

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**ESTIMACIONES DEL ERROR PARA EL MÉTODO DE  
ELEMENTOS FINITOS NO CONFORMES**

*Claudio Padra*

Dirección de Tesis  
*Dr. Ricardo Guillermo Durán*

Lugar de trabajo  
Centro Atómico Bariloche (C.N.E.A.)

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE:  
*Doctor en Ciencias Matemáticas*  
1993

A Susana y a Julito

A Mingo y a Martha

## **Agradecimientos**

En primer lugar, quiero agradecer a Susana, mi esposa, por su apoyo y aliento que me ayudaron a superar los momentos difíciles.

Quiero agradecer a mi Director de Tesis, Ricardo Durán, por haber aceptado dirigirme a más de 1.600 km. de distancia con las dificultades que esto provoca, y por la ayuda que el me brindó en cada uno de mis viajes. Sin su preocupación, guía y esfuerzo no hubiera sido posible este trabajo.

Durante el desarrollo de mi trabajo de tesis estuve becado por la Comisión Nacional de Energía Atómica a cuyas autoridades agradezco. Quiero expresar aquí mi gratitud a las autoridades del Centro Atómico Bariloche, y en especial a las del Departamento de Investigación Aplicada por el apoyo institucional y humano brindado en todo momento; y en particular por el apoyo económico, para poder realizar viajes a Buenos Aires con el fin de interactuar con Ricardo. Sin este apoyo, el desarrollo de esta tesis hubiera sido imposible.

También, quiero agradecer a Fernando Basombrío que me ofreció la posibilidad de poder trabajar en la División Mecánica Computacional, y muy especialmente a Enzo Dari que implementó algunos de los estimadores que se presentan en esta tesis. A él se deben todos los cálculos computacionales de los ejemplos que se verán.

Finalmente, deseo expresar mi reconocimiento a Daniela Árnica, Fernando Basombrío, Gustavo Buscaglia, Enzo Dari, Sergio Felicelli, Axel Larreteguy, Fernando Quintana, Roberto Saliva, Marcelo Vénere con quienes, además de las cuestiones académicas, compartí experiencias humanas enriquecedoras.

# Contents

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1 Principios variacionales . . . . .	9
1.2 El método de elementos finitos . . . . .	12
1.2.1 Método de Galerkin . . . . .	12
1.2.2 El método de elementos finitos . . . . .	13
1.2.3 Estimaciones del error de interpolación . . . . .	16
1.2.4 Estimadores del error y Adaptividad . . . . .	18
<b>2 Estimaciones del error para problemas elípticos escalares de segundo orden</b>	<b>21</b>
2.1 Introducción . . . . .	21
2.2 Problema modelo y su aproximación por elementos finitos . . . . .	23
2.3 Estimaciones a priori del error . . . . .	24
2.3.1 Caso regular . . . . .	24
2.3.2 Espacios de Sobolev con peso . . . . .	25
2.3.3 Estimación del error de discretización . . . . .	27
2.3.4 Estimación del error de consistencia . . . . .	29
2.3.5 Estimación del error . . . . .	31
2.4 Estimaciones a posteriori del error . . . . .	33
2.4.1 Ecuación de error y relaciones de ortogonalidad . . . . .	33
2.4.2 Estimadores a posteriori del error equivalentes a $\ \nabla_j e\ _{0,p}$ . . . . .	35
2.4.3 Estimadores a posteriori del error que acotan por arriba a $\ e\ _{0,p}$ . . . . .	39
2.4.4 Estimadores a posteriori del error equivalentes a $\ e\ _{0,\infty}$ . . . . .	42

2.5	Resultados numéricos . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Estimaciones del error para problemas elípticos no lineales de tipo monótono</b>	<b>49</b>
3.1	Introducción . . . . .	49
3.2	Problema modelo y su aproximación por elementos finitos . . . . .	50
3.2.1	Formulaciones variacionales . . . . .	50
3.2.2	Continuidad, monotonía y estabilidad . . . . .	51
3.3	Estimaciones a priori del error . . . . .	53
3.3.1	Resultados preliminares . . . . .	53
3.3.2	Caso $1 < p \leq 2$ . . . . .	54
3.3.3	Caso $2 \leq p < \infty$ . . . . .	55
3.4	Estimaciones a posteriori del error . . . . .	56
3.4.1	Preliminares . . . . .	56
3.4.2	Estimador a posteriori del error que acota por arriba a $\ \nabla_j e\ _{0,p}$ . . . . .	57
3.4.3	Estimador a posteriori del error que acota por abajo a $\ \nabla_j e\ _{0,p}$ . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Estimaciones del error para aproximaciones de fluidos Newtonianos y Quasi-Newtonianos</b>	<b>65</b>
4.1	Introducción . . . . .	65
4.2	Fluidos Newtonianos . . . . .	68
4.2.1	Introducción . . . . .	68
4.2.2	Las ecuaciones de Stokes y su aproximación por elementos finitos . . . . .	68
4.2.3	Estimaciones a posteriori del error . . . . .	69
4.2.4	Los elementos de segundo orden de Fortin y Soulie . . . . .	76
4.2.5	Resultados numéricos . . . . .	77
4.3	Fluidos Quasi-Newtonianos . . . . .	83
4.3.1	Preliminares . . . . .	83
4.3.2	Estimaciones a priori del error . . . . .	86
4.3.3	Estimador a posteriori del error que acota por arriba a $\ D\mathbf{u} - D_j \mathbf{u}_j\ _{0,p}$ . . . . .	89
4.3.4	Estimador a posteriori del error que acota por arriba a $\ p - p_j\ _{0,p'}$ . . . . .	94
	<b>Referencias</b>	<b>96</b>

# Introducción

En la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, en muchas ocasiones, se desea encontrar una solución de cierto problema con un error prefijado y por lo tanto es de interés estudiar estimaciones del error.

En general, hay dos tipos de estimaciones del error: (a) estimaciones a priori y (b) estimaciones a posteriori. Las estimaciones a priori se basan en el conocimiento de características de la solución tales como su suavidad y nos dan información cualitativa acerca de la *velocidad* de la convergencia, es decir, cómo tiende a cero el error cuando un parámetro relacionado con la malla (como por ejemplo, el lado máximo de una triangulación o la inversa del número de grados de libertad de la malla) tiende a cero. Usualmente no dan información cuantitativa acerca del error real para una malla fija. Las estimaciones a posteriori usan información obtenida durante el proceso de cálculo de la solución aproximada, y pueden darnos una medida cuantitativa del error.

Consideremos, por ejemplo, un problema elíptico en un dominio que pueda ser dividido en triángulos iguales (que llamaremos *triangulación inicial*) y que tenga por solución exacta a una función regular. Podemos calcular una aproximación por el método de elementos finitos que corresponda a la triangulación inicial. Si queremos una solución aproximada más precisa podemos dividir todos los triángulos uniendo los puntos medios de los lados y generando de cada triángulo cuatro subtriángulos iguales y calcular nuevamente. Si repetimos este proceso podemos construir una sucesión de soluciones aproximadas que converge (en una norma adecuada) a la solución exacta [18]. En la práctica, el esfuerzo computacional aumenta de manera tal, que en pocos pasos el problema se convierte en irresoluble (debido a su tamaño). La pregunta que se debe hacer es si la mejora en la precisión que se logre será significativa en relación con el costo computacional. Esto está medido por un parámetro llamado el *orden de convergencia* que nos relaciona al error entre la solución exacta y la aproximada en una norma adecuada con la longitud del lado más largo de los triángulos; es decir

$$\|u - u_h\| \leq Ch^\beta$$

donde  $u$  es la solución exacta,  $u_h$  es la solución aproximada correspondiente a la triangulación que tiene a  $h$  como longitud del lado más largo de los triángulos,  $\beta$  es el orden de convergencia y  $C$  es una constante que depende de la regularidad de la solución.

