}$$

satisfies

$$\lambda_1^q > \frac{1}{mL^{p-1}}.$$

Moreover, the lower bound is sharp, and is not attained in Q_m.

This result can be extended to the Dirichlet eigenvalue problem:

Proposition 0.0.4. *Let $q(t) \in Q_m$. Then, the first eigenvalue λ_1^q of problem*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda q(t)|u|^{p-2}u \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases} \tag{0.0.30}$$

satisfies

$$\lambda_1^q > \frac{2^p}{mL^{p-1}}.$$

Moreover, the lower bound is sharp, and is not attained in Q_m.

The proof follows by considering the point c where the first eigenfunction reaches it maximum, and applying the result of (0.0.3) for the mixed problems in $(0, c)$ and (c, L).

Chapter 3

In this chapter we study the Lyapunov inequality for non linear operators. This inequality was obtained in [55] for the linear case $p = 2$, by using the explicit solutions of the equation. It has been proved in several different ways, see the works of Eliason, Harris and Kong, Patula, and Reid [23, 40, 60, 67]. For the $p-$laplacian, was proved independently in [52, 63].

Let us consider the linear equation

$$-u'' = q(t)u,$$

the Lyapunov inequality gives a necessary condition for the existence of a solution satisfying $u(a) = 0 = u(b)$:

$$\frac{4}{b-a} \leq \int_a^b q(t)dt.$$

Now, Proposition 0.0.3 enable us to extend the proof to the nonlinear case without using explicit solutions nor Green functions:

Theorem 0.0.3. *Let $q \in L^1(a,b)$, $q^+(t) = max\{q(t), 0\}$, and suppose that there exists a positive solution of the problem*

$$-(|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{p-2}u, \qquad u(a) = 0 = u(b).$$

Then,

$$\frac{2^p}{(b-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q^+(t)dt. \tag{0.0.31}$$

Also, we give another three different proofs of the Lyapunov inequality. Let us remark that the last one follows by using the Jensen inequality, and is valid also for quasilinear monotone operators in Orlicz spaces generalizing the usual $p-$laplacian operator, see [19] for applications.

Finally we consider several extensions. First, we study the equation

$$-(s(t)|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{p-2}u, \quad u(a) = 0 = u(b),$$

obtaining

$$\frac{2^p}{[\int_a^b s^{\frac{-1}{p-1}}(t)dt]^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt$$

(this result was proved first in [52]).

Then, we consider the generalized Emden Fowler problem,

$$-(|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{\gamma-2}u, \quad u(a) = 0 = u(b),$$

where $\gamma > 0$. Let us note that the inequality in this case contains the $\|.\|_\infty$ of u, due to the lack of homogeneity.

We also consider the extension to a resonant system of nonlinear ordinary differential equations,

$$\begin{cases} -(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' &= f(t)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta} \\ -(|v'(t)|^{q-2}v'(t))' &= g(t)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, \end{cases}$$

where the positive parameters α, β satisfy

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1.$$

We have the inequality

$$2^{\alpha+\beta} \leq (b-a)^{\frac{\alpha}{p'}+\frac{\beta}{q'}} \left(\int_a^b f^+(t)\, dt \right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_a^b g^+(t)\, dt \right)^{\frac{\beta}{q}},$$

this result was obtained with P. de Napoli in [18]. To our knowledge, there are no previous examples for systems even in the linear case.

For $p = 2$, it is known that the inequality is optimal, and the constant $4/(b-a)$ cannot be replaced by a higher one. We will prove that inequality (0.0.31) is optimal too. However, we will need first some optimal lower bounds for the Dirichlet eigenvalues. This problem will be considered in the next chapter, and the proof can be obtained also from Proposition 0.0.4.

Chapter 4

In this chapter we apply the Lyapunov inequality (0.0.3) to different eigenvalue problems.

First, we consider the Neumann eigenvalue problem:

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \mu r(t)|u|^{p-2}u \\ u'(a) = 0 = u'(b) \end{cases} \tag{0.0.32}$$

where $r(t) \in L^\infty$. For indefinite weights, there exists a double sequence of variational eigenvalues,

$$\sigma^+ = \{0 \leq \mu_1^+ < \mu_2^+ < \ldots\} \qquad \sigma^- = \{0 \geq \mu_1^- > \mu_2^- > \ldots\}.$$

Let us recall that, for indefinite weights $r(t)$, there exists a unique principal eigenvalue, which is simple (it has only one associated eigenfunction, which is positive), see [43].

For the Dirichlet problem, it is known that this eigenvalue is isolated (even in R^N). Hence, it makes sense to define the second eigenvalue as the infimum of the eigenvalues greater than the first, this proof is due to Cuesta [14]. However, for the Neumann problem, those results seems to be known, but is difficult to find the proofs (see also [38]). We will proof the following theorem:

Theorem 0.0.4. *The eigenvalue μ_1^+ is isolated; i. e., there exists $\delta > 0$ such that in the interval $(\mu_1^+; \mu_1^+ + \delta)$ there are no other eigenvalues.*

The proof is based on the Lyapunov inequality. Now, we define the second eigenvalue $\hat{\mu}_2$ of problem (0.0.32) as:

$$\hat{\mu}_2 = \text{mín}\{\mu \in \mathbb{R} : \mu > \mu_1^+ \text{ and } \mu \text{ is an eigenvalue}\}.$$

Following [14], it is easy to prove the next result:

Proposition 0.0.5. *The eigenvalue $\hat{\mu}_2$ coincides with the second variational eigenvalue μ_2^+ obtained from the Lyusternik Schnirelmann theory.*

Also, we have:

Proposition 0.0.6. *The second eigenvalue is simple, and the associated eigenfunction has only one zero.*

From this proposition it is possible to prove that all the Neumann eigenvalues are simple, they coincide with the ones obtained from the Lyusternik Schnirelman theory, and the n^{th} eigenfunction has n nodal domains. For the Dirichlet problem, this result was proved in [33] for positive weights, and for indefinite weights was proved in [4].

Theorem 0.0.5. *Every eigenvalue of problem* (0.0.32) *is obtained from the Lyusternik Schnirelman theory. The n^{th} eigenvalue μ_n^+ is simple, and the corresponding eigenfunction has $n-1$ zeros in (a,b).*

Now, we find lower bounds for the eigenvalues of different problems. Let us note that upper bounds can be obtained from the variational characterization, with appropiate test functions.

For the Dirichlet problem with $p=2$ similar bounds were obtained by Krein [49], as a limit of the bounds of a problem with bounded weights. Here we study the problem

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases} \tag{0.0.33}$$

in (a,b), and our main result is the following theorem:

Theorem 0.0.6. *Let λ_n be the n^{th} eigenvalue of problem* (0.0.33)*. Then,*

$$\frac{2^p n^p}{(b-a)^{p-1}\int_a^b r(t)dt} \le \lambda_n. \tag{0.0.34}$$

Moreover, the lower bounds are sharp:

Theorem 0.0.7. *Let $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$. There exist a family of weights functions $r_{n,\varepsilon}$ such that*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\lambda_{n,\varepsilon} - \frac{2^p n^p}{(b-a)^{p-1}\int_a^b r_{n,\varepsilon}(t)dt}\right) = 0$$

where $\lambda_{n,\varepsilon}$ is the n^{th} eigenvalue of the problem

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r_{n,\varepsilon}(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \tag{0.0.35}$$

The proof of Theorem 0.0.6 follows after replacing q by λr in the Lyapunov inequality. For the higher eigenvalues, we apply it in each nodal domain and the result follows by using inequality (1.3.1).

In order to prove the optimality of the bounds, we need the Steklov eigenvalues, although the result can be obtained also from Proposition (0.0.4). Let us observe that this result was proved by using the Sturm Liouville with integral inequalities, and now we obtain an equivalence between the minimization problem of the first eigenvalue and the Lyapunov inequality.

For the Neumann problem we have the following bounds:

Teorema 0.0.21. *Let μ_n be the n^{th} eigenvalue of problem* (0.0.32)*. Then,*

$$\frac{2^p (n-1)^p}{(b-a)^{p-1}\int_a^b r(t)dt} \le \mu_n.$$

Clearly, all the results can be extended to indefinite weights.

Finally, we consider the Fučik eigenvalue problem in (a, b) with Neumann boundary conditions,

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = r(t)[\alpha|u|^{p-2}u^+ - \beta|u|^{p-2}u^-] \\ u'(a) = 0 = u'(b) \end{cases} \tag{0.0.36}$$

where $r(t) \in L^\infty$ is an indefinite weight, $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$, and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A pair $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ is called a Fučik eigenvalue if problem (0.0.36) has a nontrivial solution $u \in H^1(a, b)$. We call Σ the set of Fučik eigenvalues.

Let us suppose first that $r(t) > 0$. Clearly, (μ_n, μ_n), $0 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{R} \times 0$ belongs to Σ, where μ_n is an eigenvalue of the Neumann problem. The lines $0 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{R} \times 0$ are the so called trivial curves, and let us introduce $\Sigma^* = \Sigma \backslash \{0 \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times 0\}$. In this case, $\Sigma \in \mathbb{R}^+ \times R^+$.

The first non trivial curve Γ_1 is obtained as the first intersection point of Σ^* with a line parallel to the diagonal and passing through $(s, 0)$ for each $s \in \mathbb{R}$, this construction was introduced by Cuesta, de Figueiredo and Gossez in [15].

When $r(t) \equiv 1$ and $p = 2$, de Figueiredo and Gossez [16] proved that the trivial lines are isolated in Σ. Also, the first curve Γ_1 is not asymptotic to zero, and there exists a gap at infinity. This phenomenon is strictly one dimensional.

We give here a different proof of the isolation result of the trivial lines and the existence of a gap at infinity between Γ_1 and the trivial lines.

Theorem 0.0.8. *Let $\int_a^b r(t)dt = m$. There exist an hyperbolic type curve $y = f(x)$ such that $\beta \geq f(\alpha)$ for every Fučik eigenvalue $(\alpha, \beta) \in \Gamma_1$ of Problem* (0.0.36)*. Moreover,*

$$\lim_{\alpha \to \infty} f(\alpha) = \frac{1}{m(b-a)^{p-1}}.$$

The problem with indefinite weights was considered in [1, 2], in this case there exist a family of curves in each quadrant. In the quadrants $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ and $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$ there exist two families of curves in Σ. In the quadrants $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ and $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$, the number of curves can be finite, and depends on the number of sign changes of r. For this case, Theorem 0.0.8 can be generalized as follows:

Theorem 0.0.9. *Let $(\alpha, \beta) \in \Sigma^*$, $m^+ > 0, m^- > 0$, and $\alpha > 0$.*

(i) If $\beta > 0$, then there exists a curve $y = f^+(x)$,

$$f^+(x) = \frac{1}{m^+(b-a)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m^+(b-a)^{p-1}x + 1}\right),$$

such that $\beta \geq f^+(\alpha)$.

(ii) If $\beta < 0$, then there exists a curve $y = f^\pm(x)$,

$$f^\pm(x) = \frac{-1}{m(b-a)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m(b-a)^{p-1}x - 1}\right),$$

such that $\beta \leq f^\pm(\alpha)$.

In much the same way, for $\alpha < 0$ we deduce the existence of two curves $f^-(x), f^\mp(x)$ by considering the weight $-r(x)$. These results can be found in [65]

Finally, we consider the eigenvalue problem:

$$-(\varphi(u'))' = \lambda q(t)\varphi(u) \qquad u(a) = 0 = u(b),$$

where φ is an odd, differentiable, and nondecreasing function satisfying

$$\varphi(0) = 0, \qquad \lim_{s\to+\infty} \varphi(s) = +\infty.$$

We say that $u \in C^1(a,b)$ is a solution if $\varphi(u')$ is an absolutely continuous function satisfying the equation almost everywhere.

The existence of a first eigenvalue was studied in $\mathbb{R}^n$ with very different techniques in García Huidobro, Manásevich, Le and Schmitt [36], Gossez and Manásevich [39], Mustonen and Tienari [57], and Tienari [71]. The existence of a principal eigevalue with a positive associated function was proved.

Due to the lack of homogeneity we must define $\lambda_1^{(\mu)}$ as the principal eigenvalue in the restriction $\{u : \int_a^b q(t)\Phi(u)dt = \mu\}$. An interesting problem is to decide when

$$\lambda_1 = \inf_{\mu} \lambda_1^{(\mu)}$$

is greater than zero. Assuming that $\psi(s) = s.\varphi(s)$ is an even and convex function satisfying the Δ_2 condition, the answer was obtained in [36] for constant coefficients problems, and the one dimensional problem follows from the 4th proof of the Lyapunov inequality (see alsor [18]). Also, the result follows for every $\varphi(s)$ when the length of the interval (a,b) is lesser or equal than 2.

It is possible to extend the previous results for Fučik eigenvalue problem with Neumann boundary conditions (the Dirichlet boundary condition was studied by García Huidobro, Manásevich and Zanolín in [37]). When $\psi(s)$ satisfies the Δ_2 condition, the trivial curves $0 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{R} \times 0$ are isolated in the spectrum, and there exist a gap at infinity. The key point to obtain this result is that 0 is the only eigenvalue with a positive associated eigenfunction of

$$-(\varphi(u'))' = \lambda r(t)\varphi(u) \qquad u'(a) = 0 = u'(b).$$

We prove only this property since the rest is similar to the proof of Theorem 0.0.1.

Chapter 5

We study now the problem of find asymptotic estimations for the $p-$laplacian eigenvalues.

Let us consider the Dirichlet eigenvalue problem in $I = (a,b)$:

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\rho(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \tag{0.0.37}$$

When ρ is bounded by two positive constants,

$$c_1 \le \rho(t) \le c_2,$$

the Sturmian theory and the explicit solution for the constant coefficient problem (see [21, 75]) gives lower and upper bounds for the n^{th} eigenvalue λ_n.

However, this is not possible neither in singular coefficient problems, nor in unbounded domains, and we need a different tool.

Let us fix $\lambda \in \mathbb{R}$, and let us count the number of eigenvalues less or equal than λ. We introduce the function

$$N(\lambda) = \#\{k \ : \ \lambda_k \le \lambda\}.$$

Let us note that an asymptotic expansion like

$$N(\lambda) \sim c\lambda^d \qquad \text{as} \quad \lambda \to +\infty,$$

gives an asymptotic expression for the k^{th} eigenvalue. Replacing λ_k we have:

$$k \sim c\lambda_k^d, \quad \text{which gives} \quad \lambda_k \sim \frac{1}{c} k^{1/d}.$$

Hence, we are reduced to find the asymptotic expansion of $N(\lambda)$. The main tool is the "Dirichlet-Neumann bracketing", due to Courant [13]. An extension for the $p-$laplacian is due to Friedlander [31], and independently, a slightly different formulation was introduced in [25]. A different technique is the one we call "Sturm-Liouville bracketing", similar to the previous one, which is better for problems with singular coefficients, or without variational structure. We will explain briefly each method.

The "Dirichlet-Neumann bracketing" is based on the variational characterization of eigenvalues. The Dirichlet eigenvalues of the $p-$laplacian in an interval I are obtained by minimizing the Rayleigh in $W_0^{1,p}(I)$. After dividing I in two adjacent intervals I_1, I_2, we have the following Sobolev spaces inclusions:

$$W_0^{1,p}(I_1) \oplus W_0^{1,p}(I_2) \subset W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I_1) \oplus W^{1,p}(I_2).$$

Now, the minimization procedure gives the Dirichlet eigenvalues of the problems in I_1 and I_2 as upper bounds of the eigenvalues in I; in turns, the Neumann eigenvalues in I_1 and I_2 are lower bounds.

Since the Dirichlet and Neumann problems with constant coefficients has asymptotically the same number of eigenvalues, we have

$$N(\lambda, I) \sim N(\lambda, I_1) + N(\lambda, I_2). \tag{0.0.38}$$

The "Sturm-Liouville bracketing" is based on the nodal structure of eigenfunctions. From the Sturmian theory, we know that the number of eigenvalues less than λ is related to the number of zeros of a solution of the equation with parameter λ. We compare the eigenvalues λ_n (the n^{th} eigenvalue of problem (0.0.37) in I, which has exactly $n-1$ interior zeros), with the eigenvalues $\lambda_k^{(1)}$ and $\lambda_j^{(2)}$ of I_1, I_2. From the Sturmian Comparison Theorem, if $\lambda_n \geq \lambda_k^{(1)}$, and $\lambda_n \geq \lambda_j^{(2)}$, then $n > k + j + O(1)$, since in each nodal domains of the eigenfunctions associated to $\lambda_k^{(1)}$ and $\lambda_j^{(2)}$, there exists a zero of the eigenfunction associated to λ_n. In much the same way, we obtain the other inequality, which gives the asymptotic result

$$n \sim k + j,$$

which coincides with equation (0.0.38).

In both cases we divide I in small intervals, and we may consider ρ as a constant, which reduces the problem of estimate $N(\lambda)$ to the problem of count the eigenvalues of a constant coefficient case. We will prove the following theorem:

Theorem 0.0.10. *Let $\{\lambda_n\}_n$ be the sequence of eigenvalues of problem* (0.0.37), *and and let r be a strictly positive and bounded function, and $r^{1/p}$ a Riemann integrable function. Then,*

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_0^b r^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p}) \qquad as \quad \lambda \to \infty. \tag{0.0.39}$$

As a corollary of Theorem 0.0.10 we obtain the asymptotic behavior of eigenvalues:

Theorem 0.0.11. *Let $\{\lambda_n\}_n$ be the sequence of eigenvalues of problem* (0.0.37). *Then,*

$$\lambda_n \sim \left(\frac{\pi_p n}{\int_a^b r^{1/p}} \right)^p \qquad as \quad n \to \infty.$$

This theorem generalizes the Weyl results for the laplacian, and it can be considered an inverse problem, that is, to obtain information about the domain and the coefficientes of the equation from the sequence of eigenvalues. This problem is known (from the title of the beautiful work of Kac [46]) as: Can one hear the shape of a drum?

Let us consider the sequence of eigenvalues of the usual laplacian $\{\lambda_k\}_k$ in an open domain $\Omega \subset R^n$. Let us assume that $N(\lambda)$ has an asymptotic expansion of the form

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_{j \geq 1} c_j \lambda^{a_j},$$

the problem is to find the relation between the coefficients c_j and the exponents a_j with the domain Ω and the coefficients of the equation. Weyl obtained that c_1 depends only on the measure of Ω and the dimension n, and the exponent a_1 is $n/2$.

It was conjectured that c_2 depends on the measure of the boundary of the domain $\partial\Omega$, and $a_2 = (n-1)/2$, that is, the topological dimension of the set $\partial\Omega$. Later, for domains with fractal boundaries, it was conjectured that $a_2 = d/2$, with d certain fractal dimension of $\partial\Omega$. In several works were proved some special cases of this conjecture, and many different tools were introduced to study this problem. We can mention, for example, the heat and the wave equation methods, we refer the interested reader to [44, 45, 50, 70] and the references therein.

However, those useful methods are not available for the $p-$laplacian.

Let us assume that $r(t)$ is an integrable function with a zero at a (or satisfying $\text{lím}\, r(t) = +\infty$ as $t \to a$, for example $r(t) = (t-a)^{-1/2}$). The Dirichlet Neumann bracketing cannot be applied directly, and we must find a different way to obtain the asymptotic behavior of $N(\lambda)$.

Let us note that Theorem 0.0.6 admits unbounded weights, and it is easy to obtain an upper bound for the function $N(\lambda)$:

Theorem 0.0.12. *Let $N(\lambda)$ be the eigenvalue counting function of* (0.0.37). *Then,*

$$N(\lambda) \leq C\lambda^{1/p},$$

where C is given by

$$C = 2^{-1} \left((b-a)^{p-1} \int_a^b r(t)dt \right)^{1/p}.$$

In order to obtain a lower bound for $N(\lambda)$, is enough to consider the eigenvalue problem in the interval $(a+\varepsilon, b)$, which are greater than the eigenvalues in (a, b) due to the monotonicity of the eigenvalues respect the domain.

Now, the upper bound enable us to obtain the asymptotic behavior of $N(\lambda)$. We split the interval isolating the singularity of $r(t)$ in a small subinterval, and we consider the eigenvalue problems in $(a, a+\varepsilon)$ and $(a+\varepsilon, b)$. Since the problem is regular in the second interval, we obtain

$$N(\lambda, (a+\varepsilon, b)) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_{a+\varepsilon}^b r^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p}),$$

and we apply Theorem 0.0.12 in the first one, obtaining

$$N(\lambda,(a,a+\varepsilon)) \le 2^{-1}\left(\varepsilon^{p-1}\int_a^{a+\varepsilon} r(t)dt\right)^{1/p}\lambda^{1/p}.$$

Since we can apply the Sturm-Lioville bracketing, we get

$$N(\lambda,(a+\varepsilon,b)) \le N(\lambda) \le N(\lambda,(a+\varepsilon,b)) + 2^{-1}\left(\varepsilon^{p-1}\int_a^{a+\varepsilon} r(t)dt\right)^{1/p}\lambda^{1/p}.$$

Now, the integral $\int_a^{a+\varepsilon} r(t)dt$ is bounded by a fixed δ for ε small enough, and $o(\lambda^{1/p}) < \delta\lambda$ for every $\lambda > \lambda(\delta)$. Hence, after dividing by $\lambda^{1/p}$, we conclude that

$$\frac{1}{\pi_p}\int_a^b r^{1/p}(t)dt - 2\delta \le \frac{N(\lambda)}{\lambda^{1/p}} \le \frac{1}{\pi_p}\int_a^b r^{1/p}(t)dt + \delta + 2^{-1}\varepsilon^{1-1/p}\delta^{1/p},$$

which gives the desired asymptotic expansion,

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_0^b r^{1/p}(t)dt$$

for singular coefficients.

As an application of this method, we compute the number of eigenvalues of a singular problem generalizing the radial p-Laplacian:

$$\begin{cases} -(t^\alpha|u'|^{p-2}u')' &= \lambda m(t)t^\alpha|u|^{p-2}u \\ u'(0) &= 0 \\ u(b) &= 0 \end{cases} \tag{0.0.40}$$

where $0 \le \alpha < p-1$, and $m(t)$ is a strictly positive bounded function. Here, we cannot bound by below the singular term t^α in order to obtain lower bounds for the eigenvalues, which in turns gives an upper bound for $N(\lambda)$. Our main result is the next theorem:

Theorem 0.0.13. *Let $\{\lambda_n\}_n$ be the sequence of eigenvalues of Problem* (0.0.40). *Then,*

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_0^b m^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p}) \tag{0.0.41}$$

as $\lambda \to \infty$.

Let us mention that this result was extended for every $\alpha > 0$ in [64], by using a generalization of Theorem 0.0.1.

This theorem generalizes the results for $p = 2$ due to Baouendi and Goulaouic, and Pham The Lai in [7, 62]. However, the authors considered only $C^\infty(\bar\Omega)$ coefficients, satisfying a nondegeneracy condition at the boundary of the domain (the gradient cannot vanish). The Legendre operator was the one dimensional model,

$$L_2 u = -\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{du}{dt}\right), \qquad t \in (-1,1),$$

and our method can be extended to the operators

$$L_{\beta,\gamma} u = -\frac{d}{dt}\left((1-t)^\beta(1+t)^\gamma\frac{du}{dt}\right), \qquad t \in (-1,1),$$

for $0 < \beta, \gamma < 1$.

A different example of this method could be find in [66], applied to the study of the eigenvalues of a linear problem in $(0,+\infty)$.

Chapter 6

In this chapter we answer a question posed in [12], concerning the asymptotic distribution of eigenvalues for the radial p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ for $1 < p < +\infty$,

$$-div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = (\lambda - q(|x|))|v|^{p-2}v \tag{0.0.42}$$

with a radially symmetric potential $q(|x|)$. The value $\lambda \in \mathbb{R}$ is called a radial eigenvalue if a radially symmetric solution $v \neq 0$, $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ of (0.0.42) exists. Let us observe that problem (0.0.42) is a one-dimensional eigenvalue problem,

$$\begin{gathered} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}(\lambda - q(r))|u|^{p-2}u, \\ u'(0) = 0, \quad u \in L^p(0,\infty; r^{N-1}). \end{gathered} \tag{0.0.43}$$

The existence of a sequence of isolated eigenvalues $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty$ was proved by Brown and Reichel, [12], for potentials $q(r) \in C^1(0,\infty)$ satisfying the following condition:

(a) There exist $\alpha > 0$ and $\beta > max\{(p-n)/(p-1), 0\}$ such that $q(r) \geq \alpha r^\beta$ for large r, and $q'(r)/q(r)^{1+1/p} \to 0$ as $r \to \infty$.

We will need the following condition on the potential $q(r)$:

(b) There exists $r_0 > 0$ such that $q(r)$ is increasing for $r \geq r_0$, and $q(0) = 0$.

Condition $q(0) = 0$ gives $\lambda_1 > 0$. This is no restriction, since the general case $q(0) = c \neq 0$ can be obtained from the case $q(0) = 0$, by defining $\hat{\lambda} = \lambda - c$ and $\hat{q}(x) = q(x) - c$, which gives

$$\hat{\lambda} - \hat{q}(x) = (\lambda - c) - (q(x) - c) = \lambda - q(x).$$

Our main result here is the following theorem:

Theorem 0.0.14. *Let $\{\lambda_n\}_n$ be the sequence of eigenvalues of problem (0.0.43), and $r_{\lambda_n} \in \mathbb{R}$ such that $q(r_{\lambda_n}) = \lambda_n$, where $q(r)$ satisfies conditions (a) and (b). Then,*

$$(n-1) \sim \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr.$$

From Theorem 0.0.14 we obtain the asymptotic distribution of eigenvalues:

Corollary 0.0.1. *Let $\{(\lambda_n, u_n)\}_n$ be the eigenvalues and eigenfunctions of problem (0.0.43), and $q(r)$ as in Theorem 0.0.14. Let $N(\lambda)$ be the eigenvalue counting function,*

$$N(\lambda) = \#\{n \in N : \lambda_n \leq \lambda\}.$$

Then,

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^{r_\lambda} (\lambda - q(r))^{1/p} dr$$

as $\lambda \to +\infty$.