Es frecuente hallar problemas que tienen soluciones con singularidades provenientes de esquinas cóncavas en la frontera del dominio o cambio de un tipo de condición de borde en otro. Si en estos problemas uno pretende utilizar triangulaciones uniformes (es decir, con triángulos del

mismo tamaño) el orden de convergencia resulta menor que el correspondiente a problemas con solución suave. Sin embargo, es posible recuperar dicho orden si utilizamos triangulaciones que no sean uniformes. Obviamente, las regiones más densificadas tienen que ser aquellas donde el error local es mayor y deben detectarse en forma automática.

En general las formas de densificación se clasifican en: *densificación p*, donde se aumenta el orden  $p$  de los polinomios interpolantes, y *densificación h* donde se aumentan el número de elementos. En esta tesis solo se consideraran densificaciones del tipo  $h$ .

Llamaremos *proceso adaptivo* o *adaptividad* a un algoritmo que usa resultados intermedios para modificar el curso de los cálculos de manera que el resultado obtenido sea, en algún sentido, óptimo para el problema particular que estamos resolviendo (para una discusión de la noción de adaptividad en procedimientos numéricos ver [50]). Este proceso es normalmente ejecutado después de que tenemos disponible una solución inicial; y las regiones del dominio de solución donde la precisión no es satisfactoria serán identificadas de acuerdo al criterio elegido de estimación del error. Para definir dicho criterio se utilizan los estimadores a posteriori del error, y por tal motivo, en los últimos años, fue creciente el interés en el desarrollo de estos en el método de elementos finitos (ver [12], [5], [7], [8], [10], [11], [22], [31], [36], [9], [47] y [37] y sus referencias).

Para realizar densificaciones  $h$  hay esencialmente dos tipos de estimadores a posteriori:

- Estimadores basados en consideraciones residuales
- Estimadores basados en técnicas de promedios

Los estimadores que se presentarán en esta tesis serán del tipo residual.

En general, un estimador a posteriori del error del tipo residual,  $\epsilon_{\mathcal{T}}$ , asociado a una red  $\mathcal{T}$  tiene la siguiente estructura:

$$\epsilon_{\mathcal{T}} = \|(\eta_T(u_{\mathcal{T}}))_{T \in \mathcal{T}}\|$$

donde  $\eta_T$  es una aplicación a valores reales y  $\| \cdot \|$  es una norma en  $\mathfrak{R}^{N_{el}}$  (donde  $N_{el}$  es el número de elementos). La función  $\eta_T$  especializada en la solución dada por el método de elementos finitos  $u_{\mathcal{T}}$  nos da un valor que podemos considerar como un indicador del error o estimador del error local en el elemento  $T$ . La elección de la norma  $\| \cdot \|$  depende de la norma particular que estemos utilizando para el error exacto. Por ejemplo, para la norma de la energía se toma como  $\| \cdot \|$  a la norma euclídea, obteniendo

$$\epsilon_{\mathcal{T}} = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2(u_{\mathcal{T}}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Una vez elegido el estimador del error, un algoritmo adaptivo para el método de elementos finitos consta de tres procesos que los notaremos por  $f_1, f_2, f_3$ . El primero  $f_1$  consiste en, dados los datos del problema y una triangulación, calcular la aproximación del método de elementos finitos correspondiente; para el segundo proceso se necesita la aproximación calculada en el primero, los datos del problema y la malla y nos provee de indicadores del error para cada triángulo;

y por último,  $f_3$  nos dará una nueva triangulación con la información de los indicadores y la triangulación. Para indicar estos procesos podemos escribir

$$\begin{aligned} f_1(p, \mathcal{T}_k) &= u_{\mathcal{T}_k} \\ f_2(u_{\mathcal{T}_k}, p, \mathcal{T}_k) &= (\eta_T(u_{\mathcal{T}_k}, p))_{T \in \mathcal{T}_k} \\ f_3((\eta_T(u_{\mathcal{T}_k}, p))_{T \in \mathcal{T}_k}, \mathcal{T}_k) &= \mathcal{T}_{k+1} \end{aligned}$$

donde  $p$  indica los datos del problema. Para que el proceso sea efectivo es necesario que  $f_2$  nos provea de indicadores adecuados. Para ello es necesario hacer un análisis del error y constatar que paso a paso el error disminuye. En general, esto se garantiza si los indicadores provienen de un *estimador a posteriori del error* que verifique ciertas propiedades.

A pesar de la aparición de máquinas con gran memoria y velocidad de cálculo es imposible, sin usar procesos adaptivos, resolver problemas de la mecánica de fluidos complejos, en particular, en tres dimensiones. Así, el proceso adaptivo automático se convierte en una herramienta muy atractiva para problemas de gran escala en fluido-dinámica computacional.

Cuando la ecuación diferencial a resolver es lineal y está en forma de divergencia y con condiciones de Dirichlet homogéneas, podemos representar el problema en su forma débil por

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

donde  $a$  es una forma bilineal continua y  $F$  es una transformación lineal continua.

Si el espacio de dimensión finita  $V_h$  donde se busca la solución aproximada del problema no está contenido en el espacio asociado al problema  $V$ , el método de elementos finitos se llama *no conforme*.

Si bien  $V_h$  no está contenido en  $V$ , ambos deben ser subconjuntos de un tercer espacio  $X$ . Por ejemplo, en el caso en que  $V = H_0^1$  y el espacio  $V_h$  esta formado por funciones lineales en cada triángulo y continuas en el punto medio de cada lado de la triangulación, ambos espacios están contenidos en  $X = L^2$  y entonces podemos considerar la suma de ellos.

Para definir la aproximación no conforme debemos poder extender la forma bilineal  $a$  y la lineal  $F$ , al espacio  $V + V_h$ , las cuales serán notadas por  $a_h$  y  $F_h$  respectivamente. Así, la solución aproximada  $u_h$  será aquella que verifique

$$a_h(u_h, v) = F_h(v) \quad \forall v \in V_h$$

En el caso particular en que  $F$  está definida sobre  $X$  entonces se debe tomar  $F_h = F$ .

Para realizar análisis de convergencia también es necesario que la norma de  $V$  se pueda extender a  $V + V_h$ . Se puede ver que si la forma bilineal  $a_h$  es coerciva y continua con constantes que no dependan del subespacio  $V_h$  se verifica una estimación del error abstracta en la cual además del término esperado  $\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h$  aparece un término de *consistencia*. Esta estimación abstracta del error fue dada por Strang [44].

Hay distintos motivos para introducir métodos no conformes. Por ejemplo, para evitar la necesidad de elementos suaves en problemas de cuarto orden o para tratar problemas de minimización con restricciones tales como las ecuaciones de Stokes (ver [29] para un revisión de esta clase de



métodos). También, puede verse que están relacionados con métodos mixtos (ver [1] , [33]) y nos referimos a [2] para ver aplicaciones en elasticidad.

La dificultad principal al aproximar las ecuaciones de Stokes por elementos finitos es debido a la *condición de incompresibilidad*  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Esto da lugar a la introducción de formulaciones mixtas donde esta restricción se introduce mediante un multiplicador de Lagrange (la presión) y se aproxima la velocidad y la presión con dos espacios de elementos finitos. Para que el método sea estable es necesario que los espacios aproximantes satisfagan una condición de compatibilidad entre los espacios para aproximar las velocidades y las presiones llamada *condición inf-sup* o de Babuška-Brezzi [4] [49].