Theorem 0.0.14 and Corollary 0.0.1 generalizes the classical result of Milne [56] for $p = 2$, his result was proved assuming $q \in C^3$, convex, and $q''(x) = o(q'(x)^{4/3})$. A simplified proof is due to Titchmarsh [72], retaining all of Milne's assumptions except $q \in C^3$. Later, Hartman [41] obtained the same result under weaker assumptions, and deduce it from the asymptotic formula for the number of zeros of solutions of $u''+Q(t)u = 0$, where no parameter λ occurs. We combine here his idea with the Prufer transformation techniques used in [22] instead of the ones in [12]. Let us mention that the results in [22, 41, 56, 72] deals with the regular case, without singular coefficients like r^{N-1}.

Chapter 7

We study here the asymptotic distribution of eigenvalues for domains with fractal boundaries.

We will consider a set $\Omega = \cup_j I_j$, where the lengths of the intervals I_j goes to zero, and we study the following eigenvalue problem

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u & t \in \Omega \\ u(t) = 0 & t \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.0.44}$$

Let us note that, for every eigenvalue λ with an associated eigenfunction u, the restriction $u|_{I_j}$ is a solution of the Dirichlet problem in I_j. Hence, λ is an eigenvalue in I_j if $u|_{I_j} \neq 0$. Also, if λ is an eigenvalue for the $p-$laplacian in I_j, with an associated eigenfunction u, then u is an eigenfunction of λ in Ω extending it by zero outside I_j. Hence, we can study the eigenvalue problem in Ω from the asymptotic distribution in each interval,

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_j N(\lambda, I_j).$$

From Theorem 0.0.10 we may conjecture that

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_j \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_{I_j} r^{1/p}(r)dr + o(\lambda^{1/p})$$

as $\lambda \to \infty$. However, in order to obtain the asymptotic expansion of $N(\lambda, \Omega)$ we must control the terms $o(\lambda^{1/p})$. This is our first result:

Theorem 0.0.15. *Let $\Omega \in \mathbb{R}$ be a set of finite measure, and $r(t)$ be a bounded continuous function. Then,*

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_{\Omega} r^{1/p}dx + o(\lambda^{1/p}) \tag{0.0.45}$$

as $\lambda \to \infty$.

We consider two generalizations of Theorem 0.0.15.

Let us assume that $r = 1$, and $|\Omega|_1 = +\infty$. Hence, the previous expresion for $N(\lambda)$ has no sense. However, for every λ, we have

$$\sum_j N(\lambda, I_j) < +\infty$$

since the length of the intervals goes to zero, and there exist $j(\lambda)$ such that $N(\lambda, I_j) = 0$ for every $j > j(\lambda)$.

Then we may ask if $N(\lambda)$ has an asymptotic expansion. Our next theorem solves this problem for certain families of intervals.

Theorem 0.0.16. *Let $\Omega = \cup_j I_j$ and $d \in (1, +\infty)$. Then:*

i.- if $|I_j|_1 \asymp j^{-1/d}$, we have:

$$N(\lambda, \Omega) = O(\lambda^{d/p}) \qquad \text{as } \lambda \to +\infty,$$

ii.- if $|I_j|_1 \sim j^{-1/d}$, we have:

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}) \qquad \text{as } \lambda \to +\infty.$$

where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function at s.

This thorem generalizes the result of Lapidus and Pomerance [51] for finite measure sets $\Omega = \cup_j I_j$ with $d \in (0,1)$, their proof cannot be applied here, since it deals with the remainder of a convergent series.

Our proof is based on the Dirichlet proof for the problem of find the number of divisors of integers, which is a lattice point problem, we refer the interested reader to Kratzel [48].

For $0 < d < 1$ this method gives an estimation of the remainder term in the asymptotic expansion of $N(\lambda)$, and we recover the results of Lapidus and Pomerance. For certain cases, we obtain a better error estimate. This is our second result:

Theorem 0.0.17. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}$ be an open set with finite Lebesgue measure $|\Omega|_1$, $\Omega = \cup_j I_j$, where $|I_j|_1 \sim j^{-1/d}$ with $d \in (0,1)$. Then,*

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\zeta(1/d)}{\pi_p}\lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}) \quad as \quad \lambda \to +\infty.$$

If $|I_j|_1 = j^{-1/d}$ with $d \in (0,1)$,

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\zeta(1/d)}{\pi_p}\lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + O(\lambda^{d/p(1+d)}) \quad as \quad \lambda \to +\infty.$$

We may reformulate this theorem in terms of the interior Minkowski dimension of $\partial\Omega$:

Theorem 0.0.18. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}$ be an open set with finite Lebesgue measure $|\Omega|_1$. Let us suppose that Ω has a fractal boundary $\partial\Omega$ with Minkowski dimension $d \in (0,1)$, and assume that $\partial\Omega$ is Minkowski measurable. Then,*

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{|\Omega|_1}{\pi_p}\lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}) \quad as \quad \lambda \to +\infty.$$

This theorem is a consequence of Theorem 0.0.17 and the relation between the lengths of the intervals of Ω and the Minkowski dimension of its boundary, see [24, 51].

On the other hand, Theorem 0.0.17 is the generalized Dirichlet lattice points problem, see [48]. Theorem 0.0.18 could be interpreted as a generalization of it, i.e., imposing only asymptotic conditions on the boundary of the region.

There exists a strong relationship between lattice points problems and the asymptotic number of eigenvalues of the Laplace operator. The classical lattice points problem of Gauss, i. e., the problem of finding an estimation of the number of points with integer coordinates in an expanding circle, is equivalent to the asymptotic expansion of the spectral counting function of the Laplace operator in a square. However, the connection with the Dirichlet divisor problem seems to be new. See [42] for more details about lattice points problems and eigenvalues of the Laplacian.

Spectral counting problems in unbounded domains with infinite measure are not well understood, and there exists a lack of information on the nature of the terms which appears in the asymptotic expansions. The case of horn shaped regions in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, seems to be the only one considered, see [74] and the references therein.

Finally we consider a nonconstant weight r, and we obtain an estimation of the error term in terms of the regularity of r and the boundary of the domain

Ω. The results were obtained in [25, 26], generalizing the results of Fleckinger and Lapidus in [28, 29].

We are interested in the eigenvalue problem (0.0.44) where r is a bounded function which is allowed to changes signs. The existence of a double sequence of eigenvalues is due to Cuesta [14]; and they are all the eigenvalues in dimension $n = 1$, see [4].

We define

$$R(\lambda, \Omega) = N(\lambda, \Omega) - \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p} \int_\Omega r^{1/p}(t)\, dt,$$

and Theorem 0.0.3 gives

$$R(\lambda, \Omega) = o(\lambda^{1/p}),$$

we prove that this result can be improved for constants coefficients, we will show here that the error term can be bounded in terms of the interior Minkowski dimension d of $\partial\Omega$, that is,

$$R(\lambda, \Omega) = O(\lambda^{d/p}).$$

For indefinite weights, our main result is:

$$N^{\pm}(\lambda, \Omega) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p} \int_\Omega (r^{\pm})^{1/p}(t)\, dt + O(\lambda^{d/p}),$$

where $N^+(\lambda)$ is the number of positive eigenvalues of problem (0.0.44) less or equal than a given λ, and $r^+(t) = \text{máx}\{r(t), 0\}$; in much the same way, $N^-(\lambda)$ denotes the number of negative eigenvalues greater than $-\lambda$. We omit the precise statement of the theorem since we need some technical hypotheses on r and Ω.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Sería excesivo pretender dar aquí siquiera un resumen de la teoría asociada al $p-$Laplaciano, que se ha desarrollado extraordinariamente en los últimos años. Peor aún, el caso unidimensional que consideraremos a lo largo de este trabajo, posee métodos propios, y a la teoría variacional no lineal, se le suman la teoría de oscilación de Sturm Liouville, los argumentos de shooting, etc.

En este capítulo nos concentraremos en el caso unidimensional, y enunciaremos -muchas veces sin demostración- los teoremas más importantes para el problema de autovalores.

1.1. El problema de autovalores

1.1.1. Caracterización variacional

Dado un operador lineal compacto y autoadjunto $T : H \to H$, donde H es un espacio de Hilbert, el Teorema Espectral nos dice que existe una sucesión decreciente de autovalores $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\mu_n \to 0$, y una familia de proyectores P_n asociados a los autovalores tales que

$$T(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n P_n(u).$$

Para el problema lineal de segundo orden

$$-u'' = \lambda r(t)u, \qquad u(a) = 0 = u(b),$$

este teorema nos da la existencia de una sucesión de autovalores

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n},$$

donde μ_n son los autovalores del operador inverso, que es un operador integral compacto y acotado. Se tiene también la caracterización mini-max de Courant, utilizando el cociente de Rayleigh,

$$\lambda_n = \min_{S_n \subset H_0^1} \max_{u\in S_n} \frac{\int_a^b u'^2 dt}{\int_a^b r(t)u^2 dt},$$

donde S_n es un subespacio de dimensión n.

Para el caso no lineal en un espacio de Banach X, existe una generalización basada en la teoría de Lyusternik-Schinirelman. Se introduce la clase Σ de conjuntos compactos simétricos,

$$\Sigma = \{A \subset X \ : \ A \ \text{ compacto y } \ A = -A\},$$

y se define en Σ el género (o *genus*) de Krasnoselskii, $\gamma : \Sigma \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como

$$\gamma(A) = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \ \text{ tal que existe } \ f \in C(A, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}),\ f(x) = -f(-x)\}.$$

Esta teoría nos garantiza la existencia de -al menos- una sucesión de autovalores no lineales del problema con condición de borde Dirichlet

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

que se caracterizan con una formulación análoga al teorema mini-max,

$$\lambda_n = \inf_{F \in C_n} \sup_{u \in F} \frac{\int_a^b |u'|^p \, dt}{\int_\Omega r(t)|u|^p \, dt} \tag{1.1.2}$$

donde

$$C_n = \{C \subset M \ : \ C \ \text{ es compacto },\ C = -C,\ \gamma(C) \geq n\}$$
$$M = \left\{ u \in W_0^{1,p}(a,b) \ : \ \int_a^b r(t)|u|^p \, dt = 1 \right\}.$$

Para otras condiciones de borde se modifica apropiadamente el conjunto M. Por ejemplo, para la condición de borde Neumann se toman funciones u en $W^{1,p}(a,b)$.

Destaquemos que actualmente se prefiere la caracterización debida a Amann, ver [3, 34], pero se obtienen los mismos autovalores que vía el cociente de Rayleigh. La equivalencia está demostrada en [68], y una demostración simplificada puede verse en [18].

Finalmente, recordemos brevemente que para pesos en L^∞, por los resultados de [20, 73], las autofunciones obtenidas variacionalmente pertenecen a $C^{1,\alpha}(\Omega)$.

1.1.2. Coeficientes constantes

Todas las soluciones explícitas del problema con coeficientes constantes

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{p-2}u \tag{1.1.3}$$

para condiciones de borde Dirichlet y Neumann fueron calculadas en [17, 21]. Se tiene:

Lema 1.1.1. *Sean $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ los autovalores de* (1.1.3) *en (a,b) con condiciones de borde Dirichlet, y $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ los autovalores con condiciones de borde Neumann. Entonces,*

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi_p k}{b-a}\right)^p \qquad y \qquad \mu_k = \left(\frac{\pi_p (k-1)}{b-a}\right)^p, \tag{1.1.4}$$

donde

$$\pi_p = 2(p-1)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}.$$

Las autofunciones se obtienen a partir de la función seno generalizada $S_p(t)$, la única solución de

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = (p-1)|u|^{p-2} \\ u(0) = 0 \quad u'(0) = 1 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Los únicos ceros de esta función son de la forma $t = k\pi_p$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Llamando $C_p(t) = S_p'(t)$, ambas funciones están bien definidas, y la siguiente identidad puede obtenerse a partir de la ecuación (1.1.5):

$$|C_p|^p + |S_p|^p = 1. \tag{1.1.6}$$

Además, si $C_p(x) \neq 0$, se satisface la siguiente ecuación:

$$|C_p|^{p-2}C_p' + |S_p|^{p-2}S_p = 0. \tag{1.1.7}$$

1.1.3. La Transformada de Prufer

Otra caracterización de los autovalores se obtiene utilizando la Transformada de Prufer. La ventaja de ésta reside en la facilidad con que se prueban los teoremas de oscilación y comparación, y se obtiene una caracterización completa del espectro. Existen distintas transformaciones posibles, y remitimos al lector interesado a [12, 58, 75].

A modo de ejemplo, aquí veremos la deducción para la ecuación

$$-(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}(\lambda - q(r))|u|^{p-2}u, \tag{1.1.8}$$

pues la necesitaremos en el capítulo 6.

La idea es transformar la ecuación en un sistema de primer orden para dos funciones, la fase de la solución y su módulo. Proponemos entonces para $0 \leq t \leq t_\lambda$

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & f(t)\rho(t)S_p(\varphi(t)), \\ u'(t) & = & g(t)\rho(t)C_p(\varphi(t)). \end{array} \tag{1.1.9}$$

donde

$$f(t) = \left(\frac{t^{N-1}(\lambda - q(t))}{p-1}\right)^{-1/p} \quad \text{y} \quad g(t) = (t^{N-1})^{-1/p} \tag{1.1.10}$$

y t_λ se define como el punto donde

$$q(t_\lambda) = \lambda.$$

Derivando la primer ecuación en (1.1.9), y multiplicando por $gf^{-1}|C_p|^{p-2}C_p$, al reemplazar en la segunda ecuación obtenemos

$$gf^{-1}f'\rho|C_p|^{p-2}C_pS_p + g\rho'|C_p|^{p-2}C_pS_p + g\rho|C_p|^p\varphi' = g^2f^{-1}\rho|C_p|^p. \tag{1.1.11}$$

Por otro lado, reemplazando u y u' en la ecuación (1.1.8), obtenemos

$$-(t^{N-1}g^{p-1}\rho^{p-1}|C_p|^{p-2}C_p)' = t^{N-1}(\lambda - q(t))f^{p-1}\rho^{p-1}|S_p|^{p-2}S_p.$$

Luego, por (1.1.10) tenemos:

$$-(g^{-1}\rho^{p-1}|C_p|^{p-2}C_p)' = (p-1)f^{-1}\rho^{p-1}|S_p|^{p-2}S_p$$

Ahora, derivamos el primer término y reemplazamos $|C_p|^{p-2}C_p'$ de (1.1.7). Tras multiplicar por $g^2\rho^{2-p}S_p/(p-1)$, nos queda

$$g'\rho|C_p|^{p-2}C_pS_p/(p-1) - g\rho'|C_p|^{p-2}C_pS_p + g\rho|S_p|^p\varphi' = g^2f^{-1}\rho|S_p|^p$$

Sumamos esta última ecuación a (1.1.11), y multiplicando por $(\rho g)^{-1}$, obtenemos

$$(g'g^{-1}/(p-1) + f'f^{-1})|C_p|^{p-2}C_pS_p + (|C_p|^p + |S_p|^p)\varphi' = gf^{-1}(|C_p|^p + |S_p|^p)$$

Utilizando la identidad (1.1.6), y reacomodando los términos,

$$\varphi' = -(g'g^{-1}/(p-1) + f'f^{-1})|C_p|^{p-2}C_pS_p + gf^{-1}.$$

Finalmente, reemplazamos f y g, y nos queda

$$\varphi' = -\left(\frac{1-N}{p-1}t^{-1} + \frac{q'}{p(\lambda - q)}\right)|C_p|^{p-2}C_pS_p + \left(\frac{\lambda - q}{p-1}\right)^{1/p}. \qquad (1.1.12)$$

De la misma forma se puede obtener una ecuación diferencial de primer orden para $\rho(t)$, pero omitimos su deducción pues en este trabajo sólo vamos a utilizar la función fase $\varphi(t)$.

1.1.4. La ecuación de Riccati

La ecuación

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u$$

puede transformarse en un sistema de ecuaciones no lineales de primer orden.

Dada una solución positiva $u(t)$, definimos

$$U(t) = -\left|\frac{u'}{u}\right|^{p-2}\frac{u'}{u},$$

y un simple cálculo muestra que $U(t)$ verifica la ecuación generalizada de Riccati:

$$U'(t) = (p-1)|U(t)|^q + r(t) \qquad (1.1.13)$$

donde q es el exponente conjugado de p, esto es, $1/p + 1/q = 1$.

Observemos que los ceros de $u(t)$ coinciden con las singularidades de $U(t)$.

1.1.5. Existencia de autovalores

Para condiciones de borde muy generales -exceptuando la condición de Neumann-, y coeficientes positivos $\rho(t) \in C[a,b]$, $\sigma \in C^1[a,b]$, en [33] se estudió el problema

$$\begin{cases} -(\sigma(t)|u'|^{p-2}u')' &= \lambda\rho(t)|u|^{p-2}u \\ au'(a) + bu(a) &= 0 \\ cu'(b) + du(b) &= 0. \end{cases}$$

Se obtuvo la existencia de una sucesión de autovalores, y se probó que éstos eran todos. Además, se probó que la $n-$ésima autofunción tenía exactamente $n-1$ ceros interiores en (a,b), o lo que es lo mismo, n dominios nodales.

Incluímos acá el siguiente teorema de [75], que necesitaremos más adelante, y es un ejemplo de los resultados que se obtienen vía la transformada de Prufer. Observemos que éste es un problema singular, que generaliza el problema radial:

Teorema 1.1.2. *Sea $\rho(t)$ una función continua y positiva, y $0 \le \alpha$. El problema de autovalores en $(0,b)$*

$$\begin{cases} -(t^\alpha|u'|^{p-2}u')' &= \lambda t^\alpha\rho(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0) &= 0 \\ cu'(b) + du(b) &= 0. \end{cases}$$

tiene una sucesión de autovalores simples,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \qquad \lim \lambda_n = \infty.$$

Estos autovalores son todos, la autofunción u_n tiene $n-1$ ceros simples en $(0,b)$, y entre dos ceros consecutivos de u_n existe un único cero de u_{n+1}.

Este teorema abarca las condiciones de borde Neumann y Mixtas para pesos positivos.

Para pesos que cambian de signo, el mismo resultado fue demostrado para la condición de borde Dirichlet en [4]:

Teorema 1.1.3. *Sea $r \in L^\infty$, con $r^+ \not\equiv 0$. Entonces, el espectro consiste en una doble sucesión discreta de autovalores simples, $\Sigma^+ = \{\lambda_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ el conjunto de autovalores positivos, y $\Sigma^- = \{\lambda_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ el conjunto de los negativos. Además, $\lambda_n^\pm \to \pm\infty$, y la $n-$ésima autofunción $u^\pm$ tiene $n-1$ ceros simples interiores.*

El resultado parece ser conocido para la condición de borde Neumann, pero no hemos podido encontrar una referencia en la literatura. De todas maneras, en el Capítulo 4 damos una demostración de este resultado.

Observemos que la sucesión de autovalores obtenida en el Teorema 1.1.2 (o el Teorema 1.1.3) no se obtuvo con la caracterización variacional (1.1.2). Veremos a continuación que coincide con los obtenidos variacionalmente para el caso Dirichlet, los otros son análogos.

Teorema 1.1.4. *Todos los autovalores del problema* (1.1.1) *coinciden con los variacionales dados por* (1.1.2).

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 4.1 de [21]. Supongamos que el peso es positivo, el caso indefinido es análogo. Por el Teorema 1.1.3, el espectro coincide con una sucesión $\mu_1 < \mu_2 \le \cdots$, y la autofunción u_n asociada a μ_n tiene n dominios nodales. Definamos $w_i(t) = u_n(t)$ si t pertenece al $i-$ésimo dominio nodal, y $w_i(t) = 0$ en caso contrario. Sea S_r la bola de $W_0^{1,p}(a,b)$ de radio r. Ahora, el conjunto $C_n = \text{span}\{w_1,\ldots,w_n\} \cap S_r$ tiene género n y es un conjunto admisible en la caracterización (1.1.2) del $n-$ésimo autovalor variacional λ_n, con lo cual tenemos $\lambda_n \le \mu_n$.

Por otro lado, dado λ_n el $n-$ésimo autovalor variacional de (1.1.1), como está incluído en el conjunto $\{\mu_k\}_k$, tenemos que $\lambda_n = \mu_j$ con $j \ge n$, y por lo tanto, $\lambda_n \ge \mu_n$.

Luego, $\lambda_n = \mu_n$. □

1.2. Algunas propiedades

1.2.1. Comparación y oscilación

El clásico teorema de comparación de Sturm fue extendido para el p-Laplaciano. Las demostraciones en [54, 75] se basan en la transformada de Prufer, aquí daremos una demostración diferente que utiliza la caracterización variacional.

Consideremos los problemas:

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \Lambda\rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad u(a) = u(b) = 0, \tag{1.2.1}$$

$$-(|v'|^{p-2}v')' = \lambda r(t)|v|^{p-2}v, \qquad v(a) = v(b) = 0. \tag{1.2.2}$$

Se tiene el siguiente Teorema:

Teorema 1.2.1. *Sea Λ_n el $n-$ésimo autovalor del problema* (1.2.1) *y λ_n el del problema* (1.2.2). *Si $r(t) \ge \rho(t)$, $s(t) \le \sigma(t)$ para todo $t \in (0,L)$, entonces $\lambda_1 \le \Lambda_1$.*

Demostración. Recordemos la caracterización variacional del $n-$ésimo autovalor de los problemas (1.2.1) y (1.2.2):

$$\lambda_1 = \inf_{F\in C_n} \sup_{u\in F} \frac{\int_0^L s(t)|u'(t)|^p dt}{\int_0^L r(t)|u(t)|^p dt} = \inf_{F\in C_n} \sup_{u\in F} R(u,s,r),$$

$$\Lambda_1 = \inf_{F\in C_n} \sup_{u\in F} \frac{\int_0^L \sigma(t)|u'(t)|^p dt}{\int_0^L \rho(t)|u(t)|^p dt} = \inf_{F\in C_n} \sup_{u\in F} R(u,\sigma,\rho).$$

Ahora, para cada u fija, $R(u,s,r) \leq R(u,\sigma,\rho)$, con lo cual se tiene $\lambda_1 \leq \Lambda_1$, y el teorema queda demostrado. $\square$

También utilizando la transformada de Prufer se pueden probar los siguientes Lemas de oscilación.

Lema 1.2.2. *Sean $\sigma(t), \rho(t)$ funciones continuas y positivas, $\sigma(t) \in C^1$. Sean v, w soluciones de*

$$-(\sigma(t)|u'|^{p-2}u')' = \rho(t)|u|^{p-2}u. \tag{1.2.3}$$

Entonces, entre dos ceros de u, hay al menos un cero de w.

Para la demostración, es suficiente observar que en la transformada de Prufer de la ecuación, si v tiene dos ceros a, b, la función fase satisface $\varphi(b) = \varphi(a)+\pi$.

Lema 1.2.3. *Sean $\sigma(t), \rho(t)$ funciones continuas y positivas, $\sigma(t) \in C^1$. Sea u una solución de*

$$-(\sigma(t)|u'|^{p-2}u')' = \rho(t)|u|^{p-2}u. \tag{1.2.4}$$

Entonces, los ceros de u y u' se alternan.

Demostración. Como $u \in C^1$, entre dos ceros de u debe haber un cero de u'. Por otra parte, sean $a < b$ dos ceros de u'. Como u no cambia de signo, podemos suponer que $u > 0$. Luego, tenemos una solución positiva de la ecuación (1.2.4) en (a,b) que satisface la condición de borde Neumann, y $\lambda = 1$ es un autovalor Neumann. Pero el problema de Neumann tiene un único autovalor con una autofunción asociada positiva, y es $\lambda = 0$, por el Lema 1.2.4, un absurdo. $\square$

1.2.2. Autovalor principal del Neumann

Resumiremos aquí algunas propiedades del primer autovalor Neumann para pesos indefinidos. Estos resultados valen en dimensión $N \geq 1$.

Lema 1.2.4. *Si $\int_a^b \rho(t)dt < 0$, el problema de autovalores*

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \mu\rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad u'(a) = 0 = u'(b)$$

admite un único autovalor positivo μ_1^+ y su autofunción asociada es positiva, μ_1^+ es simple, y el intervalo $(0,\mu_1^+)$ no contiene más autovalores. Si $\int_a^b \rho(t)dt > 0$, entonces $\mu_1^+ = 0$. Si $\int_a^b \rho(t)dt = 0$, entonces $\mu_1^+ = 0 = \mu_1^-$ es el único autovalor con una autofunción positiva.

Para su demostración, ver [38, 43]. Para el problema de Dirichlet se sabe además que todos los autovalores son simples y aislados, y el $n-$ésimo autovalor tiene n dominios nodales (ver [4]), este resultado puede ser conocido en el problema con condición de borde Neumann, pero no hemos podido hallar su demostración. Daremos una demostración en el Capítulo 4

1.2.3. Condición de borde mixta

Para el problema de autovalores con condiciones de borde mixtas existen menos referencias en la literatura. Observemos, sin embargo, que muchas pueden deducirse por simetría de las propiedades del problema de autovalores Dirichlet. Transformamos el problema

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad u'(0) = 0 = u(b) \tag{1.2.5}$$

en el problema

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\rho(|t|)|u|^{p-2}u, \qquad u(-b) = 0 = u(b),$$

con lo cual tenemos el siguiente lema:

Lema 1.2.5. *Sea λ_1 el primer autovalor del problema* (1.2.5)*. Entonces, λ_1 es el único autovalor con una autofunción positiva, que es simple.*

La primer autofunción es además estrictamente decreciente, necesitaremos este resultado en el Capítulo 2.

Lema 1.2.6. *Sea u_1 la primera autofunción positiva del problema* (1.2.5)*. Entonces, $u_1' < 0$.*

Demostración. Supongamos que $u_1'(c) = 0$ para algún $c \in (0, b)$. Entonces, por el Lema 1.2.3, u_1 tiene un cero en $(0, c)$, lo cual no es posible ya que la primera autofunción es positiva. Luego, u_1' no cambia de signo, y como $u_1(0) > 0$, $u_1(b) = 0$, u es una función decreciente y $u_1' < 0$. □

Para el problema con coeficientes constantes, existe una expresión cerrada para el primer autovalor, que se deduce del Lema 1.1.1:

Lema 1.2.7. *Sea λ_1 el primer autovalor del problema con condiciones de borde mixtas en $(0, b)$. Entonces,*

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi_p}{2b}\right)^p.$$

1.2.4. Problema de Steklov

El problema de autovalores de Steklov fue estudiado para el $p-$Laplaciano por J. Fernández Bonder y J. Rossi, ver por ejemplo [27].

Sin embargo, nos interesa sólo el problema unidimensional,

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' &= 0 \\ -|u'|^{p-2}u'(0) &= \mu m|u|^{p-2}u(0) \\ u(L) &= 0 \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Claramente, las únicas soluciones de la ecuación son rectas, y se puede verificar que

$$\mu_1 = \frac{1}{mL^{p-1}}$$

es el único autovalor, cuya autofunción asociada es

$$u_1(t) = t - L.$$

El autovalor μ_1 puede caracterizarse variacionalmente como

$$\min_{u \in \{H^1(0,L): u(L)=0\}} \frac{\int_0^L |u'|^p}{m|u(0)|^p}.$$

1.3. Otros resultados

En esta sección repasamos brevemente la notación empleada para describir el comportamiento asintótico de los autovalores, introducimos las definiciones de la dimensión y el contenido de Minkowski, y enunciamos algunas desigualdades elementales.

1.3.1. Notación

Sea $g \geq 0$, y f una función arbitraria. Diremos que

$$f(t) = O(g(t)) \quad \text{para} \quad t \to \infty$$

si existe una constante C tal que $|f(t)| \leq Cg(t)$. En general, con $f = h + O(g)$, decimos que $f - h = O(g)$.

Si se tiene $f = O(g)$, y también $g = O(f)$, diremos que

$$f \asymp g.$$

Notaremos

$$f(t) \sim g(t) \quad \text{para} \quad t \to \infty$$

cuando $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$. En cambio, si $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$, notaremos:

$$f(t) = o(g(t)) \quad \text{para} \quad t \to \infty.$$

1.3.2. Dimensión y contenido de Minkowski

Denotemos con $|A|_n$ la medida de Lebesgue n-dimensional del conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Sea A_ε el entorno tubular de radio ε de A:

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, A) \leq \varepsilon\} \tag{1.3.1}$$

Definimos la dimensión interior de Minkowski de $\partial\Omega$ como

$$d = dim(\partial\Omega) = \inf\{\delta \geq 0 \ : \ \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-(n-\delta)}|(\partial\Omega)_\varepsilon \cap \Omega|_n = 0\} \tag{1.3.2}$$

Diremos que $\partial\Omega$ es d-Minkowski medible si existe el siguiente límite:

$$M_{int}(\partial\Omega, d) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-(n-d)}|(\partial\Omega)_\varepsilon \cap \Omega|_n, \tag{1.3.3}$$

y llamaremos a $M_{int}(\partial\Omega, d)$ el contenido $d-$dimensional de Minkowski de $\partial\Omega$.

1.3.3. Algunas desigualdades

A lo largo de la tesis usaremos las siguientes desigualdades elementales:

Proposición 1.3.1. *Sean $y, z \in [0, L]$, $y + z = L$. Entonces,*

$$y.z \leq \frac{L^2}{4}.$$

Proposición 1.3.2. *Sean $s, y, z \geq 0$. Entonces,*

$$\left(\frac{2}{x+y}\right)^s \leq \frac{1}{x^s} + \frac{1}{y^s}$$

Proposición 1.3.3 (Desigualdad armónica-aritmética). *Sean $a_j \geq 0$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces,*

$$n\left(\sum_{j=1}^{n} a_n^{-1}\right)^{-1} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_n.$$

Capítulo 2

Desigualdades integrales

2.1. Comparación y oscilación

Consideremos los siguientes problemas de autovalores con condiciones de borde mixtas:

$$-(\sigma(t)|u'|^{p-2}u')' = \Lambda\rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad u'(0) = u(L) = 0, \tag{2.1.1}$$

$$-(s(t)|v'|^{p-2}v')' = \lambda r(t)|v|^{p-2}v, \qquad v'(0) = v(L) = 0, \tag{2.1.2}$$

donde $\rho, r \in C([0, L])$ y $s(t), \sigma(t) \in C^1(0, L)$ son funciones no negativas.

Demostraremos aquí el siguiente teorema, que extiende el Teorema de Comparación 1.2.1 para esta condición de borde particular.

Teorema 2.1.1. *Sea Λ_1 el primer autovalor del problema* (2.1.1) *y λ_1 el del problema 2.1.2. Si se satisface la condición*

$$\int_0^t r(x)dx \geq \int_0^t \rho(x)dx \tag{2.1.3}$$

y $s(t) \leq \sigma(t)$ para todo $t \in [0, L]$, entonces $\lambda_1 \leq \Lambda_1$, y la igualdad vale si y sólo si $r(t) = \rho(t)$.

Demostración. Sea u una autofunción de (2.1.1) asociada a Λ_1. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.1.1) por u, e integrándola de 0 a L obtenemos

$$\int_0^L \sigma(t)|u'(t)|^p dt = \Lambda_1 \int_0^L \rho(t)u(t)^p dt \tag{2.1.4}$$

Ahora

$$\int_0^L \rho(t)u(t)^p dt = \int_0^L \left(\int_0^t \rho(x)dx\right)' u(t)^p dt,$$

e integrando por partes obtenemos

$$\left(\int_0^t \rho(x)dx\right) u(t)^p \Big|_0^L - \int_0^L \left(\int_0^t \rho(x)dx\right) (u(t)^p)' dt =$$

$$= -\int_0^L \left(\int_0^t \rho(x)dx\right) (u(t)^p)' dt.$$

Observemos que este último término es positivo pues $u' < 0$, por el Lema 1.2.6. Usando la condición (2.1.3) tenemos:

$$-\int_0^L \left(\int_0^t \rho(x)dx\right)(u(t)^p)'dt \leq -\int_0^L \left(\int_0^t r(x)dx\right)(u(t)^p)'dt, \qquad (2.1.5)$$

y repitiendo el mismo proceso en sentido contrario, conseguimos finalmente:

$$-\int_0^L \left(\int_0^t r(x)dx\right)(u(t)^p)'dt = \int_0^L r(t)u(t)^p dt. \qquad (2.1.6)$$

Ahora, juntando las ecuaciones (2.1.4), (2.1.5) y (2.1.6) tenemos:

$$\int_0^L \sigma(t)|u'(t)|^p dt \leq \Lambda_1 \int_0^L r(t)u(t)^p dt. \qquad (2.1.7)$$

y utilizando la desigualdad puntual $s(t) \leq \sigma(t)$, tenemos

$$\int_0^L s(t)|u'(t)|^p dt \leq \int_0^L \sigma(t)|u'(t)|^p dt \leq \Lambda_1 \int_0^L r(t)u(t)^p dt,$$

y el teorema queda demostrado utilizando la caracterización variacional del primer autovalor,

$$\lambda_1 = \inf_{v\in V} \frac{\int_0^L s(t)|v'(t)|^p dt}{\int_0^L r(t)|v(t)|^p dt} \leq \frac{\int_0^L s(t)|u'(t)|^p dt}{\int_0^L r(t)|u(t)|^p dt} \leq \Lambda_1,$$

donde $V = \{v \in W^{1,p}(0,L) \,:\, v(L) = 0\}$. □

Este resultado puede extenderse para ciertos coeficientes σ, s, ver por ejemplo [64].

A diferencia del teorema para condiciones de borde Dirichlet o Neumann, este resultado es válido sólo para el primer autovalor. En ciertos casos, explotando las simetrías de los pesos r, ρ si las hubiera, se podría extender a autovalores mas altos, pero nunca a más de un autovalor por vez, ya que la derivada de la autofunción, al tener ceros interiores, no sería monótona y falla el paso (2.1.5).

A continuación demostraremos el siguiente teorema de oscilación:

Teorema 2.1.2. *Sea u una solución positiva de:*

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \rho(t)|u|^{p-2}u, \qquad -u'(0)/u(0) = \gamma \geq 0, \quad u(L) = 0, \qquad (2.1.8)$$

y sea v una solución de:

$$-(|v'|^{p-2}v')' = \lambda r(t)|v|^{p-2}v, \qquad -v'(0)/v(0) = c \geq 0. \qquad (2.1.9)$$

Si se cumple

$$c^{p-1} + \int_0^t r(t)dt \geq \gamma^{p-1} + \int_0^t \rho(t)dt \qquad (2.1.10)$$

para todo $t \in [0, L]$, entonces v tiene un cero en $(0, L)$, a menos que $c = \gamma$ y $r(t) = \rho(t)$.

Demostración. Para esta demostración, utilizaremos la ecuación de Riccati (1.1.4).

Sean $U(t), V(t)$ las funciones

$$U(t) = -\frac{|u'|^{p-2}u'}{|u|^{p-2}u}, \qquad V(t) = -\frac{|v'|^{p-2}v'}{|v|^{p-2}v}.$$

Reescribiendo las ecuaciones (2.1.8), (2.1.9) utilizando la ecuación de Riccati de la Sección 1.1.4, se tienen las ecuaciones:

$$U'(t) = (p-1)|U(t)|^q + \rho(t) \tag{2.1.11}$$

con la condición inicial $U(0) = \gamma$, donde q es el exponente conjugado de p, y

$$V'(t) = (p-1)|V(t)|^q + r(t) \tag{2.1.12}$$

con la condición $V(0) = c$.

Integrando ahora ambas ecuaciones desde 0 a t, obtenemos:

$$U(t) = \gamma^{p-1} + \int_0^t \rho(t)dt + \int_0^t (p-1)|U(t)|^q dt$$

$$V(t) = c^{p-1} + \int_0^t r(t)dt + \int_0^t (p-1)|V(t)|^q dt.$$

Claramente, la condición (2.1.10) nos dice que $V(t) \geq U(t)$ siempre y cuando $U(t)$ exista. Pero observemos que la solución $U(t)$ posee una singularidad en $t = L$ ya que $U(t) \to +\infty$ cuando $t \to L$, con lo cual $V(t)$ debe tener una singularidad en $(0, L)$.

Como las singularidades de $V(t)$ coinciden con los ceros de $v(t)$, el teorema queda demostrado. $\square$

En esta demostración seguimos las ideas de Levin [53]. Sin embargo, es posible dar una demostración distinta del mismo resultado con métodos variacionales.

2.2. Aplicaciones

En esta sección veremos algunas aplicaciones de los teoremas anteriores a problemas de autovalores.

Proposición 2.2.1 (Comparación de autovalores). *Sean $\alpha, \beta \in [0, \pi/2)$. Entonces, si $\beta > \alpha$, el primer autovalor λ_α del problema*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda_\alpha q(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0)\cos(\alpha) + u(0)\sin(\alpha) = 0 = u(L) \end{cases}$$

es menor o igual que el primer autovalor λ_β del mismo problema con la condición de borde

$$u'(0)\cos(\beta) + u(0)\sin(\beta) = 0 = u(L),$$

Demostración. Por el absurdo, supongamos que

$$\lambda_\beta \geq \lambda_\alpha$$

y $\beta > \alpha$. Por el teorema 2.1.2, la primer autofunción u_β tiene que tener un cero en $(0, L)$, ya que

$$\tan^{p-1}(\beta) + \lambda_\beta \int_0^t q(t)dt > \tan^{p-1}(\alpha) + \lambda_\alpha \int_0^t q(t)dt.$$

Pero esto contradice el hecho que la primera autofunción debe ser positiva. $\square$

Remark 2.2.1. Observemos que la condición (2.1.2) y $\beta > \alpha$ implican

$$\lambda_\beta < \lambda_\alpha - \frac{\tan^{p-1}(\beta) - \tan^{p-1}(\alpha)}{\int_0^L q(t)dt}.$$

Proposición 2.2.2 (Convergencia de autovalores). *Sea* $\rho_n(t) = 1 + |t|^n$, *y* $\lambda_{1,n}$ *el primer autovalor del problema*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\rho_n(t)|u|^{p-2}u \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Entonces, $\lambda_{1,n} \to \pi_p^p/2^p$, *el primer autovalor Dirichlet con* $\rho = 1$.

Demostración. Usando la simetría del problema, la primera autofunción $u_{1,n}$ tiene un máximo en $t = 0$. Luego, $u'_{1,n}(0) = 0$, y por el Teorema 2.1.1 con $r_n(t) \equiv \frac{n+2}{n+1}$ tenemos

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\frac{\pi_p^p}{2^p} \leq \lambda_{1,n}.$$

Por otro lado, utilizando el teorema de comparación puntual, es fácil ver que

$$\lambda_{1,n} \leq \frac{\pi_p^p}{2^p},$$

ya que $1 \leq \rho_n(t)$. □

Cuando $n \to \infty$, $\rho_n(t) \to 1$ en L^1, pero no en L^∞. Para convergencia en L^∞, el teorema de comparación puntual es suficiente.

El siguiente problema tiene interés en sí mismo, ya que permite a partir de él demostrar la desigualdad de Lyapunov, que a su vez nos permitirá obtener resultados sobre los autovalores con condición de borde Dirichlet o Neumann.

Proposición 2.2.3 (Problemas extremales). *Sea* $q(t) \in Q_m$, *donde*

$$Q_m = \left\{ q \in C([0, L]) \ : \ \int_0^L q(t)dt = m \right\}$$

y $m > 0$ *Entonces, el primer autovalor* λ_1^q *del problema*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda q(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0) = u(L) = 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

satisface

$$\lambda_1^q > \frac{1}{mL^{p-1}}.$$

Esta cota inferior es óptima y no se alcanza para ningun peso $q(t) \in Q_m$.

Para la demostración, recordemos brevemente el problema de Steklov 1.2.6

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' &=& 0 \\ -|u'|^{p-2}u'(0) &=& \mu m|u|^{p-2}u(0)) \\ u(L) &=& 0 \end{cases}$$

donde m es una constante positiva y μ es el autovalor. Se tiene

$$u_1(t) = t - L, \qquad \mu_1 = \frac{1}{mL^{p-1}},$$

y recordemos su caracterización variacional,

$$\mu_1 = \min_{u \in \{H^1(0,L): u(L)=0\}} \frac{\int_0^L |u'|^p}{m|u(0)|^p}.$$

Demostración. Consideremos la familia de pesos en Q_m

$$\rho_n = \begin{cases} 2nm(1-nt) & \text{for } \ t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{for } \ t \in [1/n, L] \end{cases}$$

Esta es una sucesión de funciones continuas que convergen a $m\delta_0(t)$, donde $\delta_0(t)$ es la delta de Dirac en $t = 0$. Claramente, como esta función concentra su masa en el origen, para toda $q \in Q_m$, existe n_q tal que para todo $n \geq n_q$,

$$\int_0^t q(x)dx \leq \int_0^t \rho_n(x)dx \quad \text{ para todo } \ t \in [0, L].$$

Combinando las caracterizaciones variacionales del primer autovalor del problema (2.2.3) y del problema de Steklov, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1^q &= \min_{u \in \{H^1(0,L): u(L)=0\}} \frac{\int_0^L |u'|^p dt}{\int_0^L q|u|^p dt} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \left(\min_{u \in \{H^1(0,L): u(L)=0\}} \frac{\int_0^L |u'|^p dt}{\int_0^L \rho_n |u|^p dt} \right) \\ &= \min_{u \in \{H^1(0,L): u(L)=0\}} \frac{\int_0^L |u'|^p dt}{m|u(0)|^p} = \frac{1}{mL^{p-1}}, \end{aligned}$$

donde en la desigualdad hemos usado el Teorema 2.1.1. □

Proposición 2.2.4. *Sea $q(t) \in Q_m$, donde*

$$Q_m = \left\{ q \in C([0, L]) \ : \ \int_0^L q(t)dt = m \right\}$$

y $m > 0$ Entonces, el primer autovalor λ_1^q del problema

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda q(t)|u|^{p-2}u \\ u(0) = 0 = u(L) \end{cases} \tag{2.2.3}$$

satisface

$$\lambda_1^q > \frac{2^p}{mL^{p-1}}.$$

Esta cota inferior es óptima y no se alcanza para ningun peso $q(t) \in Q_m$.

La demostración se tiene utilizando el punto c donde la primera autofunción alcanza su máximo, descomponiendo el problema (2.2.4) en dos problemas mixtos en $(0, c)$ y (c, L). Por la proposición anterior,

$$m\lambda_1^q > \frac{1}{(L-c)^{p-1}} + \frac{1}{c^{p-1}},$$

y ahora es suficiente utilizar la desigualdad (1.3.2).

Capítulo 3

La desigualdad de Lyapunov

En este capítulo veremos cuatro demostraciones diferentes de la desigualdad de Lyapunov. Para simplificar las demostraciones, consideraremos sólo el caso u, q positivas, y luego mostraremos como se extienden al caso general.

Teorema 3.0.5. *Sea $q \in L^1(a,b)$ una función positiva. Si existe una solución positiva de*

$$-(|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{p-2}u, \qquad u(a) = u(b) = 0, \tag{3.0.1}$$

entonces

$$\frac{2^p}{(b-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt. \tag{3.0.2}$$

3.1. Primera demostración

La primera demostración se basa en el siguiente lema que se deduce de la Proposición 2.2.3:

Lema 3.1.1. *Supongamos que el problema*

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{p-2}u \\ u'(0) = 0 = u(L). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

posee una solución positiva. Entonces, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{L^{p-1}} \leq \int_0^L q(t)dt.$$

Demostración. Sea u una solución positiva del problema (3.1.1). Entonces, u es la primera autofunción con autovalor $\lambda_1^q = 1$ del problema (2.2.2). Por la Proposición 2.2.3 se tiene

$$1 = \lambda_1^q \geq \frac{1}{L^{p-1}\int_0^L q(t)dt},$$

y el Lema queda demostrado. □

Para demostrar el Teorema 3.0.5, observemos que si u es una solución positiva, por el Lema 1.2.3 debe existir $c \in (a,b)$ tal que $u'(c) = 0$.

Ahora, aplicando el Lema 3.1.1 en los intervalos (a,c) y (c,b), tenemos:

$$\frac{1}{(b-c)^{p-1}} + \frac{1}{(c-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt.$$

La suma de la izquierda es minimizada cuando ambos términos son iguales (por la Proposición 1.3.2, con lo cual se tiene:

$$\frac{2^p}{(b-a)^{p-1}} = 2\left(\frac{2}{b-a}\right)^{p-1} \leq \int_a^b q(t)dt$$

y el teorema queda demostrado.

3.2. Segunda demostración

La segunda demostración consiste en utilizar la formulación variacional del problema y aplicar la desigualdad de Holder.

Como $u \in C^1(a,b)$, existe $c \in (a,b)$ donde u alcanza su máximo, y se tiene $u'(c) = 0$. Integrando la derivada,

$$u(c) = \int_a^c u'dt \leq \int_a^c |u'|dt,$$

y ahora, por Holder,

$$u(c) \leq (c-a)^{1/q}\left(\int_a^c |u'|^p dt\right)^{1/p}.$$

Si multiplicamos la ecuación (3.0.1) por u e integramos ambos miembros entre a y c, tras hacer partes en el lado izquierdo obtenemos

$$\int_a^c |u'|^p dt = \int_a^c q(t)|u|^p dt.$$

Luego, reemplazando la integral de la desigualdad anterior, nos queda:

$$u(c) \leq (c-a)^{1/q}\left(\int_a^c q(t)|u|^p dt\right)^{1/p}.$$

Ahora, podemos acotar $u(t)$ por el máximo, $u(c)$, y usando la linealidad de la integral, cancelamos $u(c)$. Elevando a la potencia p, conseguimos:

$$1 \leq (c-a)^{p-1}\int_a^c q(t)dt,$$

que podemos reescribir como

$$\frac{1}{(c-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt.$$

Repitiendo el proceso en el intervalo (c,b), nos queda

$$\frac{1}{(b-c)^{p-1}} \leq \int_c^b q(t)dt,$$

y sumando miembro a miembro, el resto sale como en la demostración anterior,

$$\frac{1}{(b-c)^{p-1}} + \frac{1}{(c-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt,$$

y la suma de la izquierda es minimizada cuando ambos términos son iguales (Proposición 1.3.2), con lo cual

$$\frac{2^p}{(b-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt$$

y el teorema queda demostrado.

3.3. Tercera demostración

Como antes, u alcanza un máximo en $c \in (a,b)$, y

$$u(c) = \int_0^c u'(x)dx. \tag{3.3.1}$$

Ahora, integrando la ecuación diferencial entre x y c tenemos:

$$\int_x^c q(t)|u|^{p-2}u(t)dt = -\int_x^c (|u'|^{p-2}u'(t))'dt = |u'(x)|^{p-2}u'(x),$$

ya que $u'(c) = 0$ al ser un máximo. Despejando $u'(t)$, ya que el término de la izquierda es positivo, nos queda

$$u'(x) = \left(\int_x^c q(t)u^{p-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

y reemplazando u' en la ecuación (3.3.1) obtenemos:

$$u(c) = \int_a^c \left(\int_x^c q(t)u^{p-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}} dx$$

Como $u(t) < u(c)$, y $\int_x^c q(t)dt < \int_a^c q(t)dt$, reemplazamos esta última integral, cancelamos $u(c)$, e integramos entre a y c, lo cual nos da:

$$1 \leq (c-a)\left(\int_a^c q(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.3.2}$$

De la misma forma, pero ahora integrando entre c y b, obtenemos:

$$1 \leq (b-c)\left(\int_c^b q(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.3.3}$$

Ahora, multiplicamos miembro a miembro las desigualdades (3.3.2) y (3.3.3):

$$1 \leq (c-a)(b-c)\left(\int_a^c q(t)dt \int_c^b q(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Por último, utilizando la desigualdad de la Proposición 1.3.1 se tiene:

$$1 \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(\frac{\int_a^b q(t)dt}{2}\right)^{\frac{2}{p-1}},$$

y tras despejar, obtenemos la desigualdad (3.0.2).

3.4. Cuarta demostración

En este caso, el problema que tenemos en mente es el siguiente:

$$-(\varphi(u'))' = q(t)\varphi(u) \qquad u(a) = 0 = u(b), \tag{3.4.1}$$

donde φ es una función diferenciable, no decreciente, que satisface

$$\varphi(0) = 0, \qquad \lim_{s\to+\infty} \varphi(s) = +\infty.$$

Definamos $\psi(s) = s.\varphi(s)$, y supongamos que es una función par y convexa. Una solución del problema (3.4.1) es una función $u \in C^1(a,b)$, tal que $\varphi(u')$ es absolutamente continua y satisface la ecuación en casi todo punto. Esta ecuación coincide con el $p-$Laplaciano si $\varphi(s) = sgn(s)|s|^{p-1}$.

Esta demostración utiliza la desigualdad de Jensen,

$$\psi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(g(t))dt,$$

de la cual se deduce fácilmente la siguiente desigualdad:

$$\frac{\psi(x)}{x} \le \frac{\psi(y)}{y} \qquad \text{si} \qquad x < y. \tag{3.4.2}$$

Como siempre, tomando el punto c donde u alcanza su máximo,

$$2u(c) = \left|\int_a^c u'dt\right| + \left|\int_c^b u'dt\right| \le \int_a^b |u'|dt.$$

Tras dividir por $b-a$, aplicar ψ y la desigualdad de Jensen, obtenemos:

$$\psi\left(\frac{2u(c)}{b-a}\right) = \psi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |u'|dt\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(|u'|)dt.$$

Si multiplicamos la ecuación (3.4.1) por u e integramos ambos miembros entre a y b, tras hacer partes en el lado izquierdo obtenemos

$$\int_a^b \psi(u')dt = \int_a^b q(t)\psi(u)dt,$$

que podemos reemplazar en la desigualdad anterior, y nos queda:

$$\psi\left(\frac{2u(c)}{b-a}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b q(t)\psi(u)dt.$$

Acotando $u(t)$ por su máximo, $u(c)$, aquí no podemos cancelarlo como antes, pero observemos que nos queda una desigualdad de la forma

$$\frac{\psi\left(\frac{2u(c)}{b-a}\right)}{\frac{\psi(u(c))}{b-a}} \le \int_a^b q(t)dt. \tag{3.4.3}$$

Aquí concluiría la demostración para el $p-$Laplaciano, ya que $\psi(s) = |s|^p$, lo cual nos da la desigualdad (3.0.5).

Observemos además que si $b-a<2$, como ψ es creciente, nos queda

$$b-a \le \int_a^b q(t)dt,$$

lo cual nos da una desigualdad de tipo Lyapunov para funciones ψ convexas arbitrarias pero que depende sólo de la longitud del intervalo.

Asumiendo que ψ satisface la condición Δ_2:

$$\psi(2s) \leq k\psi(s)$$

para cierta constante k positiva y para todo $s \geq 0$, se tiene un resultado mas preciso:

$$2\left(\frac{k}{2}\right)^{[1-\log_2(b-a)]} \leq \int_a^b r(t)dt. \tag{3.4.4}$$

donde $[a]$ es la parte entera de a, y k es la constante en la condición Δ_2.

Partiendo de la ecuación (3.4.3), la desigualdad se obtiene por inducción.