El uso de elementos no conformes para el problema de Stokes está motivado en el hecho de que los elementos estándar de menor orden no satisfacen la condición inf-sup. En cambio, los elementos lineales no conformes de Crouzeix y Raviart [20] y los elementos cuadráticos de Fortin y Soulé [25] sí la satisfacen y entonces proveen órdenes de convergencia óptimos.

*El objeto de esta tesis es introducir y analizar estimadores de error para métodos de elementos finitos no conformes.*

*En primer lugar, se demuestra que para problemas lineales se puede obtener ordenes óptimos con respecto al número de nodos, extendiendo los resultados conocidos para el método conforme. También obtenemos estimaciones a priori para los problemas no lineales que estudiamos.*

*Las técnicas que introducimos para estudiar estimadores a posteriori del error pueden ser aplicadas a distintos problemas en forma de divergencia: lineales y no lineales.*

*Como modelo de ecuaciones lineales se consideran el Laplaciano y las ecuaciones de Stokes. Para estos casos se definen estimadores a posteriori del error en distintas normas y se prueba que son equivalentes al error.*

*Posteriormente se obtienen resultados similares para problemas no lineales: el  $p$ -Laplaciano y las ecuaciones de fluidos quasi-Newtonianos. Se prueba que el error está mayorado por el estimador y, además, se muestra para el  $p$ -Laplaciano otro estimador que acota por abajo al error (tener estimadores que acoten por abajo al error es de interés para garantizar que el proceso adaptivo no introduce nodos innecesarios). En estos casos no se pudo obtener la equivalencia entre el estimador y el error (esto tampoco se conoce en el caso conforme para ningún problema no lineal).*

La técnica que expondremos en esta tesis se basa en el uso de descomposiciones similares a la de Helmholtz y de algunas relaciones de ortogonalidad para el error. Al igual que la descomposición de Helmholtz, las aquí presentadas son posibles en cualquier dominio simplemente conexo del plano con frontera Lipschitz continua. En el espacio se necesita la hipótesis adicional de que el dominio sea convexo para que la componente de divergencia nula de la descomposición sea el rotor de una función regular [27]. Esta hipótesis es muy restrictiva e indeseable para el uso de los estimadores resultantes en algoritmos adaptivos. En el capítulo 2 de esta tesis presentamos estimadores del error para el Laplaciano y probamos que son equivalentes a  $\left(\sum_{T \in \mathcal{T}} |u - u_h|_{1,p,T}^p\right)^{\frac{1}{p}}$

En este caso se utiliza la descomposición tipo Helmholtz y no se puede extender para problemas en dimensión 3. A continuación establecemos otros estimadores que acotan por arriba al error en norma  $L^p$ . Este análisis no utiliza la descomposición anterior y puede extenderse a problemas

tridimensionales. Por último obtenemos un estimador equivalente al error en norma  $L^\infty$  y en este caso los resultados pueden generalizarse a problemas de tres dimensiones.

El plan de la tesis es como sigue:

En el primer capítulo introducimos notaciones y resultados que serán necesarios posteriormente. En particular, precisamos la noción de estimadores del error.

En el capítulo 2 estudiamos estimaciones para el Laplaciano. Se analizan los refinamientos de mallas en presencia de singularidades causadas por esquinas de la frontera del dominio y demostramos que un refinamiento apropiado da el mismo orden de convergencia del error, medido en términos de número de incógnitas, que para soluciones suaves y triangulaciones casi uniformes. A continuación, se introducen estimadores a posteriori del error en distintas normas para aproximaciones de elementos finitos no conformes lineales a trozos de problemas escalares elípticos de segundo orden y se estudia la equivalencia con el error. Por último, presentamos varios experimentos numéricos que muestran el buen comportamiento de estos estimadores cuando ellos son usados como indicadores locales del error para refinamientos adaptivos.

En el capítulo 3 estudiamos problemas elípticos no lineales de tipo monótono. Analizamos la convergencia del método no conforme y estimadores a posteriori del error.

En el capítulo 4 se analizan estimaciones del error para aproximaciones de flujos de fluidos newtonianos y quasi-newtonianos. El objeto de la primer parte del capítulo es el de presentar y analizar estimadores a posteriori del error para aproximaciones con elementos no conformes de las ecuaciones de Stokes. En la segunda parte del capítulo 4 analizamos estimaciones a priori y a posteriori del error para aproximaciones con elementos no conformes para el flujo de un fluido quasi-Newtoniano.



# Capítulo 1

## Preliminares

*En este capítulo introducimos notaciones y resultados que serán necesarios posteriormente. En la primera sección formulamos los principales resultados sobre formulaciones variacionales, que jugaran un rol fundamental en todas las consideraciones futuras. Como son resultados clásicos no incluiremos sus demostraciones. A continuación agregamos una introducción al método de elementos finitos por ser este el marco en el cual trabajaremos y precisamos la noción de estimadores del error.*

### 1.1 Principios variacionales

Sean  $X$  y  $M$  dos espacios de Banach reflexivos (reales) y sus respectivas normas  $\|\cdot\|_X$  y  $\|\cdot\|_M$ . Sean  $X', M'$  sus espacios duales correspondientes y  $\|\cdot\|_{X'}$  y  $\|\cdot\|_{M'}$  sus normas duales.

Introducimos una forma bilineal continua  $b : X \times M \rightarrow \mathfrak{R}$  con norma

$$\|b\| = \sup_{v \in X, \nu \in M} \frac{b(v, \nu)}{\|v\|_X \|\nu\|_M}$$

**Nota:** todos los ínfimos y supremos serán tomados sobre los espacios indicados excepto el elemento cero de manera que la expresión tenga sentido.

Entonces consideramos el siguiente problema variacional:

Dado  $\chi \in M'$  hallar  $u \in X$  tal que:

$$b(u, \nu) = \chi(\nu) \quad \forall \nu \in M \tag{1.1}$$

A la forma bilineal  $b$  le asociamos un operador lineal  $B \in \mathcal{L}(X, M')$  definido por:  
 $B(v)(\nu) = b(v, \nu) \quad \forall v \in X, \forall \nu \in M$

Además, tenemos que  $\|B\|_{\mathcal{L}(X, M')} = \|b\|$

Sea  $B' \in \mathcal{L}(M, X')$  el operador dual de  $B$ , es decir:

$$B'(\nu)(v) = b(v, \nu) \quad \forall v \in X, \forall \nu \in M$$

Ahora el problema (1.1) es equivalente a:

Dado  $\chi \in M'$  hallar  $u \in X$  tal que:

$$B(u) = \chi \quad \text{en } M' \tag{1.2}$$

Sea  $V = \text{Ker}(B)$  y, para cada  $\chi \in M'$ , definimos la variedad afin:

$$V(\chi) = \{v \in X : B(v) = \chi\} = \{v \in X : b(v, \nu) = \chi(\nu) \forall \nu \in M\} \text{ y se tiene que } V = V(0)$$

Además la continuidad del operador  $B$  implica que  $V$  es un subespacio cerrado de  $X$ . Definimos también el conjunto polar  $V^\circ$  de  $V$  por  $V^\circ = \{g \in X' : g(v) = 0 \quad \forall v \in V\}$

Observemos que si  $B$  es un monomorfismo se tiene que  $V^\circ = X'$

**Lema 1.1** *Las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

i) *Existe una constante  $\beta > 0$  tal que:*

$$\inf_{\nu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \nu)}{\|v\|_X \|\nu\|_M} \geq \beta$$

ii) *El operador  $B'$  es un isomorfismo de  $M$  en  $V^\circ$  y:*

$$\|B'(\nu)\|_{X'} \geq \beta \|\nu\|_M$$

iii) *El operador  $B$  es un isomorfismo de  $V^\perp$  en  $M'$  y:*

$$\|B(v)\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X$$

La demostración puede verse en [27] pag. 58.