Para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2^n \leq x < 2^{n+1}$. Veamos que

$$x\left(\frac{k}{2}\right)^n \leq \frac{\psi(xt)}{\psi(t)}.$$

Si $1 \leq c < 2$, es inmediato por la ecuación (3.4.2) que

$$\frac{\psi(xt)}{\psi(t)} \geq x.$$

Si $2^n \leq x < 2^{n+1}$, entonces

$$\frac{\psi(xt)}{\psi(t)} \geq \frac{k\psi(xt)}{\psi(2t)} = \frac{k\psi(2tx/2)}{\psi(2t)} \geq x\left(\frac{k}{2}\right)^n,$$

y la última desigualdad se obtuvo por la hipótesis inductiva. Hemos demostrado el resultado para $n \geq 0$, el caso $n < 0$ es análogo.

Este resultado y otros similares cuando la función ψ es asintóticamente homogénea de grado p,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\psi(xs)}{\psi(s)} = x^p,$$

se obtuvieron en [19].

3.5. Generalizaciones

3.5.1. Soluciones que cambian de signo

Supongamos ahora que el problema (3.0.5) posee una solución que cambia de signo. En este caso, basta considerar un dominio nodal $(a_1, b_1) \subset (a, b)$, ya que

$$\frac{2^p}{(b-a)^{p-1}} \leq \frac{2^p}{(b_1-a_1)^{p-1}} \leq \int_{a_1}^{a_2} q(t)dt \leq \int_a^b q(t)dt.$$

Observemos que si la solución tiene n dominios nodales, podemos en realidad dar una versión más fuerte de la desigualdad de Lyapunov:

Teorema 3.5.1. *Si el problema* (3.0.5) *admite una solución con* $n-1$ *ceros en el interior de* (a, b)*, entonces:*

$$\frac{2^p n^p}{(b-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt.$$

Demostración. Sean $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b$ los ceros de una solución en $[a, b]$. Si sumamos las desigualdades

$$\frac{2^p}{(t_{i+1} - t_i)^{p-1}} \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} q(t)dt$$

en cada uno de los n intervalos (t_i, t_{i+1}) para $1 \leq i \leq n$ obtenemos:

$$2^p \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(t_{i+1} - t_i)^{p-1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} q(t)dt$$

Ahora, el lado izquierdo se minimiza cuando los n sumandos son iguales, por la desigualdad armónica-aritmética (1.3.3), y el lado derecho nos da la integral de $q(t)$ en todo el intervalo (a, b):

$$\frac{2^p n^p}{(b-a)^{p-1}} = \frac{2^p n}{(\frac{\sum t_{i+1} - t_i}{n})^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt$$

□

3.5.2. Pesos indefinidos

Si q cambia de signo, reemplazaremos q por $q^+ = max\{q, 0\}$. Observemos que, multiplicando por u e integrando la ecuación (3.0.5), tenemos

$$\int_a^c |u'|^p dt = \int_a^c q(t)|u|^p dt,$$

y el lado derecho debe ser positivo ya que el izquierdo lo es. Por lo tanto, es suficiente utilizar la acotación

$$\int_a^c q(t)|u|^p dt \leq \int_a^c q^+(t)|u|^p dt. \tag{3.5.1}$$

3.5.3. Coeficientes no constantes

Teorema 3.5.2 (ver [52]). *Supongamos que el problema*

$$-(s(t)|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{p-2}u, \quad u(a) = 0 = u(b)$$

posee una solución positiva, donde $s(t) \in C^1(a, b)$ es una función estrictamente positiva. Entonces,

$$\frac{2^p}{[\int_a^b s^{\frac{-1}{p-1}}(t)dt]^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt.$$

La demostración en [52] es similar a la vista en segundo lugar, la única modificación es multiplicar y dividir por $s^{1/p}(t)$ y aplicar Holder:

$$\int_a^b |u'|dt \leq \left[\int_a^b s^{\frac{-1}{p-1}}(t)dt\right]^{1/q} \left[\int_a^b s(t)|u'|^p dt\right]^{1/p}.$$

También la tercera puede utilizarse en este caso, ya que $u(c) = \int_0^c u'(x)dx$, con lo cual

$$\int_x^c r(t)|u|^{p-2}u(t)dt = -\int_x^c (s(t)|u'|^{p-2}u'(t))'dt = s(x)|u'(x)|^{p-2}u'(x).$$

Despejando,

$$u'(x) = s^{\frac{-1}{p-1}}(x) \left(\int_x^c r(t)u^{p-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

y el resto de la demostración es igual.

3.5.4. Emden Fowler

Consideraremos el problema generalizado de Emden Fowler,

$$-(|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{\gamma-2}u, \quad u(a) = 0 = u(b),$$

donde $\gamma > 0$. En este caso no hay homogeneidad en la ecuación, y por lo tanto, la desigualdad involucra además la norma infinito de la solución. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.5.3. *Si el problema*

$$-(|u'|^{p-2}u')' = q(t)|u|^{\gamma-2}u, \quad u(a) = 0 = u(b)$$

posee una solución positiva, entonces

$$\frac{2^p \|u\|_\infty^{p-\gamma}}{(b-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt.$$

Demostración. La demostración es similar a las anteriores.

Como $u \in C^1(a,b)$, existe $c \in (a,b)$ donde u alcanza su máximo, y se tiene $u'(c) = 0$. Ahora,

$$2u(c) = \left|\int_a^c u'dt\right| + \left|\int_c^b u'dt\right| \leq \int_a^b |u'|dt,$$

y ahora, por Holder,

$$u(c) \leq (b-a)^{1/q} \left(\int_a^c |u'|^p dt\right)^{1/p}.$$

Si multiplicamos la ecuación por u e integramos, tras hacer partes en el lado izquierdo obtenemos

$$\int_a^b |u'|^p dt = \int_a^c q(t)|u|^\gamma dt.$$

Luego, reemplazando la integral de la desigualdad anterior, nos queda:

$$2u(c) \leq (b-a)^{1/q} \left(\int_a^c q(t)|u|^\gamma dt\right)^{1/p}.$$

Ahora, acotamos $u(t)$ por su máximo $u(c)$. Tras despejar y elevando a la potencia p, conseguimos:

$$\frac{2^p \|u\|_\infty^{p-\gamma}}{(b-a)^{p-1}} \leq \int_a^b q(t)dt,$$

y el teorema queda demostrado. □

3.5.5. Sistemas resonantes

Consideraremos ahora el sistema de ecuaciones ordinarias no lineales,

$$\begin{cases} -(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' &= f(t)|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta \\ -(|v'(t)|^{q-2}v'(t))' &= g(t)|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v, \end{cases}$$

donde los parámetros positivos and α, β satisfacen

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1.$$

Cabe aclarar que aquí p y q no son exponentes conjugados. Los correspondientes exponentes conjugados serán notados p' y q'.

Para este problema, se tiene la desigualdad

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(b-a)^{\frac{\alpha}{p'}+\frac{\beta}{q'}}} \leq \left(\int_a^b f^+(t)\,dt\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_a^b g^+(t)\,dt\right)^{\frac{\beta}{q}}. \tag{3.5.2}$$

En este caso, escribimos:

$$2|u(c)| = \left|\int_a^c u\,dt\right| + \left|\int_c^b u\,dt\right| \leq \int_a^b |u'|\,dt$$

y usando la desigualdad de Holder,

$$2|u(c)| \leq (b-a)^{1/p'} \left(\int_a^b |u'|^p\,dt\right)^{1/p} =$$

$$= (b-a)^{1/p'} \left(\int_a^b f(t)|u|^\alpha |v|^\beta\,dt\right)^{1/p}.$$

Ahora, tomando el punto d donde $|v(t)|$ alcanza su máximo, tenemos:

$$2|u(c)| \leq (b-a)^{1/p'} |u(c)|^{\alpha/p} |v(d)|^{\beta/p} \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^{1/p} \tag{3.5.3}$$

En forma análoga se tiene la ecuación

$$2|v(d)| \leq (b-a)^{1/q'} |u(c)|^{\alpha/q} |v(d)|^{\beta/q} \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^{1/q}. \tag{3.5.4}$$

El paso siguiente consiste en elevar (3.5.3) a una potencia e_1, y (3.5.4) a una potencia e_2, tal que al multiplicar ambas ecuaciones, en la expresión

$$\frac{2^{e_1+e_2}}{(b-a)^{\frac{e_1}{p'}+\frac{e_2}{q'}}} \leq$$

$$|u(c)|^{(\frac{\alpha}{p}-1)e_1+\frac{\alpha}{q}e_2} |v(d)|^{\frac{\beta}{p}e_1+(\frac{\beta}{q}-1)e_2} \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^{\frac{e_1}{p}} \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^{\frac{e_2}{q}}$$

se cancelen $|u(c)|$ y $|u(d)|$.

Para esto, e_1 y e_2 son soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} (\frac{\alpha}{p}-1)e_1 + \frac{\alpha}{q}e_2 &= 0 \\ \frac{\beta}{p}e_1 + (\frac{\beta}{q}-1)e_2 &= 0 \end{cases}$$

que por la condición sobre los exponentes α y β, admite una solución no trivial, ya que ambas ecuaciones son equivalentes a

$$e_1\beta = e_2\alpha$$

Luego, tomando $e_1 = \alpha$, $e_2 = \beta$, obtenemos la desigualdad deseada:

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(b-a)^{\frac{\alpha}{p'}+\frac{\beta}{q'}}} \leq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^{\frac{\beta}{q}}.$$

Capítulo 4

Aplicaciones de la desigualdad de Lyapunov

4.1. Autovalores del problema con condición de borde Neumann

Estudiaremos aquí el problema de autovalores con condiciones de borde Neumann:

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \mu r(t)|u|^{p-2}u \\ u'(a) = 0 = u'(b) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

donde el peso $r(t) \in L^\infty$. Cuando el peso es positivo, existe al menos una sucesión de autovalores positivos que se obtienen con la teoría de Lyusternik Schnirelman. Si el peso cambia de signo, existe una doble sucesión de autovalores variacionales,

$$\sigma^+ = \{0 \leq \mu_1^+ < \mu_2^+ < \dots\} \qquad \sigma^- = \{0 \geq \mu_1^- > \mu_2^- > \dots\}.$$

Nuestro primer resultado es el siguiente:

Teorema 4.1.1. *El autovalor μ_1^+ es aislado; esto es, existe $\delta > 0$ tal que en el intervalo$(\mu_1^+; \mu_1^+ + \delta)$ no hay otros autovalores.*

Demostración. Por el absurdo, supongamos que existe una sucesión de autovalores del problema (4.1.1), $\mu^{(n)} \to \mu_1^+$, y sea $u^{(n)}$ una autofunción asociada a $\mu^{(n)}$ que satisface $\int_a^b r|u^{(n)}|^p = 1$. Como

$$0 < \int_a^b |(u^{(n)})'|^p = \mu^{(n)} \int_a^b r|u^{(n)}|^p,$$

el conjunto $\{u^{(n)}\}_n$ es acotado en $W^{1,p}(a,b)$, y existe una subsucesión (que llamaremos $\{u^{(j)}\}_j$) y una función $u \in W^{1,p}(a,b)$ tal que $u^{(n)} \to u$ débilmente en $W^{1,p}(a,b)$, y $\int_a^b r|u|^p = 1$. Luego,

$$\int_a^b |u'|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \mu^{(n)} \int_a^b r|u^{(n)}|^p = \mu_1^+.$$

Por lo tanto, u es una autofunción asociada a μ_1^+, y podemos suponerla positiva (de lo contrario, considerábamos la sucesión $\{-u^{(n)}\}_n$).

Como $u^{(j)} \to u$ en medida, y las $u^{(j)}$ cambian de signo, se tiene que

$$|\Omega_j^-| \to 0,$$

donde $\Omega_j^- = \{t \in (a,b) : u^{(j)}(t) < 0\}$.

Observemos que Ω_j^- no puede contener un dominio nodal interior (t_1, t_2), ya que la desigualdad de Lyapunov restringida a él, nos dice que

$$\mu_j \geq \frac{2^p}{(t_2 - t_1)^{p-1} \int_{t_1}^{t_2} r^+(t)dt},$$

lo cual no es posible ya que el lado derecho diverge, y la sucesión $\{\mu_j\}_j$ converge a μ_1^+.

Luego, podemos suponer que Ω_j^- contiene al menos un punto del borde y que $a \in \Omega_n^-$ (el otro caso es similar). Tenemos $(a, t_j) \subset \Omega_j^-$, donde t_j es el primer cero de $u^{(j)}$, pero por el Lema 3.1.1,

$$\frac{1}{(t_j - a)^{p-1} \int_a^{t_j} r^+(t)dt} \leq \mu^{(j)}.$$

Nuevamente, si $|\Omega_j^-| \to 0$, $\mu^{(j)}$ diverge, lo cual contradice la convergencia $\mu^{(j)} \to \mu_1^+$. $\square$

Sabiendo ahora que μ_1^+ es aislado, y que existen otros autovalores, tiene sentido definir el segundo autovalor positivo μ_2 del problema (4.1.1)) como:

$$\mu_2 = \min\{\mu \in \mathbb{R} : \mu > \mu_1^+ \text{ y } \mu \text{ es un autovalor}\}.$$

Nuestro siguiene paso es demostrar que este autovalor se obtiene variacionalmente con la teoría de Lyusternik Schnirelman. La demostración es similar a la de Anane y Tsouli, [5].

Proposición 4.1.2. *El autovalor μ_2 coincide con el segundo autovalor variacional μ_2^+ que se obtiene con la teoría de Lyusternik Schnirelman.*

Demostración. Sea u una autofunción asociada a μ_2. Como u cambia de signo, definimos $w_1 = k.u^+$ y $w_2 = h.u^-$, donde $k, h \in \mathbb{R}$ son elegidos para que $\int_a^c r|w_1|^p = \int_c^b r|w_2|^p = 1$. El conjunto

$$F_2 = \{s.w_1 + t.w_2 : s, t \in \mathbb{R}, \int_a^b r|s.w_1 + t.w_2|^p = 1\}$$

satisface $\gamma(F_2) \geq 2$, ya que w_1 y w_2 son linealmente independientes, con lo cual es un conjunto admisible en la caracterización variacional de μ_2^+. Además,

$$\int_a^b r|s.w_1 + t.w_2|^p = s^p \int_a^b r|w_1|^p + t^p \int_a^b r|w_2|^p,$$

lo cual nos da $|s|^p + |t|^p = 1$.

Luego, tenemos

$$\mu_2^+ = \inf_{F \in C_2^{(a,b)}} \sup_{u \in F} \int_a^b |u'|^p \leq \sup_{u \in F} \int_a^b |u'|^p \leq (|s|^p + |t|^p)\mu_2 = \mu_2,$$

y la otra desigualdad sale de la definición de μ_2. $\square$

A continuación, probaremos que toda autofunción asociada al segundo autovalor tiene un único cero.

Proposición 4.1.3. *Toda autofunción asociada a μ_2 tiene un único cero.*

Demostración. Sea c el primer cero en (a, b) de una autofunción u_2 correspondiente a μ_2. La primer autofunción v del problema

$$\begin{cases} -(|v'|^{p-2}v')' = \lambda r(t)|v|^{p-2}v \\ v(c) = 0 = v'(b) \end{cases}$$

es simple y no cambia de signo, y como la restricción de u_2 a (c, b) es una solución con $\lambda = \mu_2$, el primer autovalor λ_1 satisface $\lambda_1 \leq \mu_2$. Si $\lambda_1 = \mu_2$, entonces $v = u_2$, y en ese caso, u_2 no tiene ceros en (c, b).

Definimos $w_1 = k.u_2$ en (a, c) y cero en (c, b), y $w_2 = h.v$ en (c, b) y cero en (a, c), con $k, h \in \mathbb{R}$ tales que $\int_a^c r|w_1|^p = \int_c^b r|w_2|^p = 1$.

Como antes, introducimos el conjunto

$$F_2 = \{s.w_1 + t.w_2 : s, t \in \mathbb{R}, |s|^p + |t|^p = 1\},$$

para el cual $\gamma(F_2) \geq 2$, y es admisible en la caracterización variacional de μ_2.

Luego,

$$\mu_2 = \inf_{F \in C_2^{(a,b)}} \sup_{u \in F} \int_a^b |u'|^p \leq \sup_{u \in F} \int_a^c |u'|^p + \sup_{u \in F} \int_c^b |u'|^p \leq s^p \mu_2 + t^p \lambda.$$

Si u_2 tiene otro cero, $\lambda < \mu_2$, con lo cual llegamos a una contradicción:

$$\mu_2 \leq s^p \mu_2 + t^p \lambda < (s^p + t^p)\mu_2 = \mu_2,$$

y la proposición queda demostrada. □

A continuación, veremos que el segundo es simple y aislado, lo cual nos permite definir el tercer autovalor.

Proposición 4.1.4. *El autovalor μ_2 tiene una única autofunción asociada y es aislado.*

Demostración. Sea c el único cero en (a, b) de una autofunción u_2 correspondiente a μ_2. Sea $\tilde{u}$ otra autofunción asociada a μ_2, que por la Proposición 4.1.3 tiene un único cero $\tilde{c} \in (a, b)$.

Si $c = \tilde{c}$, entonces deben coincidir las restricciones $u_2|_{(a,c)}$ y $\tilde{u}_2|_{(a,c)}$, por ser soluciones positivas del problema mixto, por el Lema 1.2.5; y lo mismo ocurre en (c, b), con lo cual $u_2 = \tilde{u}_2$.

Si $c < \tilde{c}$, entonces se tiene una contradicción con el Teorema de oscilación 2.1.2, tomando $r(x) = \rho(x) = \mu_2$, $u = u_2$, y $v = \tilde{u}_2$, con lo cual $\tilde{u}_2$ debería tener un cero en $(a, c]$.

El caso $c > \tilde{c}$ es análogo.

Para ver que es aislado, observemos primero que lo es a izquierda, ya que hay un único autovalor menor a μ_2. A derecha, suponemos que no lo es y tomamos una sucesión $\mu_2^{(n)}$ convergente a μ_2. Igual que en la demostración del Teorema 4.1.1, se tiene una subsucesión de autofunciones convergentes a u_2, con más de dos dominios nodales, y por lo tanto, uno de estos dominios nodales debe colapsar, lo cual fuerza al autovalor a crecer por la desigualdad de Lyapunov o el Lema 3.1.1 en el dominio nodal correspondiente, en lugar de converger a μ_2. □

Remark 4.1.1. Este argumento se extiende ahora inductivamente a todos los autovalores. Sabiendo que el $n-$ésimo autovalor es simple y aislado, y que la autofunción asociada tiene n dominios nodales, se define ahora el siguiente autovalor,

$$\mu_{n+1} = \min\{\mu \in \mathbb{R} : \mu > \mu_n \text{ y } \mu \text{ es un autovalor}\}.$$

Claramente, los teoremas de oscilación garantizan que la autofunción asociada tendrá al menos $n+1$ dominios nodales. Que tiene exactamente $n+1$ se demuestra de la misma forma que en la proposición 4.1.3, ya que se separa el primer dominio nodal de la forma (a, t_1), y en (t_1, b) se puede disminuir el autovalor -manteniendo conjuntos de género n- si la autofunción tiene más de n ceros (se busca el $n-$ésimo autovalor del problema mixto en (t_1, b), que debe tener n dominios nodales).

Ahora, se puede ver que es uno de los autovalores dados por la teoría de Lyusternik Schnirelmann como en la Proposición 4.1.2, ya que los dominios nodales permiten contruír un conjunto de género apropiado para ser admisible en la caracterización variacional de μ_{n+1}.

La simplicidad se demuestra como en la Proposición 4.1.4, se considera el primer dominio nodal (a, c_1) de una autofunción u_2, y toda otra autofunción asociada al mismo autovalor debe anularse en c_1 (o se contradice el teorema de oscilación 2.1.2). Considerando ahora el intervalo (c_1, b), las autofunciones deben coincidir ya que las autofunciones del problema mixto son simples (o puede verse que en el siguiente dominio nodal (c_1, c_2) de u_2, la otra autofunción debe coincidir: por los teoremas de comparación puntual, debe anularse en c_2, y por la simplicidad del primer autovalor Dirichlet en (c_1, c_2), ambas coinciden allí; el argumento se repite en cada dominio nodal).

Finalmente, se prueba que es aislado a izquierda pues hay un número finito de autovalores menores a μ_{n+1}, y a derecha se repite el argumento del dominio nodal que se contrae, como en la Proposición 4.1.4.

Con esta observación hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 4.1.5. *Todos los autovalores del problema* (0.0.9) *se obtienen con el método de Lyusternik Schnirelman. El n-ésimo autovalor μ_n^+ es simple, y la autofunción correspondiente a μ_n tiene $n-1$ ceros en(a, b).*

Para los autovalores negativos, el resultado se obtiene a partir de este teorema cambiando el peso r por $-r$.

4.2. Cotas inferiores óptimas de autovalores

Consideremos ahora el problema de autovalores con condición de borde Dirichlet:

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases} \tag{4.2.1}$$

en (a, b). Para este problema, nuestro teorema principal es el siguiente:

Teorema 4.2.1. *Sea λ_n el $n-$ésimo autovalor del problema* (4.2.1)*). Entonces,*

$$\frac{2^p n^p}{(b-a)^{p-1} \int_a^b r(t)dt} \leq \lambda_n. \tag{4.2.2}$$

Demostración. Sea λ_n el $n-$ésimo autovalor del problema (4.2.1), y sea u_n una autofunción asociada al mismo. Como u_n tiene n dominios nodales, aplicando la desigualdad de Lyapunov en cada uno obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^p}{(t_k - t_{k-1})^{p/q}} \leq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} r(t)dt \right) \leq \lambda_n \int_a^b r(t)dt,$$

donde $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ son los ceros de u_n en $[a, b]$.

Ahora, la suma de la izquierda se minimiza cuando todos los sumandos son iguales, por la desigualdad (1.3.3), con lo cual obtenemos la cota inferior:

$$2^p n \left(\frac{n}{b-a}\right)^{p/q} \leq \lambda_n \int_a^b r(t)dt,$$

y el teorema queda demostrado. $\square$

Veamos ahora que esta cota es óptima.

Teorema 4.2.2. *Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ un número positivo. Existe una familia de pesos $r_{n,\varepsilon}(t)$ tales que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\lambda_{n,\varepsilon} - \frac{2^p n^p}{(b-a)^{p-1}\int_a^b r_{n,\varepsilon}(t)dt}\right) = 0$$

donde $\lambda_{n,\varepsilon}$ es el $n-$ésimo autovalor de

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r_{n,\varepsilon}(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Demostración. Veamos primero la cota para el autovalor λ_1. Sea c el punto medio del intervalo (a,b), y $M = \int_a^b r(t)dt$.

Sea $r_1 = M\delta_c(x)$, la función delta concentrada en c. Luego,

$$\lambda_1 = \min_{u\in W_0^{1,p}} \frac{\int_a^b |u'|^p}{\int_a^b \delta_c |u|^p} = \min_{u\in W_0^{1,p}} \frac{2\int_a^c |u'|^p}{M|u(c)|^p} = \frac{2\mu_1}{M},$$

donde μ_1 es el primer autovalor del problema de Steklov en $[a,c]$,

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' &= 0 \\ |u'(c)|^{p-2}u'(c) &= \mu|u(c)|^{p-2}u(c) \\ u(a) &= 0 \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Como vimos en (1.2.4),

$$\mu_1 = \frac{2^{p-1}}{(b-a)^{p-1}}.$$

Definamos ahora las funciones $r_{1,\varepsilon}(t)$,

$$r_{1,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \in [a, \frac{a+b}{2} - \varepsilon] \\ \frac{M}{2\varepsilon} & \text{para } t \in [\frac{a+b}{2} - \varepsilon, \frac{a+b}{2} + \varepsilon] \\ 0 & \text{para } t \in [\frac{a+b}{2} + \varepsilon, b] \end{cases}$$

Claramente, $r_{1,\varepsilon} \to r_1$ cuando $\varepsilon \to 0$, con lo cual el resultado se obtiene testeando en el cociente de Rayleigh la primera autofunción del problema de Steklov,

$$u(t) = \begin{cases} t-a & \text{si } t \in [a, (a+b)/2] \\ b-t & \text{si } t \in [(a+b)/2, b] \end{cases}$$

con lo cual vemos que la cota inferior es óptima para $n = 1$.

Consideremos ahora el caso $n \geq 2$. Dividimos el intervalo (a,b) en n subintervalos I_i de la misma longitud, y llamemos c_i al punto medio del $i-$ésimo subintervalo.

Por la simetría del problema, el $n-$ésimo autovalor correspondiente al peso

$$r_n(t) = \frac{M}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{c_i}(t)$$

restringido a I_i, es el primer autovalor en ese intervalo, con lo cual

$$\lambda_n = \frac{2n\mu_1}{M} = \frac{2^p n^p}{M(b-a)^{p-1}},$$

y la demostración se termina como en el caso unidimensional, aproximando el peso por funciones regulares. $\square$

Para el problema con condiciones de borde Neumann se tiene la siguiente cota:

Teorema 4.2.3. *Sea μ_n el $n-$ésimo autovalor del problema* (4.1.1). *Entonces,*

$$\frac{2^p(n-1)^p}{(b-a)^{p-1}\int_a^b r(t)dt} \le \mu_n.$$

Demostración. Sea u_n una autofunción asociada a μ_n. Sean $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$ sus ceros en (a,b), y c_j el máximo de $|u_n(t)|$ en (t_j, t_{j+1}) (para $1 \le j \le n-2$), $c_0 = a$ y $c_{n-1} = b$.

Por el Lema 3.1.1, entre un máximo y un cero de u_n, tenemos

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(t_j - c_{j-1})^{p-1}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(c_j - t_{j-1})^{p-1}} \le \mu_n \int_a^b r(t)dt.$$

Las sumas de la izquierda se acotan inferiormente cuando todos los sumandos coinciden, con lo cual se tiene la cota inferior:

$$2(n-1)\left(\frac{2n-2}{b-a}\right)^{p-1} \le \mu_n \int_a^b r(t)dt,$$

y el teorema queda demostrado. $\square$

A continuación veremos que estas cotas no pueden mejorarse.

Teorema 4.2.4. *Las cotas del Teorema 4.2.3 son óptimas.*

Haremos en detalle el caso del segundo autovalor. Recordemos que para el problema

$$\begin{cases} -(|v'|^{p-2}v')' &= 0 \\ -|v'|^{p-2}v'(a) &= \tau|v|^{p-2}v(a) \\ |v'|^{p-2}v'(b) &= \tau|v|^{p-2}v(b) \end{cases} \tag{4.2.5}$$

el único autovalor con una autofunción positiva es $\tau_1 = 0$. El segundo autovalor y su autofunción asociada son

$$\tau_2 = \frac{2^{p-1}}{(b-a)^{p-1}}, \qquad \text{y} \qquad v_2(t) = t - \frac{b+a}{2}. \tag{4.2.6}$$

Demostración. Definimos para cada $\varepsilon > 0$ las siguientes funciones peso $r_\varepsilon(t)$:

$$r_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{m}{2\varepsilon} & t \in [a, a+\varepsilon] \\ 0 & t \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \\ \frac{m}{2\varepsilon} & t \in [b-\varepsilon, b] \end{cases}$$

y el conjunto $C_2 = span\{w_1, w_2\} \cap \{u \in W^{1,p}(a,b) \ : \ \int_a^b r_\varepsilon(t)|u|^p dt = 1\}$, donde

$$w_1(t) = \begin{cases} t - \frac{b+a}{2} & t \in [a, \frac{b+a}{2}] \\ 0 & t \in [\frac{b+a}{2}, b] \end{cases}, \quad w_2(t) = \begin{cases} 0 & t \in [a, \frac{b+a}{2}] \\ t - \frac{b+a}{2} & t \in [\frac{b+a}{2}, b] \end{cases}$$

Este conjunto es admisible en la caracterización variational del segundo autovalor con condición de borde Neumann.

Sea $w = s_1 w_1 + s_2 w_2 \in C_2$. Tenemos:

$$1 = s_1^p \int_a^\varepsilon \frac{m}{2\varepsilon} |w_1|^p dt + s_2^p \int_\varepsilon^b \frac{m}{2\varepsilon} |w_2|^p dt = \frac{s_1^p + s_2^p}{2} \int_a^b r_\varepsilon(t) \left| t - \frac{b+a}{2} \right|^p dt,$$

ya que $\int_a^\varepsilon |w_1|^p dt = \int_\varepsilon^b |w_2|^p dt$. Ahora,

$$\int_a^b |w'|^p dt = s_1^p \int_a^{\frac{b+a}{2}} |w_1'|^p dt + s_2^p \int_{\frac{b+a}{2}}^b |w_2'|^p dt = \frac{b-a}{2}(s_1^p + s_2^p),$$

y si reemplazamos $s_1^p + s_2^p$, nos queda

$$\int_a^b |w'|^p dt = \frac{(b-a)}{\int_a^b r_\varepsilon(t) \left| t - \frac{b+a}{2} \right|^p dt} = \frac{(b-a)}{\int_a^b r_\varepsilon(t) \, |v_2|^p \, dt},$$

donde $v_2 = t - \frac{b+a}{2}$ es la segunda autofunción del problema de Steklov. Por lo tanto,

$$\mu_{2,\varepsilon} = \inf_{F \in C_2^{(a,b)}} \sup_{u \in F} \int_a^b |u'|^p dt \leq \frac{(b-a)}{\int_a^b r_\varepsilon(t) \, |v_2|^p \, dt}. \tag{4.2.7}$$

Sea $\delta_c(t)$ la delta de Dirac concentrada en c. Se tiene

$$\int_a^b r_\varepsilon(t) |v_2|^p dt \to \frac{m}{2} \int_a^b (\delta_a(t) + \delta_b(t)) |v_2|^p dt$$

cuando $\varepsilon \to 0^+$. Ahora,

$$\int_a^b (\delta_a(t) + \delta_b(t)) |v_2|^p dt = |v_2(a)|^p + |v_2(b)|^p = 2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^p.$$

Luego, como $\frac{2^p}{m(b-a)^{p-1}} \leq \mu_{2,\varepsilon}$ por el Teorema 4.2.3, cuando $\varepsilon \to 0^+$ la ecuación (4.2.7) nos da que

$$\mu_{2,\varepsilon} \to \frac{2^p}{m(b-a)^{p-1}},$$

con lo cual se tiene que la cota es óptima para la segunda autofunción. □

Observemos que las caracterizaciones variacionales de los segundos autovalores Neumann y Steklov coinciden para el peso singular r en $[a, b]$ dado por

$$r = \frac{m}{2} \delta_a(t) + \frac{m}{2} \delta_b(t).$$

Estos teoremas pueden extenderse sin mayor dificultad al caso de pesos indefinidos utilizando la desigualdad (3.5.1).

4.3. El problema de autovalores de Fučik

En esta sección consideraremos el problema de autovalores de Fučik:

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = r(t)(\alpha|u|^{p-2}u^+ - \beta|u|^{p-2}u^-) \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

donde $r(t) \in L^\infty$ es una función positiva, $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Un par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ es un autovalor de Fučik si el problema (4.3.1) tiene una solución no trivial $u \in H^1(a, b)$.

Llamaremos Σ al conjunto de autovalores de Fučik, que no es vacío ya que contiene a (μ_n, μ_n), $0 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times 0$, donde μ_n es un autovalor del problema de autovalores con condición de Neumann. Las rectas $0 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times 0$ son llamadas las curvas triviales, y llamamos $\Sigma^* = \Sigma \setminus \{0 \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times 0\}$. En este caso, $\Sigma \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Se define la primera curva Γ_1 como el primer punto de intersección de Σ^* con una recta paralela a la diagonal $y = x$ pasando por el punto $(s, 0)$ para cada $s \in \mathbb{R}$, ver [15].

Nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 4.3.1. *Sea $\int_a^b r(t)dt = m$. Existe una hipérbola $y = f(x)$ tal que $\beta \geq f(\alpha)$ para todo autovalor de Fučik $(\alpha, \beta) \in \Gamma_1$ del problema* (0.0.13).

Demostración. Sea (α, β) un autovalor de Fučik del problema (4.3.1) tal que la autofunción asociada tiene un único cero c en (a, b). Luego, si suponemos que es positiva en (a, c) y negativa en (c, b), tenemos por el Lema 3.1.1

$$\alpha \geq \frac{1}{(c-a)^{p-1} \int_a^c r(t)dt}, \tag{4.3.2}$$

$$\beta \geq \frac{1}{(b-c)^{p-1} \int_c^b r(t)dt}. \tag{4.3.3}$$

Despejando en la ecuación (4.3.2),

$$\int_c^b r(t)dt = m - \int_a^c r(t)dt \leq m - \frac{1}{\alpha(c-a)^{p-1}}$$

y si reemplazamos en (4.3.3) nos queda

$$\beta \geq \frac{1}{m(b-c)^{p-1}} \frac{\alpha(c-a)^{p-1}}{\alpha(c-a)^{p-1} - 1/m}.$$

Luego,

$$\beta \geq \frac{1}{m(b-c)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m\alpha(c-a)^{p-1} - 1}\right). \tag{4.3.4}$$

Definimos entonces la función

$$f(x) = \frac{1}{m(b-a)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m(b-a)^{p-1}x - 1}\right)$$

y el teorema queda demostrado. □

Este teorema nos da como corolario inmediato la existencia de un gap en infinito. Esto es, la primera curva del espectro de Fučik se separa de las rectas triviales $0 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times 0$. En particular, estas rectas resultan aisladas, este resultado fue demostrado en [16].

Corolario 4.3.1. *Existe $\delta > 0$ tal que no hay autovalores en $(0, \delta) \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (0, \delta)$. Más aún, $\delta = \|r\|_1^{-1}(b-a)^{1-p}$ depende sólo de p, la longitud del intervalo y la norma en L^1 del peso $r(t)$.*

Demostración. Sea $f(x)$ la curva obtenida en el Teorema 4.3.1. Claramente,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{m(b-a)^{p-1}},$$

donde $m = \int_a^b r(t)dt$. $\square$

Remark 4.3.1. Esta curva nos da una cota de la ubicación del cero c de una autofunción correspondiente al autovalor de Fučik (α, β). La desigualdad nos muestra que no puede estar cerca de los extremos del intervalo, pues

$$\lim_{c\to a^+} \left[\frac{1}{m(b-c)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m\alpha(c-a)^{p-1} - 1}\right)\right] = \infty$$

y lo mismo vale cuando $c \to b^-$.

Observemos además que las desigualdades (4.3.2) y (4.3.3) no pueden mejorarse.

Proposición 4.3.1. *Sean $c \in (a,b)$, $\varepsilon > 0$. Existe un peso $r_{\alpha\beta,\varepsilon}(t)$, $\|r_{\alpha\beta,\varepsilon}(t)\|_1 = m$, tal que $(\alpha,\beta) \in \Sigma^*$ y*

$$\alpha - \frac{1}{(c-a)^{p-1}\int_a^c r_{\alpha\beta,\varepsilon}(t)dt} \leq \varepsilon,$$

$$\beta - \frac{1}{(b-c)^{p-1}\int_c^b r_{\alpha\beta,\varepsilon}(t)dt} \leq \varepsilon.$$

La demostración es similar a la del Teorema 4.2.4 y la omitimos, es suficiente tomar una aproximación de

$$r_{\alpha\beta}(t) = s\delta_a(t) + (m-s)\delta_b(t),$$

con $0 < s < m$.

Observemos que la región

$$\left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \beta \geq \frac{1}{m(b-a)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m(b-a)^{p-1}\alpha - 1}\right)\right\}$$

contiene todos los autovalores de Fučik excepto los triviales. La proposición anterior nos dice que es localmente óptima.

Por otro lado, la desigualdad

$$\beta \geq \frac{1}{m(b-a)^{p-1}}$$

que se obtiene cuando $\alpha \to \infty$ no puede mejorarse, ya que es la cota inferior óptima del primer autovalor del problema mixto

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \mu r(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u'(b) \end{cases}$$

según vimos en la Proposición 2.2.3.

Cuando el peso $r(t)$ cambia de signo, existen en autovalores en cada cuadrante. En los cuadrantes $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$ existe una doble familia infinita de curvas que pasan por los autovalores del problema de Neumann, $\mu_n^{\pm}$. En los cuadrantes $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$, el número de curvas puede ser finito, y depende en la cantidad de cambios de signo del peso $r(t)$.

Llamando $\int_a^b r^+(t)dt = m^+$, $\int_a^b r^-(t)dt = m^-$, y $\int_a^b |r(t)|dt = m$, tenemos la siguiente extensión del Teorema 4.3.1:

Teorema 4.3.2. *Sea* $(\alpha, \beta) \in \Sigma^*$, $m^+ > 0, m^- > 0$, *y* $\alpha > 0$.

(i) Si $\beta > 0$, *existe una curva* $y = f^+(x)$,

$$f^+(x) = \frac{1}{m^+(b-a)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m^+(b-a)^{p-1}x + 1}\right),$$

tal que $\beta \geq f^+(\alpha)$.

(ii) Si $\beta < 0$, *existe una curva* $y = f^{\pm}(x)$,

$$f^{\pm}(x) = \frac{-1}{m(b-a)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m(b-a)^{p-1}x - 1}\right),$$

tal que $\beta \leq f^{\pm}(\alpha)$.

Demostración. La demostración del Teorema 4.3.1 puede adaptarse fácilmente para la primera parte, tomando $r^+(t)$ en lugar de $r(t)$.

Para la parte (ii), en el cuadrante $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$, el resultado se obtiene a partir de las siguientes desigualdades,

$$\alpha \geq \frac{1}{(b-a)^{p-1}m^+} \qquad \text{y} \qquad \beta \leq \frac{-1}{(b-a)^{p-1}m^-},$$

que se obtienen del Lema 3.1.1, reemplazando los intervalos de positividad y negatividad de la autofunción por (a, b):

$$\frac{1}{(b-a)^{p-1}|\beta|} \leq m^- = m - m^+ \leq m - \frac{1}{(b-a)^{p-1}\alpha},$$

con lo cual

$$\beta \leq \frac{-\alpha}{m(b-a)^{p-1}\alpha - 1} = \frac{-1}{m(b-a)^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{m(b-a)^{p-1}\alpha - 1}\right),$$

y el teorema queda demostrado. □

Remark 4.3.1. De la misma manera, para $\alpha < 0$ existen dos curvas $f^-(x), f^{\mp}(x)$. También pueden obtenerse del mismo modo las curvas que delimitan la región que contiene los autovalores correspondientes a las autofunciones con un número determinado de ceros, utilizando las cotas inferiores del Teorema 4.2.3.

4.4. Operadores monótonos en espacios de Orlicz

Gran parte de los resultados de este capítulo pueden extenderse a operadores monótonos más generales en espacios de Orlicz. Consideremos el problema de autovalores:

$$-(\varphi(u'))' = \lambda q(t)\varphi(u) \qquad u(a) = 0 = u(b), \tag{4.4.1}$$

donde φ es una función impar, diferenciable, y no decreciente, que satisface

$$\varphi(0) = 0, \qquad \lim_{s \to +\infty} \varphi(s) = +\infty.$$

Definamos $\psi(s) = s.\varphi(s)$, y supongamos que es una función par y convexa. Diremos que una función $u \in C^1(a, b)$ es una solución del problema (4.4.1) si $\varphi(u')$ es absolutamente continua y se satisface la ecuación en casi todo punto.

El problema de la existencia de un primer autovalor ha sido estudiado en $\mathbb{R}^n$ (con técnicas muy diferentes) en García Huidobro, Manásevich, Le y Schmitt [36], Gossez y Manásevich [39], Mustonen y Tienari [57], y Tienari [71]. En estos trabajos se prueba la existencia de un autovalor principal, cuya autofunción asociada es positiva.

Sin embargo, la pérdida de homogeneidad de la ecuación nos obliga a hablar de un autovalor $\lambda_1^{(\mu)}$, donde μ indica la restricción $\{u : \int_a^b q(t)\Phi(u)dt = \mu\}$. Un problema interesante es decidir si

$$\lambda_1 = \inf_{\mu} \lambda_1^{(\mu)}$$

es mayor que cero. Asumiendo la condición Δ_2, una respuesta positiva fue obtenida en [36] para problemas sin pesos, y en el caso undimensional, una demostración diferente se deduce de la cuarta demostración de la desigualdad de Lyapunov de la sección 3.4 (ver [18]).

Si la función $\varphi(s)$ no satisface la condición Δ_2, por la ecuación (3.4.3), como $\psi(s) = s.\varphi(s)$,

$$\frac{2\varphi\left(\frac{2u(c)}{b-a}\right)}{\varphi(u(c))} = \frac{\psi\left(\frac{2u(c)}{b-a}\right)}{\frac{\psi(u(c))}{b-a}} \le \lambda \int_a^b q(t)dt,$$

se tiene de inmediato que si la longitud del intervalo (a, b) es menor o igual a 2, entonces

$$\frac{2}{\int_a^b q(t)dt} \le \lambda_1.$$

En [37], García Huidobro, Manásevich y Zanolín estudiaron el problema de Fučik con condición de borde Dirichlet para esta clase de ecuaciones. Para el problema con condición de borde Neumann,

$$-(\varphi(u'))' = r(t)(\alpha\varphi(u^+) - \beta|u|^{p-2}\varphi(u^-)) \qquad u'(a) = 0 = u'(b),$$

se tiene un resultado similar al obtenido para el p-laplaciano si la función $\psi(s) = s.\varphi(s)$ satisface la condición Δ_2 (o si la longitud del intervalo es menor a 2). En este caso, las curvas triviales $0 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times 0$ son aisladas en el espectro y también existe un gap en infinito.

El punto clave para obtener este resultado es que 0 es el único autovalor con una autofunción positiva para el problema

$$-(\varphi(u'))' = \lambda r(t)\varphi(u) \qquad u'(a) = 0 = u'(b), \tag{4.4.2}$$

con lo cual se tiene, gracias a la versión de Lyapunov de la cuarta demostración, que es aislado a derecha, lo cual nos permite definir el segundo autovalor del problema que permanece acotado lejos de cero.

Demostremos aquí unicamente esta propiedad, ya que el resto de la demostración es similar a la del Teorema 4.3.1.

Teorema 4.4.1. *Sea r una función estrictamente positiva. Entonces, el primer autovalor $\lambda = 0$ del problema* (4.4.2) *es simple y aislado, y es el único con una autofunción positiva.*

Demostración. Claramente, $\lambda = 0$ es un autovalor con una autofunción asociada constante. Por otro lado, es simple, ya que si u es otra autofunción asociada,

$$\varphi(u')' = 0$$

en casi todo punto, con lo cual, como $\varphi(u')$ es absolutamente continua, se tiene $\varphi(u')$ constante. Luego, u' es constante, y u debe ser una recta, pero las condiciones de borde implican que es constante.

Supongamos ahora que existe otro autovalor $\lambda \neq 0$, con una autofunción asociada u positiva. Multiplicamos (4.4.2) por una constante c e integrando por partes nos queda:

$$0 = \int_a^b \varphi(u')c' dt = \lambda \int_a^b r(t)\varphi(u) c dt,$$

con lo cual, esta integral debe ser nula, y esto sólo ocurre si $\lambda = 0$, ya que u es positiva. $\square$

Capítulo 5

Estimaciones asintóticas de autovalores

En este capítulo buscaremos estimaciones asintóticas para los autovalores del problema

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \tag{5.0.1}$$

En primer lugar, definimos la función $N(\lambda)$ que cuenta el número de autovalores menores o iguales que λ:

$$N(\lambda) = \#\{k \ : \ \lambda_k \leq \lambda\}.$$

De ser necesario, escribiremos $N(\lambda, I)$, $N_D(\lambda)$, ó $N_n(\lambda)$ para referirnos al número de autovalores en un intervalo I, o para distinguir entre condiciones de borde Dirichlet y Neumann.

A partir de una fórmula asintótica de la forma

$$N(\lambda) \sim c\lambda^d \qquad \text{cuando} \quad \lambda \to +\infty,$$

reemplazando el k-ésimo autovalor en esta expresión, tenemos:

$$k \sim c\lambda_k^d,$$

con lo cual se tiene la estimación asintótica para el $k-$ésimo autovalor:

$$\lambda_k \sim \frac{1}{c}k^{1/d}.$$

Para obtener el desarrollo asintótico de $N(\lambda)$ veremos a continuación dos técnicas, que esencialmente consisten en reducir el problema a una familia de problemas con coeficientes constantes.

5.1. Sturm-Liouville bracketing

El "Sturm-Liouville bracketing" utiliza la estructura nodal de las autofunciones. Recordemos que el $n-$ésimo autovalor del problema (5.0.1) en $I = (a, b)$ tiene exactamente n dominios nodales ($n - 1$ ceros interiores).

Teorema 5.1.1. *Sea $N(\lambda)$ la función que cuenta los autovalores del problema (5.0.1) en $I = (a, b)$, y sea $c \in (a, b)$. Entonces,*

$$N(\lambda, I) \sim N(\lambda, I_1) + N(\lambda, I_2) \tag{5.1.1}$$

cuando $\lambda \to \infty$, donde $I_1 = (a, c)$ y $I_2 = (c, b)$.

Demostración. Fijemos λ, y sea λ_n el mayor autovalor del problema (5.0.1) menor o igual a λ, y sea u_n una autofunción asociada.

Consideremos los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} -v'' &= \mu r(t) v \qquad t \in (a,c) \\ v(a) &= 0 = v(c), \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

$$\begin{aligned} -w'' &= \nu r(t) w \qquad t \in (c,b) \\ w(c) &= 0 = w(b). \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Sea k el número de ceros de u_n en $(a,c]$, y $n-k-1$ el número de ceros en (c,b).

Sea μ_j el mayor autovalor del problema (5.1.2) menor o igual que λ, y v_j una autofunción asociada. Veremos que $j-1$, el número de ceros de v_j, satisface

$$k-2 \leq j-1 \leq k+1. \tag{5.1.4}$$

Supongamos que u_j tiene $k+2$ zeros. Por el teorema de comparación de Sturm, $\mu_j > \lambda_n$.

Sea $u_{\mu_j}(t)$ la única solución de

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \mu_j r(t)|u|^{p-2}u$$

$$u_{\mu_j}(c) = 0 \qquad u'_{\mu_j}(c) = v'_j(c),$$

por unicidad, $u_{\mu_j}(t)$ coincide con $v_j(t)$ en (a,c), con lo cual tiene $k+2$ ceros en (a,c). Por otra parte, como $\mu_j \geq \lambda_n$, $u_{\mu_j}(t)$ tiene al menos $n-k-1$ ceros en (c,b). Luego, $u_{\mu_j}(t)$ tiene al menos $n+1$ ceros interiores en (a,b). Pero el autovalor λ_{n+1} tiene sólo n, con lo cual

$$\lambda_{n+1} < \mu_j \leq \lambda,$$

lo cual contradice que λ_n era el mayor autovalor del problema (5.1.2) menor o igual que λ.

Supongamos ahora que v_j tiene $k-3$ ceros. En este caso, $\mu_j < \lambda_n < \lambda$.

Sea ahora v_{j+1} la autofunción del problema (5.1.2), con $k-2$ ceros en (a,c), y sea μ_{j+1} el autovalor correspondiente. Por la teoría de Sturm-Liouville,

$$\mu_{j+1} < \lambda_n$$

ya que de lo contrario, $u_n(t)$ tendría sólo $k-1$ ceros en (a,c), en lugar de k. Luego,

$$\mu_{j+1} < \lambda_n \leq \lambda,$$

y esto contradice que μ_j es el mayor autovalor del problema (5.1.2) menor o igual que λ.

El problema (5.1.3) es análogo, sea ν_h el mayor autovalor menor o igual que λ, y w_h una autofunción asociada. Luego, $h-1$, el número de ceros de w_h, satisface

$$n-k-3 \leq h-1 \leq n-k. \tag{5.1.5}$$

Ahora, las desigualdades (5.1.4) y (5.1.5) nos dan

$$N(\lambda, I_1) + N(\lambda, I_2) - 3 \leq N(\lambda, I) \leq N(\lambda, I_1) + N(\lambda, I_2) + 3$$

y el teorema queda demostrado. □

Remark 5.1.1. Claramente, el teorema es válido para una descomposición finita arbitraria.

5.2. Dirichlet Neumann bracketing

En esta sección veremos otra demostración del Teorema 5.1.1. La demostración se basa en el clásico Dirichlet Neumann Bracketing de Courant. Para el $p-$Laplaciano, fue probada primero una versión diferente por Friedlander [31], que puede simplificarse dado que en el caso unidimensional todo autovalor es simple.

Teorema 5.2.1. *Sea $N(\lambda)$ la función que cuenta los autovalores del problema* (5.0.1) *en $I = (a, b)$, y sea $c \in (a, b)$. Entonces,*

$$N_D(\lambda, I_1)+N_D(\lambda, I_2) \leq N_D(\lambda, I) \leq N_N(\lambda, I) \leq N_N(\lambda, I_1)+N_N(\lambda, I_2) \quad (5.2.1)$$

cuando $\lambda \to \infty$, donde $I_1 = (a, c)$ y $I_2 = (c, b)$.

Demostración. La demostración se basa en las siguientes inclusiones

$$W_0^{1,p}(I_1) \oplus W_0^{1,p}(I_2) \subset W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I_1) \oplus W^{1,p}(I_2),$$

y en la caracterización variacional de los autovalores.

Observemos que

$$\begin{aligned} M(X) &= \left\{u \in X \;:\; \int_\Omega r(t)|u|^p \,dt = 1\right\} \\ &\subset \left\{u \in Y \;:\; \int_\Omega r(t)|u|^p \,dt = 1\right\} = M(Y), \end{aligned}$$

con lo cual $C_k(X) \subset C_k(Y)$, y al aplicar el cociente de Rayleigh, se tienen las distintas desigualdades, para $X = W_0^{1,p}(I_1) \oplus W_0^{1,p}(I_2)$ (ó $X = W^{1,p}(I)$), $Y = W_0^{1,p}(I)$ (ó $Y = W^{1,p}(I_1) \oplus W^{1,p}(I_2)$). □

5.3. La distribución asintótica de los autovalores

En esta sección obtendremos el desarrollo asintótico de $N(\lambda)$:

Teorema 5.3.1. *Sea $\{\lambda_n\}_n$ la sucesión de autovalores del problema* (5.0.1)*, r una función estrictamente positiva y acotada, y $r^{1/p}$ integrable Riemann. Entonces,*

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_0^b r^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p}) \quad (5.3.1)$$

cuando $\lambda \to \infty$.

Demostración. Recordemos que por el Lema 1.1.1, si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de autovalores del problema (5.0.1) en un intervalo arbitrario I, y $m \leq r(t) \leq M$, entonces

$$\frac{1}{M}\frac{\pi_p^p}{|I|^p}k^p \leq \lambda_k \leq \frac{1}{m}\frac{\pi_p^p}{|I|^p}k^p, \quad (5.3.2)$$

de donde se deduce

$$\frac{|I|m^{1/p}}{\pi_p}\lambda^{1/p} - 1 \leq N(\lambda, I) \leq \frac{|I|M^{1/p}}{\pi_p}\lambda^{1/p}, \quad (5.3.3)$$

pues

$$\#\left\{k : \frac{\pi_p^p k^p}{|I|^p M} \leq \lambda\right\} \leq \#\{k : \lambda_k \leq \lambda\} \leq \#\left\{k : \frac{\pi_p^p k^p}{|I|^p m} \leq \lambda\right\}. \quad (5.3.4)$$

El lado izquierdo es mayor que

$$\frac{|I|m^{1/p}}{\pi_p}\lambda^{1/p} - 1,$$

con lo cual se tiene la cota superior. De la misma manera, obtenemos

$$N(\lambda, (0, |I|)) \leq \left[\frac{|I|m^{1/p}}{\pi_p}\lambda^{1/p}\right] \leq \frac{|I|m^{1/p}}{\pi_p}\lambda^{1/p}.$$

Sea ahora $[a, b] = \overline{\cup_{1\leq j\leq J} I_j}$, $I_j \cap I_k = \emptyset$ con $|I_j| = (b-a)/J = \eta$. Sean

$$m_j = \inf_{t\in I_j} r(t), \qquad M_j = \sup_{t\in I_j} r(t).$$

Elegimos $\eta > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{J} \eta m_j^{1/p} \geq \int_a^b r^{1/p}(t)dt - \varepsilon_1, \qquad \sum_{j=1}^{J} \eta M_j^{1/p} \leq \int_a^b r^{1/p}(t)dt + \varepsilon_2,$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ arbitrariamente pequeños.