Como corolario del Lema 1 se tiene el caso particular en que  $V = 0$  y que enunciamos en el siguiente teorema ([4] pag. 112)

**Teorema 1.1** *(Lax-Milgram generalizado)*

*Si  $X$  y  $M$  son espacios de Banach reflexivos reales con productos escalares  $(\cdot, \cdot)_X$  y  $(\cdot, \cdot)_M$ . Entonces:*

*$b$  es una forma bilineal continua sobre  $X \times M$  tal que se verifican:*

*Existe una constante  $\beta > 0$  tal que*

$$\inf_{\nu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \nu)}{\|v\|_X \|\nu\|_M} \geq \beta \tag{1.3}$$

$$\sup_{\nu \in M} b(v, \nu) > 0 \quad \forall v \in X - \{0\} \tag{1.4}$$

*si, y solo si,  $B$  es un isomorfismo de  $X$  en  $M'$*

**Observación:** Que  $B$  sea un isomorfismo es equivalente a:

Si  $\chi \in M'$ ,  $\exists! u \in X$  tal que

$$b(u, \nu) = \chi(\nu) \quad \forall \nu \in M$$

y, además, se verifica:  $\|u\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|\chi\|_{M'}$

**Definición:** Una forma bilineal  $b$  que satisface (1.3) y (1.4) se llamará *debilmente coerciva*.

**Definición:** Si  $b$  satisface (1.3) diremos que  $b$  satisface la condición inf-sup.

Introducimos otra forma bilineal continua  $a : X \times X \rightarrow \Re$  con norma

$$\|a\| = \sup_{u, v \in X} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \|v\|_X}$$

y consideramos el siguiente problema variacional que será llamado *mixto* :

Dado  $l \in X'$  y  $\chi \in M'$ , encontrar un par  $(u, p) \in X \times M$  tal que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = l(v) & \forall v \in X \\ b(u, q) = \chi(q) & \forall q \in M \end{cases} \quad (1.5)$$

A la forma bilineal  $a$  le asociamos el operador lineal  $A \in \mathcal{L}(X, X')$  definido por

$$A(u)(v) = a(u, v)$$

El problema (1.5) es equivalente a:

Dado  $l \in X'$  y  $\chi \in M'$ , encontrar un par  $(u, p) \in X \times M$  tal que

$$\begin{cases} A(u) + B'(p) = l & \text{en } X' \\ B(u) = \chi & \text{en } M' \end{cases} \quad (1.6)$$

También introducimos el operador lineal continuo  $\Pi \in \mathcal{L}(X', V')$  dado por

$$\Pi(f)(v) = f(v)$$

(observemos que  $\|\Pi\| < 1$ )

**Teorema 1.2** *Se verifican las dos condiciones siguientes:*

i)  $\Pi \circ f : V \rightarrow V'$  es un isomorfismo

ii)  $b$  satisface la condición inf-sup

si, y solo si,

el operador lineal  $\Phi \in \mathcal{L}(X \times M, X' \times M')$  dado por  $\Phi(v, q) = (A(v) + B'(q), B(v))$  es un isomorfismo

**Demostración:** puede verse en [27] pagina 59

**Observación:** Combinando los teoremas 1 y 2 se obtiene que se verifican las siguientes condiciones:

a) existe  $\alpha > 0$  tal que:

$$\inf_{u \in V} \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V \|v\|_V} \geq \alpha$$

b) Para todo  $v \in X$  no nulo se verifica que

$$\sup_{v \in V} |a(u, v)| > 0$$

c) existe  $\beta > 0$  tal que:

$$\inf_{\nu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \nu)}{\|v\|_X \|\nu\|_M} \geq \beta$$

si, y solo si:

Dado  $l \in X'$  y  $\chi \in M'$ , existe un único par  $(u, p) \in X \times M$  tal que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = l(v) & \forall v \in X \\ b(u, q) = \chi(q) & \forall q \in M \end{cases}$$

y, además, existe una constante  $C$  positiva tal que

$$\|u\|_X + \|p\|_M \leq C(\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'})$$

**Definición:** Diremos que una forma bilineal  $a : X \times X \rightarrow \mathfrak{R}$  es *fuertemente coerciva en  $X$*  si se verifica que existe una constante positiva  $\nu_0$  tal que:

$$a(u, u) \geq \nu_0 \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X$$

Observemos que si  $a$  es fuertemente coerciva, entonces  $a$  es debilmente coerciva.

**Observación:** El teorema convencional de Lax-Milgram concierne a formas bilineales continuas y fuertemente coercivas y es consecuencia del teorema 1 poniendo  $X = M$  y las condiciones sobre  $a$  se reducen a:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq M \|u\|_X \|v\|_X \\ a(u, u) &\geq \nu_0 \|u\|_X^2 \end{aligned}$$

## 1.2 El método de elementos finitos

### 1.2.1 Método de Galerkin

Sean  $V$  un espacio de Hilbert y  $A : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$  una forma bilineal. El problema a considerar es:

$$\begin{cases} \text{Dado } f \in V' \text{ encontrar } u \in V \text{ tal que:} \\ A(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1.7)$$

Sea  $X$  un espacio de Hilbert tal que  $V \subset X$ . Consideremos también un subespacio de dimensión finita  $S \subset X$  que se llamará el *espacio aproximante*.

Notaremos por  $V_S = V + S$  y supondremos que  $f \in X'$  y que existe  $a : V_S \times V_S \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que

- $a|_{V \times V} = A$
- $a$  es *no-singular* en  $S \times S$ , es decir que  $\forall s \in S - \{0\}, \exists t \in S$  tal que  $a(s, t) \neq 0$

Llamaremos *problema aproximado* asociado al problema (1.7) a:

$$\begin{cases} \text{Dado } f \in X' \text{ encontrar } u_0 \in S \text{ tal que:} \\ a(u_0, v) = f(v) \quad \forall v \in S \end{cases} \quad (1.8)$$

a la solución de (1.8) la llamaremos *solución aproximada*.

**Definición:** Si  $S \subset V$  la solución aproximada  $u_0$  se llamará *aproximación conforme* de la solución de (1.7) y en otro caso se llamará *aproximación no conforme* de la solución de (1.7).

Si tomamos una base  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  de  $S$  podemos ver que (1.8) es equivalente a un sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) c_i = f(\varphi_j) \quad j = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

La matriz de este sistema es inversible (pues  $a$  es no-singular) y en consecuencia la solución aproximada  $u_0 = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$  se determina en forma única.

**Definición:** El procedimiento de construir la solución aproximada por medio del sistema (1.9) se llamará *método de Galerkin*.

### 1.2.2 El método de elementos finitos

Para resolver el sistema (1.9) se deben calcular los elementos  $a(\varphi_i, \varphi_j)$  y es de mucha importancia en la práctica que esto se realice sin mucho costo computacional.

*El método de elementos finitos se aplica a problemas variacionales que provienen de una ecuación diferencial en un dominio  $\Omega$  y es una técnica para construir subespacios de dimensión finita  $S$  tal que la matriz del sistema (1.9) sea rala (es decir, con una cantidad de ceros tal que hace más conveniente computacionalmente una técnica de almacenamiento distinta de la estándar)*

El caso en que  $S \subset V$  se llama *método de elementos finitos conforme* y en otro caso se llamará *método de elementos finitos no conforme*.

La técnica consiste en:



- la partición del dominio  $\Omega$  (en el cual se plantea el problema) en un conjunto de subdominios llamados *elementos*
- la construcción del espacio  $S$  definido sobre  $\Omega$  por funciones simples (en general polinomios en cada elemento)

a esta partición la llamaremos malla o red de elementos finitos que notaremos como  $\mathcal{T}$ .