Ahora, por el Teorema 5.2.1 tenemos

$$\sum_{j=1}^{J} N_D(\lambda, I_j) \leq N(\lambda, [a, b]) \leq \sum_{j=1}^{J} N_N(\lambda, I_j).$$

Luego, como

$$N_D(\lambda, I_j) \geq m_j^{1/p}\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} - 1 \quad \text{y} \quad N_N(\lambda, I_j) \leq M_j^{1/p}\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p},$$

obtenemos

$$\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\left(\int_a^b r^{1/p} - \varepsilon_1\right) - J \leq N(\lambda, [a, b]) \leq \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\left(\int_a^b r^{1/p} + \varepsilon_2\right).$$

Cuando $\lambda \to \infty$, tenemos

$$\frac{N(\lambda, [a, b])}{\lambda^{1/p}} \to \frac{1}{\pi_p}\int_a^b r^{1/p}(t)dt$$

y el teorema queda demostrado. □

Como corolario del Teorema 5.3.1 se tiene el comportamiento asintótico de los autovalores:

Teorema 5.3.2. *Sea* $\{\lambda_n\}_n$ *la sucesión de autovalores del problema* (5.0.1). *Entonces, cuando* $n \to \infty$,

$$\lambda_n \sim \left(\frac{\pi_p n}{\int_a^b r^{1/p}(t)dt}\right)^p. \tag{5.3.5}$$

Para su demostración, es suficiente evaluar $N(\lambda)$ en λ_n y utilizar el comportamiento asintótico de esta función.

5.4. Autovalores de problemas singulares

En esta sección estimaremos el número de autovalores de un problema singular que generaliza el p-Laplaciano radial:

$$\begin{cases} -(r^\alpha|u'|^{p-2}u')' &= \lambda m(r) r^\alpha |u|^{p-2}u \\ u'(0) &= 0 \\ u(b) &= 0 \end{cases} \tag{5.4.1}$$

donde $0 \leq \alpha \leq p-1$, y $m(r)$ es una función acotada y estrictamente positiva.

En este caso, no podemos acotar por debajo los términos r^α para obtener cotas inferiores de los autovalores, que se traducen en una cota superior para $N(\lambda)$.

La idea es utilizar la desigualdad de Lyapunov, Teorema 3.5.2, para obtener una cota superior para la función $N(\lambda)$, y luego refinar esta cota. Nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 5.4.1. *Sea $\{\lambda_n\}_n$ la sucesión de autovalores del problema (5.4.1), donde m es una función estrictamente positiva y acotada, y $m^{1/p}$ es una función integrable Riemann. Entonces,*

$$N(\lambda) = \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_0^b m^{1/p}(r)dr + o(\lambda^{1/p}) \tag{5.4.2}$$

cuando $\lambda \to \infty$.

Dividimos la demostración en tres partes, primero encontraremos una cota inferior para la función $N(\lambda)$, luego una cota superior, y finalmente refinaremos la cota superior.

5.4.1. Cota superior para $N(\lambda)$

Para obtener la cota superior de $N(\lambda)$ aplicamos la siguiente desigualdad,

$$\frac{1}{[\int_0^b \sigma^{\frac{-1}{p-1}}(r)dr]^{p-1}} \leq \int_0^b \rho(r)dr, \tag{5.4.3}$$

cuya obtención es similar a la del Teorema 3.5.2, del mismo modo que obtuvimos la ecuación (3.3.2).

Esta desigualdad nos da una cota inferior para los autovalores del problema (5.4.1):

Teorema 5.4.1. *Sea λ_n el $n-$ésimo autovalor del problema (5.4.1), y $m(r) \leq M$. Entonces,*

$$\lambda_n \geq \frac{C(2n-1)^p}{Mb^p}, \tag{5.4.4}$$

donde C depende sólo de p y α, y viene dada por

$$C = (\alpha+1)\left(\frac{p-1-\alpha}{p-1}\right)^{p-1}.$$

Demostración. Comencemos por el primer autovalor. Reemplazamos σ por r^α en la desigualdad (5.4.3), y ρ por $\lambda_1 r^\alpha M$. Calculando las integrales tenemos

$$\frac{\left(\frac{p-1-\alpha}{p-1}\right)^{p-1}}{b^{p-1-\alpha}} \leq \frac{\lambda_1 M b^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Luego,

$$\lambda_1 \geq \frac{C}{Mb^p}$$

donde C es

$$C = (\alpha+1)\left(\frac{p-1-\alpha}{p-1}\right)^{p-1}.$$

Para los otros autovalores procedemos como antes. Sea λ_n el $n-$ésimo autovalor y sean $\{r_j\}_{j=1}^n$ los ceros de una autofunción asociada u_n, donde $0 < r_1 < \ldots < r_n = b$. En cada intervalo (r_j, r_{j+1}) existe un punto c_j donde se anula la derivada (por el Lema 1.2.3), y sea $c_0 = 0$. Ahora, en los $2n-1$ intervalos (c_0, r_1), (r_1, c_1), (c_1, r_2), ..., (c_{n-1}, b) aplicamos la desigualdad (5.4.3). Entonces,

$$\begin{aligned}(2n-1)\left(\frac{2n-1}{\int_a^b r^{\frac{-\alpha}{p-1}}\,dr}\right)^{p-1} &\leq \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{[\int_{c_{j-1}}^{r_j} r^{\frac{-\alpha}{p-1}}\,dr]^{p-1}} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{[\int_{r_j}^{c_j} r^{\frac{-\alpha}{p-1}}\,dr]^{p-1}}\\ &\leq \lambda_n M\int_a^b r^\alpha dr,\end{aligned}$$

y obtenemos

$$\lambda_n \geq \frac{C(2n-1)^p}{Mb^p},$$

donde C es la misma de antes, y el teorema queda demostrado. □

Este teorema nos da una cota superior para $N(\lambda)$:

Proposición 5.4.2. *Existe una constante positiva K independiente de λ y b tal que*

$$N(\lambda) \leq bK\lambda^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}. \tag{5.4.5}$$

Demostración. La cota inferior para λ_n dada por la ecuación (5.4.4) nos da

$$\begin{aligned}N(\lambda) &\leq \#\{n : \lambda_n \leq \lambda\}\\ &\leq \#\left\{n : \tfrac{C(2n-1)^p}{Mb^p} \leq \lambda\right\}\\ &\leq \left[\tfrac{b}{2}\left(\tfrac{M\lambda}{C}\right)^{\frac{1}{p}} + \tfrac{1}{2}\right],\end{aligned}$$

donde $[a]$ denota la parte entera de a, y la proposición queda demostrada. □

5.4.2. Cota inferior para $N(\lambda)$

La cota inferior es más sencilla:

Proposición 5.4.3. *Sean $\{\lambda_n\}_n$ los autovalores del problema (5.4.1). Entonces,*

$$N(\lambda) \geq \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{\pi_p}\int_0^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr + o(\lambda^{\frac{1}{p}}). \tag{5.4.6}$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ fijo, y consideremos el siguiente problema de autovalores en $[\delta, b]$:

$$\begin{cases} -(r^\alpha|v'|^{p-2}v')' &= \mu m(r) r^\alpha |v|^{p-2}v\\ v(\delta) &= 0\\ v(b) &= 0\end{cases} \tag{5.4.7}$$

El espectro consiste en una sucesión de autovalores $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$, y la función $N_D(\lambda, [\delta, b])$ tiene el siguiente desarrollo asintótico:

$$N_D(\lambda, [\delta, b]) = \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{\pi_p} \int_\delta^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr + o(\lambda^{\frac{1}{p}}). \tag{5.4.8}$$

Ahora, por el Teorema de oscilación de Sturm 1.2.2, si $\lambda_n \geq \mu_n$, la autofunción u_n tendría n ceros en $(0, b)$, una contradicción. Luego, tenemos $\lambda_n \leq \mu_n$, con lo cual

$$N_D(\lambda, [\delta, b]) \leq N(\lambda).$$

Fijemos ahora $\varepsilon > 0$, y veamos que existe $\lambda(\varepsilon)$ tal que

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{1}{\pi_p} \int_0^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr - \varepsilon$$

para todo $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$.

Elegimos δ que cumpla

$$\frac{1}{\pi_p} \int_0^\delta m^{\frac{1}{p}}(r)dr < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora,

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{N(\lambda, [\delta, b])}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{1}{\pi_p} \int_0^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{o(\lambda^{\frac{1}{p}})}{\lambda^{\frac{1}{p}}},$$

y sea $\lambda(\varepsilon)$ tal que

$$\left| \frac{o(\lambda^{\frac{1}{p}})}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$, y la proposición queda demostrada. □

5.4.3. Demostración del Teorema 5.4.1

El último paso para demostrar el Teorema 5.4.1 es refinar la cota superior.

Proposición 5.4.4. *Tenemos el siguiente desarrollo asintótico:*

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{\pi_p} \int_0^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr \tag{5.4.9}$$

Demostración. Sea ε pequeño, y separemos $[0, b]$ en dos intervalos, $I_1 = [0, \varepsilon]$, $I_2 = [\varepsilon, b]$. El problema en I_2 es regular, y el comportamiento asintótico de $N(\lambda)$ es

$$N(\lambda, I_2) = \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{\pi_p} \int_\varepsilon^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr + o(\lambda^{\frac{1}{p}}).$$

Por la Proposición 5.4.2, el número de autovalores menores que λ para el problema singular en I_1 está acotado por $\varepsilon K \lambda^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}$. Luego,

$$\begin{array}{ll} N_N(\lambda, I_1) + N_N(\lambda, I_2) & \leq \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{\pi_p} \int_\varepsilon^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr + \varepsilon K \lambda^{\frac{1}{p}} + o(\lambda^{\frac{1}{p}}) \\ & \leq \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{\pi_p} \int_0^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr + \varepsilon K \lambda^{\frac{1}{p}} + o(\lambda^{\frac{1}{p}}) \end{array}.$$

Por lo tanto, de la Proposición 5.4.3 y la última desigualdad obtenemos

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{\pi_p} \int_0^b m^{\frac{1}{p}}(r)dr,$$

lo cual completa la demostración de la Proposición 5.4.4, y el Teorema 5.4.1 queda demostrado. □

Capítulo 6

Autovalores radiales en $\mathbb{R}^N$

6.1. El problema de autovalores

En este capítulo vamos a estudiar la distribución asintótica de los autovalores del p-Laplaciano radial en $\mathbb{R}^N$,

$$-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = (\lambda - q(|x|))|u|^{p-2}u,$$

que esencialemente es un problema unidimensional,

$$\begin{gathered} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}(\lambda - q(r))|u|^{p-2}u \\ u'(0) = 0 \quad u \in L^p(0,\infty; r^{N-1}), \end{gathered} \tag{6.1.1}$$

para el cual fue probada en [12] la existencia de una sucesión de autovalores simples,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty,$$

para potenciales $q(r) \in C^1(0,\infty)$ que satisfacen:

(a) Existe $\alpha > 0$ y $\beta > max\{(p-n)/(p-1), 0\}$ tal que $q(r) \geq \alpha r^\beta$ para r suficientemente grande, y $q'(r)/q(r)^{1+1/p} \to 0$ cuando $r \to \infty$.

Además, impondremos en el potencial $q(r)$ la siguiente condición:

(b) Existe $r_0 > 0$ tal que $q(r)$ es creciente para $r \geq r_0$, y $q(0) = 0$.

La condición $q(0) = 0$ no es en realidad muy restrictiva, sólo fija una cota inferior para el primer autovalor: $\lambda_1 > 0$. El caso general $q(0) = c \neq 0$ se deduce de éste, ya que definiendo $\hat{\lambda} = \lambda - c$ $\hat{q}(x) = q(x) - c$, se obtiene

$$\hat{\lambda} - \hat{q}(x) = (\lambda - c) - (q(x) - c) = \lambda - q(x).$$

Nuestro resultado principal es el siguiente teorema:

Teorema 6.1.1. *Sea $\{\lambda_n\}_n$ la sucesión de autovalores del problema* (6.1.1), *y $r_{\lambda_n} \in R$ tal que $q(r_{\lambda_n}) = \lambda_n$, donde $q(r)$ satisface las condiciones (a) y (b). Entonces,*

$$(n-1) \sim \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr.$$

Y este teorema nos permite obtener el desarrollo asintótico de $N(\lambda)$:

Corolario 6.1.1. *Sean $\{\lambda_n\}_n$ y r_{λ_n} como en el Teorema 6.1.1. Entonces,*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^{r_\lambda} (\lambda - q(r))^{1/p} dr$$

cuando $\lambda \to +\infty$.

6.2. Una formulación equivalente

Plantearemos aquí las soluciones de la ecuación (6.1.1) en términos de la transformada de Prufer del Capítulo 1. Recordemos que esta fórmula es válida para $r \in (0, r_\lambda)$, donde r_λ satisface

$$q(r_\lambda) = \lambda.$$

Las soluciones de la ecuación (6.1.1) satisfacen $u'(0) = 0$, lo cual nos da una condición inicial para la ecuación diferencial de primer orden para la función fase en $r = 0$,

$$\varphi(0) = \pi_p/2.$$

Recordemos la ecuación (1.1.12), pues la necesitaremos a lo largo de este capítulo:

$$\varphi' = -\left(\frac{1-N}{p-1}t^{-1} + \frac{q'}{p(\lambda - q)}\right)|C_p|^{p-2}C_pS_p + \left(\frac{\lambda - q}{p-1}\right)^{1/p}. \qquad (6.2.1)$$

Si u_n es la $n-$ésima autofunción, con ceros $r_1 < r_2 < \ldots < r_{n-1}$, (donde $0 < r_1$), tenemos

$$u_n(r) = f(r)\rho_n(r)S_p(\varphi_n(r)),$$

y debe ser

$$\varphi_n(r_j) = j\pi_p, \qquad 1 \leq j \leq n-1.$$

Esto nos permite reformular el Teorema 6.1.1 en función del número de ceros de las autofunciones. Definimos entonces

$$N(u_n, (a,b)) = \#\{j \in N : r_j \in [a,b)\},$$

que cuenta el número de ceros r_j de u_n en (a,b). Como $N(u_n,(0,\infty)) = n-1$, tenemos:

Teorema 6.2.1. *Sean $\{(\lambda_n, u_n)\}_n$ los autovalores y autofunciones del problema (6.1.1)), y $r_{\lambda_n} \in \mathbb{R}$ tal que $q(r_{\lambda_n}) = \lambda_n$, donde $q(r)$ satisface las condiciones (a) y (b). Entonces,*

$$N(u_n, (0,\infty)) \sim \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr.$$

Ahora, nuestro objetivo es hallar el desarrollo asintótico de $N(u_n,(0,\infty))$, con lo cual habremos demostrado el Teorema 6.1.1.

6.3. Demostración del Teorema 6.1.1

Vamos a dividir la demostración del Teorema (6.2.1) en varios lemas.

Lema 6.3.1. *Sean $\{(\lambda_n, u_n)\}_n$ y $q(r)$ como en el Teorema 6.2.1. Entonces,*

$$N(u_n, (0,\infty)) \sim N(u_n, (0, r_{\lambda_n})).$$

Demostración. Supongamos que u_n tiene dos ceros consecutivos $z_1, z_2 \in (r_{\lambda_n}, \infty)$. Entonces, u_n es una solución en (z_1, z_2) de

$$-(r^{N-1}|u_n'|^{p-2}u_n')' = r^{N-1}(\lambda_n - q(r))|u_n|^{p-2}u_n.$$

Multiplicando por u_n la ecuación previa, e integrando por partes el lado izquierdo, obtenemos

$$\int_{z_1}^{z_2} r^{N-1}|u_n'|^p dr = \int_{z_1}^{z_2} r^{N-1}(\lambda_n - q(r))|u_n|^p dr,$$

lo cual es imposible, ya que $\lambda_n - q(r) < 0$ en (r_{λ_n}, ∞), y el lado izquierdo sería negativo a menos que $u_n \equiv 0$.

Luego, como u_n tiene $n-1$ ceros, al menos $n-2$ pertenecen al intervalo $(0, r_{\lambda_n})$, lo cual nos da

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(u_n,(0,\infty))}{N(u_n,(0,r_{\lambda_n}))} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n-2} = 1$$

Por otro lado, $N(u_n,(0,\infty)) \geq N(u_n,(0,r_{\lambda_n}))$. Entonces,

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{N(u_n,(0,\infty))}{N(u_n,(0,r_{\lambda_n}))},$$

y el lema queda demostrado. □

Observemos que

$$N(u_n,(0,r_{\lambda_n})) = N(u_n,(0,a)) + N(u_n,[a,r_{\lambda_n})),$$

para todo $a \in (0, r_{\lambda_n})$. Elegimos entonces a tal que

$$q(a) = \lambda_n - r_{\lambda_n}^{1-p-N}. \tag{6.3.1}$$

Lema 6.3.2. *Sean* $\{(\lambda_n, u_n)\}_n$ *y* $q(r)$ *como en el Teorema* (6.2.1). *Entonces,*

$$N(u_n,(a,r_{\lambda_n})) \sim O(1).$$

Demostración. Sea r_0 fijo tal que $q(r)$ es creciente para $r \geq r_0$. Podemos asumir que λ_n es suficientemente grande como para que sea $a > max\{1, r_0\}$.

Observemos que

$$\lambda_n - q(r) \leq \lambda_n - q(a) = r_{\lambda_n}^{1-p-N}$$

ya que q es creciente para $r \geq r_0$. Luego, por las desigualdades

$$1 \leq r^{N-1} \leq r_{\lambda_n}^{N-1},$$

tenemos que en las siguientes ecuaciones:

$$-(r^{N-1}|u_n'|^{p-2}u_n')' = r^{N-1}(\lambda_n - q(r))|u_n|^{p-2}u_n,$$

y

$$-(|v'|^{p-2}v')' = r_{\lambda_n}^{N-1}(r_{\lambda_n}^{1-p-N})|v|^{p-2}v.$$

Por la teoría de oscilación de Sturm Liouville, entre dos ceros consecutivos de u_n, tenemos al menos un cero de v. Luego, una cota superior para el número de ceros de u es $N(v,[a,r_{\lambda_n})) + 1$, donde $N(v,[a,r_{\lambda_n}))$ es el número de ceros de v. Notemos, además, que el número de ceros de dos soluciones diferentes de la misma ecuación puede diferir a lo sumo en uno. Entonces, utilizando las soluciones explícitas para coeficientes constantes (1.1.2), una solución explícita es

$$v(r) = S_p\left(\frac{r}{r_{\lambda_n}(p-1)^{1/p}}\right)$$

Claramente, el número de ceros de v está acotado por

$$\frac{r_{\lambda_n} - a}{\pi_p r_{\lambda_n}(p-1)^{1/p}} + 1 = O(1),$$

que no depende de n. □

Lema 6.3.3. *Sean* $\{(\lambda_n, u_n)\}_n$ *y* $q(r)$ *como en el Teorema 6.2.1. Entonces,*

$$N(u_n, (0,a)) \sim \frac{1}{\pi_p (p-1)^{1/p}} \int_0^a (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr.$$

Demostración. Utilizamos la transformada de Prufer, y la función fase (6.2.1) de la $n-$ésima autofunción satisface

$$\varphi_n(0) = \pi_p/2, \qquad \varphi_n(a) = \theta_a$$

Integrando la ecuación (6.2.1) tenemos

$$\begin{aligned} \theta_a - \tfrac{\pi_p}{2} &= \varphi_n(a) - \varphi_n(0) \\ &= \int_0^a \left(\tfrac{1-N}{(p-1)r} + \tfrac{q'}{p(\lambda_n - q)} \right) |C_p|^{p-2} C_p S_p + \left(\tfrac{\lambda_n - q}{p-1} \right)^{1/p} dr \\ &= \int_0^a \left(\tfrac{\lambda_n - q}{p-1} \right)^{1/p} dr + R_1 + R_2, \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

donde

$$R_1 = -\frac{1-N}{p-1} \int_0^a r^{-1} |C_p|^{p-2} C_p S_p dr, \tag{6.3.3}$$

$$R_2 = -\frac{1}{p} \int_0^a \frac{q'}{\lambda_n - q} |C_p|^{p-2} C_p S_p dr. \tag{6.3.4}$$

Luego, debemos hallar cotas para R_1 y R_2.

El término R_1 no aparece cuando $N = 1$. Asumamos entonces que $N \geq 2$. Por la identidad (1.1.6), tenemos $|C_p(r)| \leq 1$ y $|S_p(r)| \leq 1$. Luego,

$$\left| \frac{p-1}{1-N} R_1 \right| \leq \int_0^1 |r^{-1} S_p| dr + \int_1^a r^{-1} dr.$$

Como $S_p(0) = 0$, $S_p'(0) = 1$, por la regla de L'Hopital, la primera integral es acotada independientemente de n. La segunda está acotada por $\log(a)$, y la condición (a) nos da

$$\lambda_n > \lambda_n - r_{\lambda_n}^{1-p-N} = q(a) \geq \alpha a^{\beta}.$$

Entonces,

$$\log(\lambda_n) > \beta \log(a) + \log(\alpha),$$

con lo cual tenemos

$$|R_1| = O(\log(\lambda_n)). \tag{6.3.5}$$

Acotemos ahora R_2. Tenemos

$$\begin{aligned} |pR_2| &\leq \int_0^a \tfrac{q'}{\lambda_n - q} dr \\ &= -\log(\lambda_n - q(a)) + \log(\lambda_n - q(0)) \\ &\leq \log(\lambda_n) - \log(r_{\lambda_n}^{1-p-N}) \\ &\leq \log(\lambda_n) + (N+p-1)\log(r_{\lambda_n}). \end{aligned}$$

Otra vez, por la condición (a),

$$\lambda_n = q(r_{\lambda_n}) \geq \alpha r_{\lambda_n}^{\beta}.$$

Luego,

$$\log(\lambda_n) \geq \beta \log(r_{\lambda_n}) + \log(\alpha)$$

y se tiene

$$|R_2| = O(\log(\lambda_n)). \tag{6.3.6}$$

Finalmente, como

$$N(u_n,(0,a)) = \left[\frac{\theta_a - \pi_p/2}{\pi_p}\right] = \frac{\theta_a - \pi_p/2}{\pi_p} + O(1),$$

por las ecuaciones (6.3.5) y (6.3.6) tenemos:

$$N(u_n,(0,a)) = \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^a (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr + O(log(\lambda_n))$$

y el Lema queda demostrado. $\square$

Lema 6.3.4. *Sean $\{(\lambda_n, u_n)\}_n$ y $q(r)$ como en el Teorema 6.2.1. Entonces,*

$$\frac{1}{\pi_p} \int_a^{r_{\lambda_n}} \left(\frac{\lambda_n - q(r)}{p-1}\right)^{1/p} dr = O(1).$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr \quad & \leq (r_{\lambda_n} - a)(\lambda_n - q(a))^{1/p} \\ & \leq r_{\lambda_n}(\lambda_n - \lambda_n + r_{\lambda_n}^{1-p-N})^{1/p} \\ & = r_{\lambda_n}^{(1-N)/p}, \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $N > 1$, ya que $r_{\lambda_n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Para $N = 1$ tenemos

$$\int_a^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr \leq 1,$$

y el Lema queda demostrado. $\square$

Podemos demostrar ahora el Teorema 6.2.1:

Demostración del Teorema 6.2.1: Por el Lema 6.3.1, tenemos

$$N(u_n,(0,\infty)) \sim N(u_n,(0,a)) + N(u_n,(a,r_{\lambda_n})).$$

Ahora, por el Lema 6.3.2

$$N(u_n,(0,a)) = \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^a (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr + O(log(\lambda_n)).$$

Los Lemas 6.3.3 y 6.3.4nos dan

$$N(u_n,(a,r_{\lambda_n})) = \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_a^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr + O(1).$$

Luego,

$$N(u_n,(0,\infty)) = \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr + O(log(\lambda_n))$$

y el Teorema 6.2.1 queda demostrado. $\square$

Remark 6.3.1. Como $N(u_n,(0,\infty)) = n-1$, la demostración del Teorema 6.1.1 es inmediata:

$$n - 1 = N(u_n,(0,\infty)) \sim \frac{1}{\pi_p(p-1)^{1/p}} \int_0^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr.$$

Por último, demostremos el Corolario 6.1.1, que nos da la distribución asintótica de los autovalores:

Demostración del Corolario 6.1.1: Dado λ, existe n tal que

$$\lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1}.$$

Ahora, como $\nu < \mu$ implica

$$\int_0^{r_\nu} (\nu - q(r))^{1/p} dr < \int_0^{r_\mu} (\mu - q(r))^{1/p} dr,$$

el resultado es consecuencia del Teorema 6.1.1, ya que

$$\frac{1}{\pi_p (p-1)^{1/p}} \int_0^{r_{\lambda_n}} (\lambda_n - q(r))^{1/p} dr \sim n - 1$$

$$\frac{1}{\pi_p (p-1)^{1/p}} \int_0^{r_{\lambda_{n+1}}} (\lambda_{n+1} - q(r))^{1/p} dr \sim n. \qquad \square$$

Capítulo 7

Dominios con borde fractal

7.1. Introducción

A lo largo de este capítulo trabajaremos en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ que será una unión disjunta de infinitos intervalos,

$$\Omega = \cup_j I_j$$

cuyas longitudes $|I_j|_1$ tienden a cero. Para el problema de autovalores Dirichlet

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda r(t)|u|^{p-2}u & t \in \Omega \\ u(t) = 0 & t \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

nuestro primer resultado caracteriza el conjunto de autovalores de Ω como unión de los autovalores de cada I_j.

Proposición 7.1.1. *Sea $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos abiertos y acotados, disjuntos dos a dos. Entonces,*

$$N\left(\lambda, \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} N(\lambda, I_j).$$

Demostración. Claramente, si u es una autofunción del problema (7.1.1) en I_j asociada a λ, la extendemos por cero fuera de I_j y es una autofunción en Ω.

Por otra parte, si λ es un autovalor del problema (7.1.1) en Ω, y u es una autofunción asociada al mismo, para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega |u'|^{p-2}u'v'\,dx = \lambda \int_\Omega r(t)|u|^{p-2}uv\,dt.$$

Si v tiene soporte compacto en I_j, tenemos que $u|_{I_j}$ es una autofunción del problema (7.1.1) en I_j asociada a λ. $\square$

La Proposición 7.1.1 combinada con los resultados del capítulo 5 nos dan el desarrollo asintótico

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_j \frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \int_{I_j} r^{1/p}(t)dt + o(\lambda^{1/p})_j$$

cuando $\lambda \to \infty$. Sin embargo, para obtener el desarrollo asintótico de $N(\lambda, \Omega)$ debemos controlar los términos $o(\lambda^{1/p})_j$ de cada sumando. Nuestro próximo resultado resuelve esto:

Teorema 7.1.2. *Sea Ω de medida finita, y $r(t)$ una función continua y acotada en Ω. Entonces,*

$$N(\lambda,\Omega)=\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_\Omega r^{1/p}(t)dt+o(\lambda^{1/p}) \tag{7.1.2}$$

cuando $\lambda\to\infty$.

Demostración. Consideremos un intervalo I de la misma medida que Ω. Dividiéndolo en subintervalos consecutivos $\hat{I}_j$ de longitudes $|I_j|_1$, definimos un peso $\rho(t)$ que coincide con $r|_{I_j}$ sobre cada uno de estos subintervalos.

Por el Teorema 5.3.1, el desarrollo de $N(\lambda,I)$ coincide con

$$\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_\Omega r^{1/p}(t)dt+o(\lambda^{1/p}),$$

y por el Dirichlet Neumann bracketing -dividiendo I en los intervalos $\hat{I}_j$-, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_\Omega r^{1/p}(t)dt+o(\lambda^{1/p}) &\geq \sum_{j\in\mathbb{N}}N(\lambda,\hat{I}_j)\\ &=\sum_{j\in\mathbb{N}}N(\lambda,I_j)=N\left(\lambda,\Omega\right)\end{aligned}$$

y hemos aplicado la Proposición 7.1.1 en la última igualdad.

Para la cota inferior, observemos que, para todo $j_0\in\mathbb{N}$ fijo,

$$N(\lambda,\cup_{j=1}^{j_0}I_j)\leq N(\lambda,\Omega),$$

y se tiene

$$\begin{aligned}N(\lambda,\cup_{j=1}^{j_0}I_j) &=\sum_{j=1}^{j_0}N(\lambda,I_j)\\ &=\sum_{j=1}^{j_0}\left[\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_{I_j}r^{1/p}(t)dt\right]\\ &\geq\sum_{j=1}^{j_0}\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_{I_j}r^{1/p}(t)dt-j_0\\ &=\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_{\cup_{j=1}^{j_0}I_j}r^{1/p}(t)dt+o(\lambda).\end{aligned}$$

Ahora, fijando $\varepsilon>0$, existe j_ε tal que

$$\int_{\cup_{j=j_\varepsilon}^{\infty}I_j}r^{1/p}(t)dt\leq\varepsilon,$$

con lo cual,

$$N(\lambda,\Omega)\geq\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_\Omega r^{1/p}(t)dt-\varepsilon\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}+o(\lambda^{1/p}),$$

y se tiene el comportamiento asintótico deseado. □

En las secciones siguientes veremos dos generalizaciones de este teorema. En particular, nos interesará estudiar el resto

$$R(\lambda)=N(\lambda,\Omega)-\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p}\int_\Omega r^{1/p}(t)dt,$$

y también consideraremos conjuntos Ω de medida infinita.

7.2. Conjuntos de medida infinita

Si se observa la demostración del Teorema 7.1.2 con cuidado, se verá que no hemos aprovechado una ventaja del problema: para todo λ, existe j_λ tal que $N(\lambda, I_j) = 0$ para todo $j \geq j_\lambda$. En cambio, en las cotas superiores e inferiores de $N(\lambda)$ hemos usado que $\int_\Omega r^{1/p}(t)dt < +\infty$.

A lo largo de esta sección consideraremos por simplicidad sólo el problema con coeficientes constantes $r \equiv 1$, aunque podemos ver que si I es un intervalo de longitud $\int_a^b r^{1/p}(t)dt$, el desarrollo asintótico de $N(\lambda, I)$ coincide con el del problema con peso $r(t)$ en (a, b).

Supongamos que $r \equiv 1$, y que la medida de Ω es infinita. En ese caso, la expresión anterior para $N(\lambda)$ no es válida. Sin embargo, para todo λ, la sumatoria

$$\sum_j N(\lambda, I_j)$$

es finita, ya que como la longitud de los intervalos tiende a cero, existirá un $j(\lambda)$ tal que $N(\lambda, I_j) = 0$ para todo $j > j(\lambda)$.

Tiene sentido entonces preguntarse si $N(\lambda)$ tendrá un desarrollo asintótico, y en caso afirmativo, cuál será. Nuestro próximo teorema resuelve este problema:

Teorema 7.2.1. *Sea $\Omega = \cup_j I_j$ y $d \in (1, +\infty)$. Entonces:*

i.- si existen constantes positivas c_1, c_2 tales que $c_1 j^{-1/d} \leq |I_j|_1 \leq c_2 j^{-1/d}$, se tiene:

$$N(\lambda, \Omega) = O(\lambda^{d/p}) \qquad \text{cuando } \lambda \to +\infty,$$

ii.- si $|I_j|_1 \sim j^{-1/d}$, se tiene:

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}) \qquad \text{cuando } \lambda \to +\infty;$$

donde $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann en s.

Para su demostración necesitaremos la siguiente fórmula, ver [49]:

Teorema 7.2.2 (Fórmula de sumación de Euler MacLaurin). *Sea $f(t)$ una función no negativa, continua y monótona decreciente, que tiende a cero cuando $t \to +\infty$. Entonces, existe $C \in \mathbb{R}$ que depende sólo de f, tal que*

$$\sum_{j=a}^{b} f(j) = \int_a^b f(t)dt + C + O(f(b)). \tag{7.2.1}$$

cuando $b \to +\infty$, y

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\sum_{j=a}^{b} f(j) - \int_a^b f(t)dt \right) = C. \tag{7.2.2}$$

Veamos ahora la demostración del Teorema 7.2.1.

Demostración. Sea $x = \lambda^{1/p}/\pi_p$. Como existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que $c_1 j^{-1/d} \leq |I_j|_1 \leq c_2 j^{-1/d}$.

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{(c_1 x)^d} c_1 x j^{-1/d} - (c_1 x)^d \leq \sum_{j=1}^{(c_1 x)^d} \left[c_1 x j^{-1/d} \right] \leq \sum_{j=1}^{+\infty} [x |I_j|_1] \leq \sum_{j=1}^{(c_2 x)^d} c_2 x j^{-1/d},$$

y la parte (i) queda demostrada aplicando la fórmula de Euler MacLaurin 7.2.2.

Consideremos ahora la parte (ii). Fijemos $\varepsilon > 0$, y j_0 tal que para $j > j_0$ se cumpla

$$1 - \varepsilon < \frac{|I_j|_1}{j^{-1/d}} < 1 + \varepsilon.$$

Definamos una nueva sucesión de intervalos $\tilde{I}_j$, donde $|\tilde{I}_j|_1 = j^{-1/d}$ si $j < j_0$, y $|\tilde{I}_j|_1 = |I_j|_1$ para $j > j_0$. Ahora, por la Proposición 7.1.1 tenemos

$$N(x, \Omega) = N(x, \cup_j \tilde{I}_j) + \sum_{j=1}^{j_0} \Big(N(x, I_j) - N(x, \tilde{I}_j) \Big) + O(1). \tag{7.2.3}$$

La fórmula de Euler MacLaurin, aplicada al primer sumando nos da

$$|N(x, \cup_j \tilde{I}_j) - \zeta(d) x^d| = \varepsilon\, \zeta(d) x^d.$$

Por otra parte, el término $\sum_{j=1}^{j_0} N(x, I_j) - N(x, \tilde{I}_j)$ tiene el desarrollo asintótico clásico,

$$\sum_{j=1}^{j_0} (|I_j| - |\tilde{I}_j|) x + O(1) = Cx + O(1),$$

ya que son finitos intervalos.

Luego, dividiendo por x^d la ecuación (7.2.3),

$$\frac{N(x, \Omega)}{x^d} = (1 + \varepsilon)\zeta(d) + Cx^{1-d} + O(x^{-d})$$

y el teorema queda demostrado pues ε es arbitrario. □

Esta idea de estimar los términos no nulos de la sumatoria -en lugar de estimar el resto de la serie- nos permite dar una demostración distinta del teorema de Lapidus y Pomerance [51] (para $p = 2$) para el caso $0 < d < 1$. Más aún, en ciertos casos particulares se obtiene incluso una mejor estimación del error. Este es nuestro próximo resultado:

Teorema 7.2.3. *Sea* $\Omega = \cup_j I_j$, *donde* $|I_j|_1 \sim j^{-1/d}$ *y* $d \in (0, 1)$. *Entonces,*

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{|\Omega|_1}{\pi_p} \lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d} \lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}) \quad \textit{cuando} \quad \lambda \to +\infty.$$

En particular, si $|I_j|_1 = j^{-1/d}$ *con* $d \in (0, 1)$,

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\zeta(1/d)}{\pi_p} \lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d} \lambda^{d/p} + O(\lambda^{d/p(1+d)}) \quad \textit{cuando} \quad \lambda \to +\infty.$$

La segunda parte del Teorema 7.2.3 es el problema de los divisores de Dirichlet generalizado, ver [49]; la primera parte es una generalización donde se imponen sólo condiciones asintóticas en el borde de la región.

La demostración del Teorema 7.2.3 se obtiene con el siguiente lema:

Lema 7.2.4. *Sea* $f(t) : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ *una función continua y monótona decreciente,* $f(t) \sim t^{-1/d}$ *cuando* $t \to +\infty$, *con* $d < 1$. *Entonces,*

$$\sum_{j=1}^{\infty} [f(j)x] = \left(\sum_{j=1}^{\infty} f(j) \right) x + Cx^d + o(x^d). \tag{7.2.4}$$

Demostración. Observemos que cambiar de $\sum[f(j)x]$ a $\sum f(j)x$ produce un error que es $O(x^d)$, pues sumamos hasta $N \sim x^d$, que satisface $xf(N) = 1$. Para mejorar este error, empleamos la idea de Dirichlet para contar los puntos de coordenadas enteras debajo de la hipérbola $y = 1/x$: contamos los puntos hasta $M \sim x^{d/(1+d)}$ debajo de la función $xf(t)$ y de su inversa $f^{-1}(t/x)$, y restamos los puntos del cuadrado que contamos dos veces,

$$\sum_{j=1}^{M}[f(j)x] + \sum_{j=1}^{M}[f^{-1}(j/x)] - [M]^2 = \sum_{j=1}^{M} f(j)x + \sum_{j=1}^{M} f^{-1}(j/x) - [M]^2 + O(M)$$

La fórmula de sumación del Teorema 7.2.2 nos da

$$\begin{aligned}&\int_1^M xf(t)dt + A(x) + O(xf(M)) + \\ &\int_1^M f^{-1}(t/x)dt + B(x) + O(f^{-1}(M/x)) - M^2 + O(M).\end{aligned} \tag{7.2.5}$$

Como $xf(M) = M = f^{-1}(M/x)$, tenemos $xf(M) \sim f^{-1}(M/x) \sim x^{d/1+d}$. Por la simetría entre f y f^{-1}, podemos integrar f entre M y N, restando $N-M$:

$$\int_1^N xf(t)dt - N + M + A(x) + B(x) + O(x^{d/1+d}). \tag{7.2.6}$$

Como la integral converge, podemos escribir esta última ecuación como:

$$\int_1^\infty xf(t)dt - \int_N^\infty xf(t)dt - N + M + A(x) + B(x) + O(x^{d/1+d}),$$

y aplicar otra vez Euler MacLaurin,

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} f(j)\right) x - \int_N^\infty xf(t)dt - N + B(x) + O(x^{d/1+d}). \tag{7.2.7}$$

Utilizando el comportamiento asintótico de N y $f(t)$, tenemos para $x \to +\infty$

$$x\int_N^\infty f(t)dt = x(1+o(1))\int_N^\infty t^{-1/d}dt \sim -\frac{d}{d-1}xN^{(d-1)/d} \sim -\frac{d}{d-1}x^d.$$

Reemplazando en la ecuación (7.2.7) nos queda

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} f(j)\right) x + \frac{1}{d-1}x^d + B(x) + o(x^d).$$

Para terminar la demostración nos falta calcular $B(x)$. Observemos primero que $f^{-1}(t) \sim t^{-d}$ cuando $t \to 0$, ya que $f(t) \sim t^{-1/d}$ cuando $t \to +\infty$.

Fijamos $b > 1$, y tenemos

$$\sum_{j=1}^{b} f^{-1}(j/x) - \int_1^b f^{-1}(t/x)dt = B(x) + O(f^{-1}(b/x)).$$

Ahora, para x suficientemente grande, tenemos

$$(1+o(1))\left(\sum_{j=1}^{b}(j/x)^{-d} - \int_1^b (t/x)^{-d}dt\right) = B(x) + O((b/x)^{-d}).$$

Luego,

$$(1+o(1))\left(\sum_{j=1}^{b} j^{-d} - \int_1^b t^{-d}dt\right) = B(x)/x^d + O(b^{-d}).$$

Reescribiendo esta última ecuación, $B(x) \sim Cx^d$ cuando $x \to +\infty$.

Ya tenemos el orden de crecimiento de $B(x)$, veamos ahora la constante C. Sea $C(s)$ la función:

$$C(s) = \lim_{b\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{b} n^{-s} - \int_1^b y^{-s}dy\right).$$

Ahora,

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^\infty y^{-s}dy$$

coincide, para $Re(s) > 1$, con la función

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1},$$

pues la serie y la integral son convergentes, y pueden calcularse sin dificultad. Para $0 < Re(s) < 1$, el resultado se obtiene por prolongación analítica, ya que para cada $s \neq 1$, el límite existe del lado derecho existe usando una vez mas Euler MacLaurin, y el lado izquierdo está bien definido y es analítico. Luego,

$$C = \zeta(d) - \frac{1}{d-1}, \tag{7.2.8}$$

y el Lema queda demostrado. □

Demostración del Teorema 7.2.3. Podemos suponer que las longitudes $|I_j|_1$ son estrictamente decrecientes, de lo contrario agregamos una perturbación arbitrariamente pequeña de rápido decaimiento. Ahora, por el Lema anterior,

$$N(\lambda,\Omega) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{l_j}{\pi_p}\lambda^{1/p}\right] = \frac{|\Omega|_1}{\pi_p}\lambda^{1/p} + \frac{\zeta(d)}{\pi_p^d}\lambda^{d/p} + o(\lambda^{d/p}),$$

y hemos demostrado la parte (i).

Para la parte (ii), es suficiente calcular las integrales en la ecuación (7.2.5):

$$\begin{aligned}\frac{d}{d-1}x^{2d/(1+d)} + \left(A - \frac{d}{d-1}\right)x + \frac{1}{1-d}x^{2d/(1+d)} + \\ + \left(B - \frac{1}{1-d}\right)x^d - x^{2d/(1+d)} + O(x^{d/(1+d)}) = \\ = \left(A - \frac{d}{d-1}\right)x + \left(B - \frac{1}{1-d}\right)x^d + O(x^{d/(1+d)}).\end{aligned}$$

A su vez, utilizando la ecuación (7.2.8), tenemos $A = \zeta(1/d) + \frac{d}{d-1}$ y $B = \zeta(d) + \frac{1}{1-d}$, y el teorema queda demostrado. □

7.3. Segundo término para pesos indefinidos

En esta sección consideraremos el problema con pesos indefinidos, y obtendremos una estimación del segundo término en función de la regularidad del peso $r(t)$ y del borde del dominio Ω.

Si definimos

$$R(\lambda, \Omega) = N(\lambda, \Omega) - \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p} \int_\Omega r^{1/p}(t) dt,$$

por el Teorema 5.3.1 tenemos

$$R(\lambda, \Omega) = o(\lambda^{1/p}),$$

pero hemos visto que para coeficientes constantes el resultado puede mejorarse, y se relaciona con la dimensión interior de Minkowski d de $\partial\Omega$, esto es,

$$R(\lambda, \Omega) = O(\lambda^{d/p}).$$

Para pesos indefinidos, como existe una sucesión de autovalores positivos y otra de autovalores negativos, nuestro resultado será:

$$N^{\pm}(\lambda, \Omega) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p} \int_\Omega (r^{\pm})^{1/p}(t) dt + O(\lambda^{d/p}),$$

donde $N^+(\lambda)$ denota el número de autovalores positivos del problema (7.1.1) menores a un λ dado, y $r^+(t) = \text{máx}\{r(t), 0\}$; en forma análoga, $N^-(\lambda)$ denota el número de autovalores negativos mayores a $-\lambda$.

Comencemos introduciendo la notación e hipótesis necesarias tanto para el enunciado del teorema, como para su demostración.

Para abreviar la notación, definimos el término de Weyl,

$$\varphi(\lambda, \Omega, r) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p} \int_\Omega r^{1/p}(t) dt. \tag{7.3.1}$$

El dominio Ω. Nuestras hipótesis sobre Ω son:

$$\Omega \text{ es un abierto acotado en } \mathbb{R} \text{ tal que } M^*_{int}(\partial\Omega, d) < \infty. \tag{H1}$$

Dado $\eta_0 > 0$ y $q \in \mathbb{N}$, consideramos un teselado de $\mathbb{R}$ formado por una familia numerable de intervalos abiertos $\{I_{\zeta_q}\}_{\zeta_q \in \mathbb{Z}}$ de longitud $\eta_q = 2^{-q}\eta_0$, y definimos los siguientes conjuntos:

$$I_0(\Omega) = \{\zeta_0 \in \mathbb{Z} \ : \ I_{\zeta_0} \subset \Omega\}, \tag{7.3.2}$$

$$\Omega_0 = \Omega \setminus (\cup_{\zeta_0 \in \mathbb{Z}} \overline{I_{\zeta_0}}), \tag{7.3.3}$$

$$I_q(\Omega) = \{\zeta_q \in \mathbb{Z} \ : \ I_{\zeta_q} \subset \Omega_{q-1}\}, \tag{7.3.4}$$

$$\Omega_q = \Omega \setminus ((\Omega \setminus \Omega_{q-1}) \cup \overline{I}_{\zeta_q}). \tag{7.3.5}$$

El peso r. Sea $r \in L^\infty(\Omega)$ una función positiva.

Dado $\gamma > 0$, diremos que la función r satisface la *condición* γ si existe una constante positiva c_1, y $\eta_1 > 0$ tales que para todo $\zeta_q \in I_q(\Omega)$, $\eta \leq \eta_1$, se tiene

$$\int_{I_{\zeta_q}} |r - r_{\zeta_q}|^{1/p} \, dt \leq c_1 \eta_q^{\gamma}, \tag{H2}$$

donde r_{ζ_q} es el promedio de $r^{1/p}$ en I_{ζ_q},

$$r_{\zeta_q} = \left(|I_{\zeta_q}|^{-1} \int_{I_{\zeta_q}} r^{1/p}\, dt \right)^p .$$

Este coeficiente γ, introducido en [28], nos indica la regularidad del peso r, y a mayor regularidad, más grande es. Por ejemplo, si r es Holder-α, y acotado lejos de cero en Ω, satisface la condición γ para $0 < \gamma \leq 1+\alpha/p$. Si r es continuo y positivo en $\overline{\Omega}$, satisface la condición γ para $0 < \gamma \leq 1$.

7.3.1. Pesos positivos

En primer lugar, probaremos la estimación del segundo término para pesos positivos.

Teorema 7.3.1. *Sea $\Omega \in \mathbb{R}$ que satisface* (H1) *para $d \in (0,1)$. Sea $r \in L^\infty$ una función positiva que satisface* (H2) *con $d < \gamma$. Entonces,*

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p} \int_\Omega r^{1/p}(t)dt + O(\lambda^{d/p}). \tag{7.3.6}$$

Demostración. Sea $\lambda > 1$ fijo, y elegimos $a > (1-d)/p(\gamma - d)$ y η_0 tales que $\eta_0 = \lambda^{-a} < \eta_1$. Como $M^*_{Int}(\partial\Omega, d) < +\infty$ por *(H1)*, existe una constante C tal que

$$\# I_q(\Omega) \leq C\eta_q^{-d}. \tag{7.3.7}$$

Como $r \in L^\infty(\Omega)$, $r(t) \leq M$ para casi todo $t \in \Omega$. Luego, para todo λ existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r) = 0, \tag{7.3.8}$$

si $q > q_0$. Definimos $K = \max\{\, q \in \mathbb{N} \ :\ N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r) \neq 0\}$, y observemos que K depende de λ.

El resto de la demostración se divide ahora en dos partes, que consisten en hallar cotas inferiores y superiores de $R(\lambda, \Omega)$.

Cota inferior: El Dirichlet Neumann bracketing 5.2.1 nos da

$$\sum_{q=0}^{K} \sum_{\zeta_q \in I_q} N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r) - \varphi(\lambda, \Omega, r) \leq N_D(\lambda, \Omega, r) - \varphi(\lambda, \Omega, r). \tag{7.3.9}$$

Podemos reescribir (7.3.9) como:

$$\sum_{q=0}^{K} \sum_{\zeta_q \in I_q} N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r) - \varphi(\lambda, \Omega, r) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \textstyle\sum_{q=0}^{K} \sum_{\zeta_q \in I_q} \left(N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r) - N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q}) \right), \\
A_2 &= \textstyle\sum_{q=0}^{K} \sum_{\zeta_q \in I_q} \left(N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q}) - \varphi(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q}) \right), \\
A_3 &= \textstyle\sum_{q=0}^{K} \sum_{\zeta_q \in I_q} \left(\varphi(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q}) - \varphi(\lambda, I_{\zeta_q}, r) \right), \\
A_4 &= -\varphi(\lambda, \Omega_K, r),
\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

y Ω_K fue definido en la ecuación (7.3.5).

Por la monotonía de los autovalores respecto al peso, como $r \leq r_{\zeta_q} + |r - r_{\zeta_q}|$, tenemos

$$N(\lambda, I_{\zeta_q}, r) \leq N(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q}) + N(\lambda, I_{\zeta_q}, |r - r_{\zeta_q}|),$$

con lo cual

$$|N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r) - N_D(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q})| \leq N(\lambda, I_{\zeta_q}, |r - r_{\zeta_q}|) \leq c_1 \eta_q^{\gamma} \lambda^{1/p}. \qquad (7.3.11)$$

Luego, utilizando (7.3.7), tenemos

$$|A_1| \leq c_1 \sum_{q=0}^{K} \#(I_q) \eta_q^{\gamma} \lambda^{1/p} \leq c_1 \eta_0^{\gamma - d} \lambda^{1/p} \sum_{q=0}^{K} 2^{-q(\gamma - d)} \leq c \lambda^{(1/p) - a(\gamma - d)}, \qquad (7.3.12)$$

y como $a > (1-d)/p(\gamma - d)$, tenemos la cota para A_1,

$$|A_1| \leq \lambda^{d/p}.$$

Veamos ahora A_2. Como

$$\left| N(\lambda, (0,T), M) - \frac{(M\lambda)^{1/p}}{2\pi_p T} \right| = \left| \left[\frac{(M\lambda)^{1/p}}{2\pi_p T} \right] - \frac{(M\lambda)^{1/p}}{2\pi_p T} \right| \leq 1, \qquad (7.3.13)$$

tenemos

$$|A_2| \leq \sum_{q=0}^{K} \#(I_q) \leq C \lambda^{d/p}, \qquad (7.3.14)$$

ya que existe una constante positiva C tal que

$$\frac{C}{2} \lambda^{1/p} \leq 2^K \leq C \lambda^{1/p}.$$

Para el siguiente, como es un problema de coeficientes constantes, tenemos $A_3 = 0$.

Finalmente, para acotar A_4, observemos primero que $\Omega_K \subset \{t \in \Omega \ : \ d(t, \partial\Omega) \leq \eta_K\}$. Por la definición del contenido de Minkowski,

$$|A_4| = \varphi(\lambda, \Omega_K, r) = c \int_{\Omega_K} (r\lambda)^{1/p} dt \leq c \lambda^{1/p} \eta_K^{1-d} \leq c \lambda^{d/p}, \qquad (7.3.15)$$

y tenemos la cota inferior deseada.