Precisemos lo antedicho:

**Definición:** Un *elemento finito* en  $\mathfrak{R}^n$  es una terna  $(K, P, \Sigma)$  donde:

- $K$  es un subconjunto cerrado de  $\mathfrak{R}^n$  con interior no vacío y con frontera Lipchitz continua, el cual será llamado *elemento*
- $P$  es un espacio de funciones reales definidas sobre  $K$  que incluye al espacio  $\mathcal{P}_k(K)$  de polinomios de  $n$  variables y de grado  $k$  sobre  $K$
- $\Sigma$  es un conjunto finito de formas lineales linealmente independiente  $\phi_i, 1 \leq i \leq N$  definidas sobre  $P$ , el cual es  *$P$ -unisolvante*, es decir: dados escalares reales  $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \exists! p \in P$  tal que  $\phi_i(p) = \alpha_i, 1 \leq i \leq N$

**Observación:**  $\exists p_i \in P$  tal que  $\phi_j(p_i) = \delta_{ij}, 1 \leq i \leq N$  donde  $\delta_{ij}$  es 1 si  $i = j$  y cero si son distintos. Luego  $\forall p \in P$  se tiene que  $p = \sum_{i=1}^N \phi_i(p)p_i$  y en consecuencia  $\dim P = N$

**Definición:** Los elementos de  $\Sigma$  se llaman *grados de libertad* del elemento finito y las funciones  $\{p_i\}$  se llaman *funciones base* o *funciones de forma*.

**Definición:** Un elemento finito se llama *de Lagrange* si sus grados de libertad son de la forma:  $\phi(p) = p(A), A \in K$  y el punto  $A$  se llama *nodo* del elemento  $K$  y notaremos por  $\mathcal{N}_K$  al conjunto de nodos de  $K$ .

**Definición:** Sea  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  un elemento finito de Lagrange. Diremos que el elemento  $(K, P, \Sigma)$  es *afinmente equivalente* a  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  si existe una aplicación afin inversible  $F : \hat{K} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  tal que

- $K = F(\hat{K})$
- $P = \{p : K \rightarrow \mathfrak{R} : p = \hat{p} \circ F^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\}$
- $\Sigma = \{\phi_i(p) = p(F(\hat{a}_i)) \quad : \quad \hat{a}_i \in \mathcal{N}_{\hat{K}}\}$

**Definición:** Una familia de elementos se llama una *familia afin* si todos sus elementos son afinmente equivalentes a un elemento finito fijo  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  llamado el *elemento finito de referencia* de la familia.

Por simplicidad consideraremos en que los elementos  $K$  son todos polígonos, los elementos finitos son todos de Lagrange y forman una familia afin. De esta manera excluimos varios casos posibles (como por ejemplo, de tener elementos con lados curvos, combinar triángulos con rectángulos, etc.) que no serán utilizados en esta tesis.

**Definición:** Una *malla o red afin* de elementos finitos de Lagrange es una familia de elementos finitos  $\mathcal{T} = \{(K, P_K, \Sigma_K)\}$  tales que:

- $K$  es un polígono  $\forall (K, P_K, \Sigma_K) \in \mathcal{T}$
- $(K, P_K, \Sigma_K)$  es un elemento finito de Lagrange
- $\mathcal{T}$  es una familia afin
- $\bar{\Omega} = \bigcup \{K : (K, P_K, \Sigma_K) \in \mathcal{T}\}$  y en consecuencia  $\Omega$  es un polígono
- cualquier lado de un elemento  $K_1$  es una lado de otro elemento  $K_2$ , en cuyo caso se diran *adyacentes*, o es una parte de la frontera de  $\Omega$ .
- si  $(K, P_K, \Sigma_K)$  y  $(K', P_{K'}, \Sigma_{K'})$  son dos elementos adyacentes entonces  $\mathcal{N}_K \cap K = \mathcal{N}_{K'} \cap K$

**Definición:**  $\mathcal{N} = \bigcup \{\mathcal{N}_K : (K, P, \Sigma)\}$  es el conjunto de los *nodos de la malla*

Para introducir los espacios de elementos finitos debemos establecer previamente la siguiente *hipótesis de compatibilidad* conocida como el *patch test*:

**los momentos hasta el grado  $k - 1$  de  $v \in \mathbf{S}$  en cualquier lado de la partición deben ser continuos**, es decir:

$$\forall q \in \mathcal{P}_{k-1}(E') \quad \int_{E'} v q \, ds \text{ es continuo a través de } E'$$

donde  $k$  es el mismo de la definición de elemento finito (en donde requeriamos que  $\mathcal{P}_k \subset P$ ).

**Definición:** El *espacio de elementos finitos*  $S(\mathcal{T})$  asociado a  $\mathcal{T}$  es el espacio formado por las funciones  $v$  tales que  $v|_K \in P_K \forall K \in \mathcal{T}$  y tal que  $S(\mathcal{T})$  verifica el patch test.

Sea  $\{\mathcal{T}_j\}$  una familia de redes y sean  $S_j = S(\mathcal{T}_j)$  los espacios asociados a  $\mathcal{T}_j$ . Para mayor simplicidad supondremos que el problema de contorno que estamos resolviendo tiene condiciones de Dirichlet homogéneas. Notaremos por  $S_{j,0}$  al subespacio de  $S_j$  de las funciones que se anulan en los nodos pertenecientes a la frontera y por  $u_j$  a la correspondiente solución aproximada en  $S_{j,0}$  dada por  $a_j(u_j, v) = f(v) \forall v \in S_{j,0}$  donde  $a_j$  extiende a  $A$  en la forma expuesta anteriormente. Supondremos que la norma de  $V$  se extiende a los espacios  $V_j = V_{S_j} \equiv V + S_j$

**Definición:** Diremos que la sucesión  $(u_j)$  *converge* a  $u$  si  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u - u_j\|_{V_j} = 0$

Observemos que, a diferencia del caso conforme, la norma depende de la triangulación.

**Lema 1.2** Si  $\{a_j\}$  verifica:

$$1) \exists M_j > 0 \text{ tal que } |a_j(y, z)| \leq M_j \|y\|_{V_j} \|z\|_{V_j} \quad \forall y, z \in V_j$$

$$2) \exists \alpha_j > 0 \text{ tal que } \alpha_j \leq \inf_{y \in S_{j,0}} \sup_{w \in S_{j,0}} \frac{a_j(y, w)}{\|y\|_{V_j} \|w\|_{V_j}}$$

$$\text{entonces } \|u - u_j\|_{V_j} \leq \left(\frac{M_j}{\alpha_j} + 1\right) \inf_{v \in S_{j,0}} \|u - v\|_{V_j} + \left(\frac{1}{\alpha_j}\right) \sup_{w \in S_{j,0}} \frac{f(w) - a_j(u, w)}{\|w\|_{V_j}}$$

**Demostración:** Si  $v \in S_{j,0}$  de 2) se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha_j \|u_j - v\|_{V_j} &\leq \sup_{w \in S_{j,0}} \frac{a_j(u_j - v, w)}{\|w\|_{V_j}} = \sup_{w \in S_{j,0}} \frac{f(w) - a_j(v, w)}{\|w\|_{V_j}} \\ &= \sup_{w \in S_{j,0}} \left\{ \frac{f(w) - a_j(u, w)}{\|w\|_{V_j}} + \frac{a_j(u - v, w)}{\|w\|_{V_j}} \right\} \end{aligned}$$

y de 1) se sigue que:

$$\alpha_j |u_j - v|_{V_j} \leq \sup_{w \in S_{j,0}} \frac{f(w) - a_j(u, w)}{|w|_{V_j}} + M_j |u - v|_{V_j}$$