Cota superior: Este caso es similar al anterior, definamos

$$J_q(\Omega) = \{\zeta_q \in \mathbb{Z} \ : \ I_{\zeta_q} \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}, \qquad (7.3.16)$$

$$\Omega \subset \bigcup_{q=0}^{K} \bigcup_{\zeta_q \in I_q} I_{\zeta_q} \cup \bigcup_{\zeta_k \in J_K} I_{\zeta_k}, \qquad (7.3.17)$$

y se tiene

$$\#J_K(\Omega) \leq C \eta_K^{-d}. \qquad (7.3.18)$$

Como antes,

$$N_D(\lambda, \Omega, r) \leq \sum_{q=0}^{K} \sum_{\zeta_q \in I_q} N_N(\lambda, I_{\zeta_q}, r) + \sum_{\zeta_k \in J_K} N_N(\lambda, I_{\zeta_k}, r), \qquad (7.3.19)$$

y restando el término de Weyl nos queda

$$\sum_{q=0}^{K}\sum_{\zeta_q\in I_q} N_N(\lambda, I_{\zeta_q}, r) + \sum_{\zeta_k\in J_K} N_N(\lambda, I_{\zeta_k}, r) - \varphi(\lambda,\Omega,r) \le B_1+B_2+B_3+B_4+B_5,$$

donde

$$\begin{aligned}
B_1 &= \textstyle\sum_{q=0}^{K}\sum_{\zeta_q\in I_q}\left(N_N(\lambda, I_{\zeta_q}, r) - N_N(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q})\right),\\
B_2 &= \textstyle\sum_{q=0}^{K}\sum_{\zeta_q\in I_q}\left(N_N(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q}) - \varphi(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q})\right),\\
B_3 &= \textstyle\sum_{q=0}^{K}\sum_{\zeta_q\in I_q}\left(\varphi(\lambda, I_{\zeta_q}, r_{\zeta_q}) - \varphi(\lambda, I_{\zeta_q}, r)\right),\\
B_4 &= -\varphi(\lambda,\Omega_K, r),\\
B_5 &= \textstyle\sum_{\zeta_k\in J_K} N_N(\lambda, I_{\zeta_k}, r).
\end{aligned} \tag{7.3.20}$$

Los términos B_1, B_2, B_3 y B_4 se pueden acotar exactamente igual que antes, pero ahora se agrega B_5. Como $r \in L^\infty$,

$$B_5 \le \sum_{\zeta_k\in J_K} N_N(\lambda, I_{\zeta_k}, 1) \le \#(J_K) C\lambda^{1/p}\eta_K \le C\lambda^{d/p}. \tag{7.3.21}$$

y se tiene la cota buscada. □

7.3.2. Pesos indefinidos.

Recordemos que el espectro consiste una doble sucesión de autovalores $\Sigma^+ = \{\lambda_k^+\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\Sigma^- = \{\lambda_k^-\}_{k\in\mathbb{N}}$ (Teorema 1.1.3).

Para obtener el desarrollo asintótico de $N(\lambda)$, necesitamos hipótesis sobre $r^+ = \text{máx}\{r, 0\}$ y $r^- = r - r^+$, similares a las anteriores, y también para $\Omega_+ = \{t \in \Omega : r(t) > 0\}$, $\Omega_- = \{t \in \Omega : r(t) < 0\}$.

Supondremos que r^+ y r^- satisfacen (H2) para ciertos γ^+, γ^-. Sea Ω_+° el interior de Ω_+, y sea d^+ la dimensión interior de Minkowski de $\partial\Omega_+^\circ$, en forma análoga d^- será la dimensión de $\partial\Omega_-^\circ$ (no necesariamente se tiene $d^- = d^+$).

Teorema 7.3.2. *Sea $\Omega \in \mathbb{R}$ un conjunto acotado, $d^+ \in (0,1)$ tal que $M^*_{Int}(\partial\Omega_+, d^+) < +\infty$. Sea $r \in L^\infty(\Omega)$ una función tal que r^+ satisface* (H2) *para $\gamma^+ > d^+$. Entonces,*

$$N^+(\lambda,\Omega,r) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p}\int_{\Omega_+} (r^+)^{1/p} dt + O(\lambda^{d^+/p}). \tag{7.3.22}$$

Demostración. La demostración se basa en el Teorema de Comparación de Sturm, y la monotonía respecto al dominio, que nos permitirán obtener cotas para λ_n^+ con el mismo comportamiento asintótico. Fijamos ρ, y tenemos:

$$\lambda_n(r^+ + \rho, \Omega) \le \lambda_n(r^+, \Omega) \le \lambda_n^+(r, \Omega_+^\circ).$$

Luego, por el Teorema 7.3.1,

$$N^+(\lambda,\Omega,r) \le N(\lambda,\Omega,r^+ + \rho) = \frac{\lambda^{1/p}}{2\pi_p}\int_{\Omega} (r^+ + \rho)^{1/p} dt + O(\lambda^{d^+/p}).$$

Elegimos ahora $\rho = \lambda^{d^+ - 1}$, y obtenemos la cota superior.

Finalmente, observemos que la cota inferior se reduce a un problema con pesos positivos, con lo cual el teorema queda demostrado. □

Remark 7.3.1. Del Teorema 7.3.2 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^+(r^+ + \rho, \Omega)}{n^p} = \left(\frac{\pi_p}{\int_\Omega (r^+ + \rho)^{1/p} dt} \right)^p,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^+(r, \Omega_+^\circ)}{n^p} = \left(\frac{\pi_p}{\int_{\Omega_+^\circ} r^{1/p} dt} \right)^p.$$

Luego,

$$\left(\frac{\pi_p}{\int_\Omega (r^+ + \rho)^{1/p} dt} \right)^p \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^+(r, \Omega)}{n^p} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^+(r, \Omega)}{n^p} \leq \left(\frac{\pi_p}{\int_{\Omega_+^\circ} r^{1/p} dt} \right)^p$$

y cuando $\rho \to 0$, la primera integral converge a $\int_\Omega (r^+)^{1/p}$, lo cual nos da el comportamiento asintótico de los autovalores:

$$\lambda_n^+(r, \Omega) \sim \left(\frac{\pi_p}{\int_\Omega (r^+)^{1/p} dt} \right)^p.$$

7.4. Ejemplos

Para terminar, veamos algunos ejemplos de desarrollos asintóticos.

7.4.1. Desarrollo asintótico con N términos

El orden de error del Teorema 7.2.3 nos permite dar un ejemplo de desarrollo arbitrario con N términos.

Para esto, elegimos un conjunto de números $1 > d_1 > d_2 > \ldots > d_N$, con $d_j > \frac{d_1}{p(1+d_1)}$. Ahora, consideramos el conjunto $\Omega = \cup_{k=1}^N \cup_{j=1}^\infty I_{j,d_k}$, con $|I_{j,d_k}|_1 = j^{d_k}$. En este conjunto, tenemos el siguiente desarrollo para$N(\lambda, \Omega)$:

$$N(\lambda, \Omega) = \left(\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^\infty j^{d_k} \right) \lambda^{1/p} + \sum_{k=1}^N \zeta(d_k) \lambda^{d_k/p} + O(\lambda^{d_1/p(1+d_1)})$$

Para comprobarlo, es suficiente separar Ω en N subconjuntos, y aplicar en cada uno los mismos argumentos de la demostración del Teorema 7.2.3.

7.4.2. Desarrollo irregular

En esta sección seguimos las ideas de [30], donde fue estudiado el Laplaciano usual en un conjunto autosimilar de $\mathbb{R}^n$ con medida finita.

Definamos Ω_k como el conjunto formado por la unión de 3^k intervalos de longitud 2^{1-k} para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\Omega = \cup_k \Omega_k$. Tenemos:

$$N(\lambda, \Omega) = f(\log(\lambda)) \lambda^{d/p} - \frac{6}{\pi_p} \lambda^{1/p} + O(1), \tag{7.4.1}$$

donde $f(x)$ es una función periódica y acotada, y $d = \log(3)/\log(2)$.

Tenemos:

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_{j=1}^\infty 3^j \left[\frac{\lambda^{1/p}}{2^{j-1}} \right] = \sum_{-\infty}^\infty 3^j \left[\frac{\lambda^{1/p}}{2^{j-1}\pi_p} \right] - \sum_{j=0}^\infty 3^{-j} \left[\frac{\lambda^{1/p}}{2^{-j-1}\pi_p} \right] \tag{7.4.2}$$

Siendo $[x] \leq x$, la segunda serie converge. Más aún,

$$\sum_{j=0}^{\infty} 3^{-j} \left[\frac{\lambda^{1/p}}{2^{-j-1}\pi_p} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} 3^{-j} \frac{\lambda^{1/p}}{2^{-j-1}\pi_p} - \sum_{j=0}^{\infty} 3^{-j} \rho \left(\frac{\lambda^{1/p}}{2^{-j-1}\pi_p} \right),$$

donde $\rho(x) = x - [x]$.

Observemos que $|\rho(x)| \leq 1$. Luego,

$$\sum_{j=0}^{\infty} 3^{-j} \left[\frac{\lambda^{1/p}}{2^{-j-1}\pi_p} \right] = \frac{6}{\pi_p} \lambda^{1/p} + O(1).$$

Estudiemos el término principal. La nueva variable

$$y = \frac{\log(\lambda^{1/p}) - \log(\pi_p)}{\log(2)},$$

nos permite escribir $2^y = \lambda^{1/p}/\pi_p$ y $3^y = (\lambda^{1/p}/\pi_p)^d$, donde

$$d = \frac{\log(3)}{\log(2)}.$$

Luego, reemplazando esto en (7.4.2), obtenemos

$$\frac{\lambda^{d/p}}{3} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 3^{j-y} [2^{y-j}].$$

Con lo cual, como $j - (y - 1) = (j + 1) - y$, se ve que $f(x)$ es periódica con período igual a uno.

Ahora, sea Ω el complemento del conjunto ternario de Cantor en el $[0, 1]$, que consiste en una sucesión de 2^j intervalos de longitud $1/3^{j+1}$, para $j \geq 0$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$N(\lambda, \Omega) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \left[\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right].$$

Como el conjunto tiene medida finita,

$$N(\lambda, \Omega) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j \lambda^{1/p}}{3^{j+1}} \pi_p = \frac{|\Omega|}{\pi_p} \lambda^{1/p}.$$

Ahora,

$$N(\lambda, \Omega) - \frac{|\Omega|}{\pi_p} \lambda^{1/p} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \left(\left[\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right] - \frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right).$$

Estudiemos ahora el error. Claramente, es negativo, y vale

$$-\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \left(\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} - \left[\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right] \right).$$

Esta serie es convergente, pues si llamamos $\rho_1(x) = x - [x]$, se puede acotar trivialmente $|\rho_1(x)| \leq x$. Así:

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \left(\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} - \left[\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right] \right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \leq \lambda^{1/p}.$$

Escribimos la serie como

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \left(\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} - \left[\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right] \right) - \sum_{j=\infty}^{-1} 2^j \left(\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} - \left[\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right] \right).$$

Si vemos que la segunda es convergente, la primera también lo será, pues el lado izquierdo lo es. Pero la segunda serie es convergente, pues $|\rho_1(x)| \leq 1$, y se tiene:

$$\left| \sum_{j=\infty}^{-1} 2^j \left(\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} - \left[\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right] \right) \right| \leq \sum_{j=\infty}^{-1} 2^j = 1.$$

Con esto, el término de error se escribe como:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \left(\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} - \left[\frac{\lambda^{1/p}}{3^{j+1}\pi_p} \right] \right) + O(1) = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \rho \left(\frac{\lambda^{1/p}}{3^j \pi_p} \right) + O(1).$$

Con el mismo cambio de variables de antes,

$$y = \frac{\ln(\lambda^{1/p}) - 2\ln(\pi_p)}{2\ln(3)},$$

o equivalentemente, $3^y = \lambda^{1/p}/\pi_p$, obtenemos que $2^y = (\lambda^{1/p}/\pi)^d$, con lo cual

$$\frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \rho \left(\frac{\lambda^{1/p}}{3^j \pi_p} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda^{1/p}}{\pi_p} \right)^d 2^{j-y} \rho(3^{y-j}),$$

que es una función periódica, de período uno y acotada.

Hemos obtenido así que:

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{|\Omega|}{\pi_p} \lambda^{1/p} - \pi_p^{-d} \lambda^{d/2} g(\log(\lambda)) + O(1).$$

Estos ejemplos se generalizan a otros conjuntos $\Omega = \cup_k \Omega_k$, donde Ω_k consiste de m^k intervalos de longitud n^{1-k}, unificando los resultados con el caso de medida finita: si $m > n$ y $|\Omega|_1 = \infty$, tenemos

$$N(\lambda, \Omega) = \lambda^{d/p} g(\log(\lambda)) - \frac{m.n}{\pi_p(m-n)} \lambda^{1/p} + O(1);$$

si $m < n$ y $|\Omega|_1 < \infty$, tenemos

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{m.n}{\pi_p(n-m)} \lambda^{1/p} - \lambda^{d/p} g(\log(\lambda)) + O(1),$$

donde $g(\log(\lambda))$ es una función periódica y acotada, y $d = \frac{\log(m)}{\log(n)}$.

Bibliografía

[1] M. Alif, Sur le Spectre de Fučik du p-Laplacien avec des Poids Indefinis, *C. R., Math. Acad. Sci. Paris* 334 (2002) 1061-1066.

[2] M. Alif y J. P. Gossez, On the Fučik Spectrum with Indefinite Weights, *Diff. Int. Eq.* 14 (2001) 1511-1530.

[3] H. Amann, Lusternik-Schnirelman Theory and Non-Linear Eigenvalue Problems, *Math. Ann.* 199 (1972) 55-72.

[4] A. Anane, M. Moussa y O. Chakrone, Spectrum of the One Dimensional p-Laplacian Operator with Indefinite Weight, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Eq.* 17, (2002) 1-11.

[5] A. Anane, y N. Tsouli, *On the Second Eigenvalue of the $p-$Laplacian*, "Nonlinear Partial Differential Equations"(Fès, 1994), 1–9, Pitman Res. Notes Math. Ser. 343, Longman, Harlow, 1996.

[6] S. S. Antman. The influence of elasticity on analysis: Modern developments, *Bull. Amer. Math. Soc.* 9 (1983) 267-291.

[7] M. S. Baouendi y C. Goulaouic, Regularite et Theorie Spectrale pour une Classe d' operateurs Elliptiques Degeneres, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 34 (1969) 361-379.

[8] M. S. Berger, A Sturm Liouville Theorem for Non-Linear Elliptic Partial Differential Equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* XX (1966) 543-582 [Corrections, ibid. XXII (1968) 351-354].

[9] T. Bhattacharya, E. DiBenedetto y J. Manfredi, Limits as $p \to \infty$ of $\Delta_p u_p = f$ and Related Extremal Problems, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, Fasc. Speciale Nonlinear PDE's (1989) 15-68.

[10] L. E. Bobisud, Steady-state Turbulent Flow With Reaction, *Rocky Mount. J. of Math.* 21 (1991) 993-1007.

[11] F. Browder, Infinite Dimensional Manifolds and Non-Linear Elliptic Eigenvalue Problems, *Annals of Math.* 82 (1965) 459-477.

[12] B. M. Brown y W. Reichel, Eigenvalues of the Radially Symmetric p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, *J. London Math. Soc.* 69 (2004) 657-675.

[13] R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* Vol 1, Interscience Publishers, Inc. New York (1953).

[14] M. Cuesta, Eigenvalue Problems for the p-Laplacian with Indefinite Weights, *E. J. of Diff. Eq.,* 2001 nr. 33 (2001), 1-9

[15] M. Cuesta, D. de Figueiredo y J.P. Gossez, The Beginning of the Fučik Spectrum for the p-Laplacian, *J. of Diff. Eq.,* 159 (1999), 212-238

[16] D. De Figueiredo y J. P. Gossez, On the First Curve of the Fučik Spectrum of an Elliptic Operator, *Diff. Int. Eq.* 7 (1994) 1285-1302.

[17] M. Del Pino y R. Manásevich, Multiple Solutions for the p-Laplacian under Global Nonresonance, *Proc. Amer. Math. Soc.* 112 (1991) 131-138

[18] P. L. De Nápoli y J. P. Pinasco, *Estimates for Eigenvalues of Quasilinear Elliptic Systems*, Preprint (2005).

[19] P. L. De Nápoli y J. P. Pinasco, *A Lyapunov Inequality for Monotone Quasilinear Operators*, por aparecer en Diff. Int. Eq. (2005).

[20] E. Dibenedetto, $C^{1+\alpha}$ Local Regularity of Weak Solutions of Degenerate Elliptic Equations, *Nonlinear Analysis TMA,* 7 (1983) 827-850.

[21] P. Drabek y R. Manásevich, On the Closed Solutions to some Nonhomogeneous Eigenvalue Problems with p-Laplacian. *Diff. Int. Eq.* 12 (1999) 773-788.

[22] A. Elbert, T. Kusano y T. Tanigawa, An Oscillatory Half-linear Differential Equation, *Arch. Math.* 33 (1997) 355-361.

[23] S. B. Eliason, Lyapunov Type Inequalities for Certain Second Order Functional Differential Equations, *SIAM J. on Appl. Math.* 27 (1974) 180-199.

[24] K. Falconer, On the Minkowski Measurability of Fractals, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995) 1115-1124.

[25] J. Fernández Bonder y J. P. Pinasco, Asymptotic Behavior of the Eigenvalues of the One Dimensional Weighted p- Laplace Operator, *Ark. Mat.* 41 (2003) 267-280.

[26] J. Fernández Bonder y J. P. Pinasco, *Eigenvalues of the p-Laplacian in Fractal Strings with Indefinite Weights*, por aparecer en J. of Math. Anal. and Applications (2005).

[27] J. Fernández Bonder y J. D. Rossi. A Nonlinear Eigenvalue Problem with Indefinite Weights Related to the Sobolev Trace Embedding, *Pub. Matematiques*, 46 (2002) 221-235.

[28] J. Fleckinger y M. Lapidus, Remainder Estimates for the Asymptotics of Elliptic Eigenvalue Problems with Indefinite Weights, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 98 (1987) 329-356.

[29] J. Fleckinger y M. Lapidus, Indefinite Elliptic Boundary Value Problems on Irregular Domains, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995) 513-526.

[30] J. Fleckinger y D. Vassiliev, An Example of a Two-Term Asymptotics for the Counting Function of a Fractal Drum, *Trans. Amer. Math. Soc.* 337 (1993) 99-116.

[31] L. Friedlander, Asymptotic Behaviour of Eigenvalues of the p-Laplacian, *Commun. Part. Diff. Eqs.* 14 (1989) 1059-1069.

[32] S. Fučik y J. Necas, Ljusternik-Schnirelmann Theorem and Nonlinear Eigenvalue Problems, *Math. Nachr.* 53 (1972) 277-289.

[33] S. Fučik, J. Necas, J. Soucek, y V. Soucek, *Spectral Analysis of Nonlinear Operators.* Lecture Notes in Math., Springer, New York (1973).

[34] J. García Azorero e I. Peral Alonso, Existence and Nonuniqueness for the $p-$Laplacian: Nonlinear Eigenvalues, *Comm. Partial Diff. Eq.* 12 (1987) 1389-1430.

[35] J. García Azorero e I. Peral Alonso, Comportement Asymptotique des Valeurs Propres du $p-$Laplacien, *C. R. Acad. Sci. Paris* 307, Serie I (1988) 75-78.

[36] M. García-Huidobro, V. K. Le, R. Manásevich y K. Schmitt, On principal eigenvalues for quasilinear elliptic differential operators: an Orlicz-Sobolev space setting, *Nonlinear Differential Equations Appl.*, 6 (1999), no. 2, 207 - 225.

[37] M. García-Huidobro, R. Manásevich y F. Zanolin, On a pseudo Fučik spectrum for strongly nonlinear second-order ODEs and an existence result, *J. Comp. App. Math.* 52, (1994) 219-239.

[38] T. Godoy, J. P. Gossez y S. Paczka, On the Antimaximum Principle for the $p-$Laplacian with Indefinite Weight, *Nonlinear Analysis TMA,* 51 (2002) 449-467.

[39] J. P. Gossez, R. Manásevich, On a nonlinear eigenvalue problem in Orlicz-Sobolev spaces, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A*, 132 (2002) 891-909.

[40] B. J. Harris y Q. Kong, On the Oscillation of Differential Equations with an Oscillatory Coefficient, *Trans. A.M.S.,* 347, (1995) 1831-1837.

[41] P. Hartman, On the Eigenvalues of Differential Equations. *Am. J. Math.* 73 (1951) 657-662.

[42] D. Hejhal, The Selberg Trace Formula and the Riemann Zeta Function, *Duke Math. J.* 43 (1976) 441-482.

[43] Y. X. Huang, On Eigenvalue Problems of the p-Laplacian with Neumann Boundary Conditions, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 109 (1990) 177-184.

[44] L. Hormander, The Spectral Function of an Elliptic Operator, *Acta Math.* 121 (1968) 193-218.

[45] L. Hormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. III, Springer Verlag (1985).

[46] M. Kac, Can One Hear the Shape of a Drum?, *Amer. Math. Monthly (Slaught Mem. Papers, nr. 11)* 73 (1966) 1-23.

[47] I. Kolodner, Heavy rotation string - A nonlinear eigenvalue problem, *Comm. Pure Appl. Math.* 8 (1955) 395-408.

[48] E. Kratzel, *Lattice Points,* Kluwer Academic Publishers (1988).

[49] M. G. Krein, On Certain Problems on the Maximum and Minimum of Characteristic Values and on the Lyapunov Zones of Stability, *A.M.S Transl.* Series 2, Vol. 1 (1955) 163-187.

[50] M. Lapidus, Fractal Drum, Inverse Spectral Problems for Elliptic Operators and a Partial Resolution of the Weyl-Berry Conjecture, *Trans. A. M. S.* 325 (1991) 465-528.

[51] M. Lapidus y C. Pomerance, The Riemann Zeta-function and the One-dimensional Weyl-Berry Conjecture for Fractal Drums, *Proc. London Math. Soc.* (3) 66 (1993) 41-69.

[52] Chung-Fen Lee, Cheh-Chih Yeh, Chen-Huang Hong y R. P. Agarwal, Lyapunov and Wirtinger Inequalities, *Appl. Math. Letters* 17 (2004) 847-853.

[53] A. Levin, A Comparison Principle for Second Order Differential Equations, *Sov. Mat. Dok1.* 1 (1960) 1313-1316.

[54] H. J. Li y C. C. Yeh, Sturmian Comparison Theorem for Half Linear Second Order Differential Equations, *Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A* 125 (1995) 1193-1204.

[55] A. Lyapunov, *Probleme General de la Stabilite du Mouvement*, Annals of Mathematics Studies 17, Princeton Univ. Press (1949).

[56] W.E. Milne, On the Degree of Convergence of Expansions in an Infinite Interval, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 31 (1929), 907-918.

[57] V. Mustonen and M. Tienari, An eigenvalue problem for generalized laplacian in Orlicz-Sobolev spaces, *Proc. Royal Soc. Edinburgh A*, 129 (1999), 153-163.

[58] Y. Naito, Uniqueness of Positive Solutions of Quasilinear Differential Equations, *Differ. Integral Eq.* 8 (1995) 1813-1822.

[59] Z. Nehari, Oscillation Criteria for Second Order Differential Equations, *Trans. A.M.S.* 85 (1957) 428-445.

[60] W. T. Patula, On the Distance Between Zeroes, *Proc. Amer. Math. Soc.* 52 (1975) 247-251.

[61] L. E. Payne y G. A. Philippin, Some Applications of the Maximum Principle in the Problem of Torsional Creep, *SIAM J. Math. Anal.* 33 (1977) 446-455.

[62] Pham The Lai, Comportement Asymptotique du Noyau de la Resolvante et des Valeurs Propres d' une Classe d' operateurs Elliptiques Degeneres non Necesairement Auto-adjoints, *J. Math. Pures Appl.* 55 (1976) 379-420.

[63] J. P. Pinasco, Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional p-Laplacian, *Abstract and Appl. Anal.* Vol 2004, 2 (2004) 147-153.

[64] J. P. Pinasco, *On the Asymptotic Behavior of Eigenvalues of the Radial p-laplacian*, por aparecer en Manuscripta Mathematica (2004).

[65] J. P. Pinasco, *Lower bounds of Fucik eigenvalues of the weighted one dimensional p-Laplacian*, por aparecer en Rendiconti dell'Instituto di Matematica dell'Universita di Trieste (2004).

[66] J. P. Pinasco, *The Distribution of Non-Principal Eigenvalues of Singular Second Order Linear Ordinary Differential Equations*, Preprint (2004).

[67] W. T. Reid, A Generalized Lyapunov Inequality, *J. Diff. Eq.* 13 (1973) 182-196.

[68] R. C. Riddell, Nonlinear Eigenvalue Problems and Spherical Fibrations of Banach Spaces, *J. of Funct. Anal.* 18 (1975) 213-270.

[69] M. Ruzicka, *Electrorheological Fluids: Modelling and Mathematical Theory*, Lect. Notes in Math. 1748, Springer (2000).

[70] R. Seeley, A Sharp Asymptotic Remainder Estimate for the Eigenvalues of the Laplacian in a Domain of $\mathbb{R}^3$, *Adv. in Math.* 29 (1978) 244-269.

[71] M. Tienari, Lyusternik-Schnirelmann Theorem for the Generalized Laplacian, *J. Diff. Eq.* 161 (2000) 174-190.

[72] E.C. Titchmarsh, *Eigenfunctions Expansions,* Oxford (1946),

[73] P. Tolksdorf, Regularity for a more General Class of Quasilinear Elliptic Equations, *J. of Diff. Eq.* 51 (1984) 126-150.

[74] M. van den Berg y M. Lianantonakis, Asymptotics for the Spectrum of the Dirichlet Laplacian on Horn-Shaped Regions. *Indiana Univ. Math. J.* 50 (2001) 299-333.

[75] W. Walter, Sturm- Liouville Theory for the Radial Δ_p-operator, *Math. Z.* 227 (1998) 175-185.