Luego:

$$\begin{aligned} |u_j - u|_{V_j} &\leq |u_j - v|_{V_j} + |v - u|_{V_j} \\ &\leq \left(\frac{M_j}{\alpha_j} + 1\right) \inf_{v \in S_{j,0}} |u - v|_{V_j} + \left(\frac{1}{\alpha_j}\right) \sup_{w \in S_{j,0}} \frac{f(w) - a_j(u, w)}{|w|_{V_j}} \end{aligned}$$

**Observación:** Si existen constantes positivas  $M$  y  $\alpha$  tales que  $\alpha \leq \alpha_j$  y  $M_j \leq M \forall j$ , se verifica que existe una constante  $C$  tal que:

$$|u - u_j|_{V_j} \leq C \left\{ \inf_{v \in S_{j,0}} |u - v|_{V_j} + \sup_{w \in S_{j,0}} \frac{f(w) - a_j(u, w)}{|w|_{V_j}} \right\} \quad (1.10)$$

Este resultado se conoce como lema de Strang y es una generalización del lema de C ea para el caso conforme.

El primer término del lado derecho de (1.10) se llama *error de discretización* y el segundo *error de consistencia*. Este último puede verse como un término de perturbación: mide cuán bien la solución exacta satisface la ecuación discreta. Diremos que la solución de elementos finitos es de *orden óptimo* si los términos de discretización y de consistencia tienen el mismo orden.

### 1.2.3 Estimaciones del error de interpolación

#### Estimaciones del error para operadores que preservan polinomios

Se puede ver en [18] el siguiente resultado básico:

**Teorema 1.3** Para enteros  $k \geq 0$  y  $m \geq 0$  y números  $p, q \in [1, \infty]$ , sean  $W^{k+1,p}(\hat{K})$  y  $W^{m,q}(\hat{K})$  espacios de Sobolev que satisfacen la inclusión:

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \rightarrow W^{m,q}(\hat{K})$$

y sea  $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{K}), W^{m,q}(\hat{K}))$  tal que

$$\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{K})$$

Para cualquier conjunto abierto  $K$  que sea afinmente equivalente a  $\hat{K}$ , sea  $\Pi_K$  definida por

$$\Pi_K v = \hat{\Pi}\hat{v} \cdot F^{-1}$$

para funciones  $\hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{K})$  y  $v \in W^{k+1,p}(K)$  relacionadas por  $v = \hat{v} \cdot F^{-1}$  donde  $F$  es la aplicación lineal inversible de  $K'$  en  $K$ . Entonces, existe una constante  $C = C(\hat{\Pi}, \hat{K})$  tal que para todo  $K$  afinmente equivalente

$$|v - \Pi_K v|_{m,q,K} \leq C \|B^{-1}\|^m \|B\|^{k+1} |\det(B)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} |v|_{k+1,p,K} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(K)$$

**Observación:** Si ponemos:

$$\begin{aligned} h &= \text{diam}(K) \\ \hat{h} &= \text{diam}(\hat{K}) \\ \rho &= \sup\{\text{diam}S; S \text{ es una bola contenida en } K\} \\ \hat{\rho} &= \sup\{\text{diam}S; S \text{ es una bola contenida en } \hat{K}\} \end{aligned}$$

entonces

$$\|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho} \quad |\det B| = \frac{\text{med}(K)}{\text{med}(\hat{K})}$$

se obtiene en el teorema anterior:

$$|v - \Pi_K v|_{m,q,K} \leq C(\text{med}(K))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{k+1,p,K} \quad \forall v \in W^{k+1,p}(K)$$

### Familias de triangulaciones y operadores de interpolación

Dada una triangulación  $\mathcal{T}$  para  $K \in \mathcal{T}$  notaremos por  $h_K = \text{diam}K$  y por  $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$ . En lo que sigue usaremos a  $h$  como *parámetro de discretización*.

Un conjunto de triangulaciones  $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$  de  $\Omega$  será llamada una familia de triangulaciones si para cada  $h$  a lo sumo hay una triangulación y para  $\epsilon > 0$  existe  $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$  con  $h < \epsilon$ .

**Definición:** Una familia de triangulaciones  $\mathcal{F}$  se dice *regular* si existe una constante  $\sigma > 0$  tal que para cualquier  $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$  y cualquier  $K \in \mathcal{T}_h$  se tiene

$$\frac{h_K}{r_K} \leq \sigma$$

donde  $\rho_K = \sup\{\text{diam } S : S \text{ es una bola contenida en } K\}$

Una familia de triangulaciones se dirá *casi-uniforme* si es regular y satisface la siguiente *hipótesis inversa*: existe un número  $\alpha$  tal que  $h \leq \alpha h_K$ .

**Observación:** La regularidad de una familia de elementos triangulares es equivalente a la *condición de Zlamal del ángulo mínimo* [48], Existe una constante  $\alpha_0$  tal que

$$\alpha_K \geq \alpha_0 > 0$$

para todo  $K \in \mathcal{T}_h$  y todas las triangulaciones, donde  $\alpha_K$  denota el menor ángulo de  $K$

Con las notaciones de la sección anterior escribiremos  $V = S(\mathcal{T}_h)$  y por  $V_0$  al subespacio de  $V$  formado por las funciones que se anulan en los nodos de la frontera del dominio.

El análisis numérico de problemas con valores de contorno resueltos por el método de elementos finitos requiere del conocimiento de resultados en la teoría de aproximaciones. Para establecer el

error estimado entre la solución exacta de un problema y la del problema discreto correspondiente que es buscada en un espacio de elementos finitos adecuado; debemos comparar esta solución con la mejor aproximante en el espacio de elementos finitos, con respecto a la norma de un o varios espacios de Sobolev; el camino más simple es definir un operador de interpolación de este espacio de Sobolev en el espacio de elementos finitos.

El resultado que se quiere obtener es el siguiente:

**Teorema 1.4** *Supongamos que  $\mathcal{T}$  es una familia regular de elementos finitos. Entonces, existe un operador  $\Pi : W^{l,p}(\Omega) \rightarrow V$  con las siguientes propiedades:*

- a)  $W_0^{l,p}(\Omega)$  tiene por imagen a  $V_0$ , es decir,  $\Pi(W_0^{l,p}(\Omega)) = V_0$   
b) Para  $0 \leq m \leq l \leq r + 1$  y  $q \leq p$  se tiene

$$\|v - \Pi v\|_{m,q,K} \leq C h_K^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) + l - m} |v|_{l,p,S_K}$$

donde  $S_K$  es el interior del conjunto  $\cup\{\overline{K}_i \cap \overline{K}_j \neq \emptyset, K_i, K_j \in \mathcal{T}\}$  y la constante  $C$  depende solo de la dimensión, el máximo grado de los polinomios de  $P_K$  y de la regularidad de la red.

En [16] se considera la interpolada de Lagrange usual y se obtienen resultados similares al anterior basados en la continuidad de la interpolada; pero dicha interpolada puede no existir; por ejemplo si  $u \in H^1(\Omega)$  donde  $\Omega$  es un dominio del plano los valores puntuales de  $u$  pueden no estar definidos y consecuentemente la interpolación anterior no es posible. En [45] se define una aproximación considerando la interpolación de las funciones regularizadas. En [19], Clément propone un operador de interpolación usando promedios locales para definir valores nodales aún para funciones de  $L^1$ . Esta interpolación verifica el teorema anterior y además puede generalizarse a otros casos como, por ejemplo, en que el dominio de definición sea curvo [14]. Sin embargo, la interpolación no preserva naturalmente las condiciones de borde homogéneas, es decir, para que se verifique la propiedad a) del teorema anterior, se modifica el operador imponiendo valores nodales nulos en el borde; lo cual no es fácil de extender en el caso en que las condiciones de borde no sean homogéneas. En [41] se propone otro operador de interpolación basado en promedios locales que preserva las condiciones de borde naturalmente.

#### 1.2.4 Estimadores del error y Adaptividad

El proceso de seleccionar  $S_{n+1}$  de todos los espacios previos:  $S_i, i = 1, \dots, n$  y posiblemente de  $u_n$  y los datos del problema se llamará *procedimiento de extensión*. Este procedimiento de extensión, en general está basado en la estimación de los errores de discretización y de consistencia. Observemos que la determinación del error exacto requiere el acceso a la solución exacta, la cual en general no es conocida. Por eso es necesario obtener estimaciones del error.

En general, hay dos tipos de estimaciones del error: (a) estimaciones a priori y (b) estimaciones a posteriori. Las estimaciones a priori se basan en el conocimiento de características de la solución tales como su suavidad y nos dan información acerca de la "velocidad" de la convergencia, es decir, como tiende a cero el error cuando el número de grados de libertad tiende a infinito. Usualmente no dan información acerca del error real para una malla dada.

Los estimadores a posteriori usan información obtenida durante el proceso de cálculo de la solución y los datos del problema, pueden darnos una medida cuantitativa del error exacto.

El proceso de cambiar la aproximación de manera tal que podamos alcanzar la "mejor" solución para un dado costo computacional se llamará *proceso adaptivo* o *adaptividad*. Este proceso es normalmente ejecutado después de que tenemos disponible una solución inicial; y las regiones del dominio de solución donde la precisión no es satisfactoria serán identificadas de acuerdo al criterio elegido de estimación del error. Luego el proceso puede iterarse tomando la última solución como la nueva solución inicial.

Cuando hacemos refinamientos adaptivos en problemas que envuelven singularidades las mallas generadas son usualmente altamente no-uniformes (es decir, los elementos de  $\mathcal{T}$  pueden tener tamaños muy diferentes). Sin embargo, si el refinamiento se hace de una forma apropiada la familia  $\{\mathcal{T}_j\}$  pueden construirse tal que el ángulo mínimo de cualquier  $\mathcal{T}_j$  no es menor que la mitad del ángulo mínimo de la triangulación inicial (ver [39]).

Introducimos la siguiente relación de orden entre redes:

**Definición:** Diremos que una red  $\mathcal{T}_2$  es *más fina* que otra red  $\mathcal{T}_1$  si se verifica que:

$$S(\mathcal{T}_1) \cap C(\Omega) \subset S(\mathcal{T}_2) \cap C(\Omega)$$

donde  $C(\Omega)$  indica el espacio de las funciones continuas. También diremos que  $\mathcal{T}_2$  es *un refinamiento* o una *densificación* de  $\mathcal{T}_1$ .

En general, un *estimador a posteriori del error*  $\epsilon_{\mathcal{T}}$ , asociado a una red  $\mathcal{T}$  tiene la siguiente estructura:

$$\epsilon(\mathcal{T}, p) = \|(\eta(T, u_{\mathcal{T}}, p))_{T \in \mathcal{T}}\|$$

donde  $p$  indica los datos del problema,  $\eta$  es una aplicación a valores reales y  $\| \cdot \|$  es una norma en  $\mathfrak{R}^{N_{el}}$  (donde  $N_{el}$  es el número de elementos). La función  $\eta$  especializada en  $(T, u_{\mathcal{T}}, p)$  nos da un valor llamado *indicador del error* o *estimador del error local* en el elemento  $T$ .

Cuando no produzca confusiones, notaremos  $\eta_T = \eta(T, u_{\mathcal{T}}, p)$  y por  $\epsilon = \epsilon(\mathcal{T}, p)$

**Definición:** Un estimador a posteriori del error se dirá *equivalente al error en norma*  $\| \cdot \|$  si existen dos constantes positivas  $C_1, C_2$  que dependen sólo de mínimo ángulo de  $\mathcal{T}$ , tales que

$$C_1 \epsilon \leq \|u - u_{\mathcal{T}}\| \leq C_2 \epsilon$$

Los indicadores del error se emplean en el proceso adaptivo para identificar aquellas porciones de la malla con mayores errores, con el fin de generar una nueva malla refinada. Usualmente las mallas generadas por este proceso adaptivo son regulares, pero no uniformes [39]; y en consecuencia, todos los estimadores conocidos no son asintóticamente exactos en las mallas que se construyen adaptivamente. Sin embargo, los estimadores en uso son equivalentes al error para cualquier familia de redes regulares, y esta es la mejor propiedad que debemos requerir de un estimador. En los capítulos siguientes propondremos estimadores a posteriori del error y probaremos, en algunos casos, que son equivalentes al error.



## Capítulo 2

# Estimaciones del error para problemas elípticos escalares de segundo orden

*En este capítulo se analizan los refinamientos de mallas en presencia de singularidades causadas por esquinas de la frontera del dominio. Se demuestra que con un refinamiento apropiado, las aproximaciones lineales no conformes de la solución, dan errores con el mismo orden de convergencia, medido en términos de número de incógnitas, que para soluciones suaves y triangulaciones casi uniformes. Luego para aproximaciones de elementos finitos no conformes lineales a trozos de problemas escalares elípticos de segundo orden se introducen estimadores a posteriori del error (uno o dos en cada caso) y se prueba que estos estimadores*

- son equivalentes a  $\{\sum_{T \in \mathcal{T}} |e|_{1,p,T}^p\}^{\frac{1}{p}}$
- acotan por arriba a  $\|e\|_{0,p}$
- son equivalentes a  $\|e\|_{0,\infty}$

*en los casos respectivos. Finalmente, se presentan varios experimentos numéricos que muestran el buen comportamiento de estos estimadores cuando ellos son usados como indicadores locales del error para refinamientos adaptivos.*

### 2.1 Introducción

En este capítulo tratamos con estimadores a posteriori del error y adaptividad para métodos de elementos finitos no conformes.

Hay distintas motivaciones para introducir métodos no conformes. Por ejemplo, para evitar la necesidad de elementos suaves en problemas de cuarto orden o para tratar problemas de



minimización con restricciones tales como las ecuaciones de Stokes (ver [29] para un revisión de esta clase de métodos). También, puede verse que están relacionados con métodos mixtos (ver [1], [33]). También nos referimos a [2] para ver aplicaciones más recientes en elasticidad.

Consideramos aquí el caso de aproximaciones lineales no conformes de problemas elípticos escalares de segundo orden [18]. En los capítulos subsiguientes veremos como extender esta técnica a otros problemas.

Como primer paso nos interesa el comportamiento del método de elementos finitos en presencia de singularidades causadas por esquinas de la frontera del dominio. La pregunta que nos hacemos es si se justifica generar un método adaptivo para resolver dichos problemas. La respuesta es sí, ya que, mediante un proceso adaptivo adecuado, puede obtenerse el mismo orden de convergencia del error, medido en termino de número de incógnitas, que para soluciones suaves y triangulaciones casi uniformes. En el caso conforme, este análisis puede verse en [6] y [30]. La dificultad de extenderlo al caso de elementos finitos no conformes reside en el tratamiento de los términos de consistencia. En la práctica esto significa que, si somos capaces de construir un método adaptivo eficiente, podemos generar soluciones más precisas con menor costo computacional.

En el caso conforme se introdujeron varias técnicas para definir estimadores de error para distintos problemas basadas en usar la ecuación del residuo (ver por ejemplo [7], [8], [9], [47]). Para extender estas técnicas a aproximaciones no conformes, la dificultad principal es el tratamiento de los términos de consistencia que aparecen en este caso en la ecuación del error. Estos términos dependen de la solución exacta y no pueden despreciarse. La técnica expuesta en este capítulo se basa en el uso de la descomposición de Helmholtz y de algunas relaciones de ortogonalidad para el error. En esta forma, es posible extender al caso no conforme las ideas desarrolladas en [47].

En el caso de aproximaciones lineales a trozos de problemas elípticos de segundo orden definimos estimadores de error equivalentes al error en distintas normas. En particular, vemos que los saltos a través de elementos de la derivada tangencial de la solución aproximada  $u_j$  (la cual puede escribirse en términos de los saltos de  $u_j$ ) juegan un papel importante. En efecto, los saltos del flujo (que en el caso conforme son esenciales) pueden omitirse pues ellos están dominados por el lado derecho de la ecuación (es decir, el residuo local).

Resultados numéricos muestran el buen comportamiento de estos estimadores cuando se usan como indicadores del error para refinamientos adaptivos, una de las más importantes aplicaciones de las estimaciones a posteriori del error.

El resto del capítulo está organizado como sigue. En la sección 2 introducimos el problema modelo y recordamos su aproximación por elementos finitos. La sección 3 trata de estimaciones a priori del error y constituye la justificación de la necesidad del método adaptivo. En la sección 4 se introducen estimadores a posteriori del error (uno o dos en cada caso) y se prueba que estos estimadores

- son equivalentes a  $\{\sum_{T \in \mathcal{T}} |e|_{1,p,T}^p\}^{\frac{1}{p}}$
- acotan por arriba a  $\|e\|_{0,p}$
- son equivalentes a  $\|e\|_{0,\infty}$

en los casos respectivos. En la sección 4 se introducen varios estimadores del error y se prueba que son equivalentes a distintas normas del error. Finalmente, en la sección 5 presentamos varios resultados numéricos.

## 2.2 Problema modelo y su aproximación por elementos finitos

Sea  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  un polígono simplemente conexo. Consideramos el problema modelo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega \\ u = g, & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Usaremos notación estándar para espacios de Sobolev, normas y seminormas. Entonces, para  $f \in L^2(\Omega)$  y  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  la solución  $u \in H^1(\Omega)$  del problema (2.1) satisface:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1 \quad (2.2)$$

Supondremos que tenemos una familia  $\{\mathcal{T}_j\}$  de triangulaciones de  $\Omega$  tales que cualquier par de triángulos en  $\mathcal{T}_j$  se cortan a lo sumo en un vértice o en un lado.

Para todo  $\mathcal{T}_j$  introducimos el espacio de elementos no-conformes

$$V^j = \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_1, \quad \forall T \in \mathcal{T}_j \text{ y } v \text{ es continua en el punto medio de cada lado}\}$$

( $\mathcal{P}_1$  denota el espacio de polinomios de grado uno) y definimos,

$$V_0^j = \{v \in V^j : v = 0 \text{ en los puntos medios contenidos en } \partial\Omega\}$$

En nuestro análisis también usaremos el espacio estándar de elementos finitos conformes lineales a trozos,

$$M^j = \{v \in H^1(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_1, \quad \forall T \in \mathcal{T}_j\}$$

y

$$M_0^j = M^j \cap H_0^1$$

Sea  $M_\ell$  el punto medio del lado  $\ell$ . Entonces la aproximación por elementos finitos no-conformes a la solución del problema (2.1) se define por  $u_j \in V^j$  y

$$\begin{cases} \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla u_j \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, & \forall v \in V_0^j \\ u_j(M_\ell) = g(M_\ell), & \forall \ell \subset \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

**Definición:** Si  $v \in \Pi_{T \in \mathcal{T}_j} W^{1,p}(T)$  definimos el vector  $\nabla_j v \in L^p \times L^p$  por

$$\nabla_j v|_T = \nabla(v|_T)$$

Observemos que  $\|\nabla_j v\|_{0,p}$  es una seminorma sobre  $\Pi_{T \in \mathcal{T}_j} W^{1,p}(T)$  que extiende a  $|\cdot|_{1,p}$ . Además, cuando el parámetro de discretización sea  $h$  escribiremos  $\nabla_h$  en lugar de  $\nabla_j$

Para mayor simplicidad en los cálculos supondremos en este capítulo que:  $g$  es lineal a trozos y  $f$  es constante a trozos y denotaremos por  $f_T$  al valor de  $f$  en el elemento  $T$ .

## 2.3 Estimaciones a priori del error

### 2.3.1 Caso regular

El análisis de las estimaciones a priori para el método de elementos finitos usualmente se basa en la regularidad de la solución del problema dado [18] y se prueban resultados del siguiente tipo:

$$\|u - u_h\| \leq C(u)h^\beta \quad (2.4)$$

donde utilizamos como parámetro de discretización de la familia de redes al número  $h = \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$ . Decimos que el orden de convergencia es  $\beta$  con respecto al parámetro  $h$  o equivalentemente, que tenemos una convergencia  $O(h^\beta)$ . Además de la regularidad de  $u$ , se supone que la familia de redes  $\mathcal{T}_h$  es regular, es decir, existe una constante  $\sigma$  tal que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

donde  $h_T = \text{diam}T$  y  $\rho_T = \sup\{\text{diam} S \text{ donde } S \text{ es una bola contenida en } T\}$ .

Si indicamos por  $\hat{N}$  al número de nodos del elemento de referencia, por  $\sigma_n$  es la medida de la bola unitaria en  $\mathfrak{R}^n$ , por Nod al número de nodos de la red y si suponemos que la familia de redes es casi uniformes, es decir, es regular y existe una constante  $\alpha$  tal que

$$h \leq \alpha h_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

entonces podemos reescribir la desigualdad anterior utilizando como parámetro a Nod, pues

$$\text{Nod} \leq \hat{N} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} 1 \leq \hat{N} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sigma^n \frac{\rho_T^n}{h_T^n} \leq \hat{N} \frac{\sigma^n}{\sigma_n} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\alpha^n}{h^n} \int_T dx \leq \hat{N} \frac{\sigma^n \alpha^n}{\sigma_n h^n} |\Omega|$$

Entonces, se tiene

$$h \leq \left( \frac{\hat{N} \sigma^n \alpha^n |\Omega|}{\sigma_n} \right)^{\frac{1}{n}} (\text{Nod})^{-\frac{1}{n}}$$

y en consecuencia se obtiene de (2.4) el orden de convergencia con respecto al parámetro  $Nod$ :

$$\|u - u_h\| \leq C(u)Nod^{-\frac{\beta}{n}}$$

Para el caso particular en que  $n = 2$ ,  $u \in H^2(\Omega)$  y el espacio de elementos finitos está formado por funciones lineales en cada elemento se tiene:

$$\|\nabla_h(u - u_h)\|_{0,2} \leq C(Nod)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{2,2} \quad (2.5)$$

La presencia de esquinas en la frontera del dominio produce un comportamiento singular de la solución en las cercanías de dicha esquina, inclusive en los casos en que los datos sean suaves [30]. Esta singularidad afecta al orden de convergencia en toda la región.

En [6] y en [30] se prueba que el orden con respecto al número de nodos que se obtiene para aproximaciones conformes en el caso regular puede recuperarse cuando el dominio tiene esquinas.

Veremos en el resto de la sección que dicho resultado se extiende a aproximaciones no conformes. Para ello combinaremos los resultados de [30] para el caso conforme singular, con los de [20] para el caso no conforme regular. Para que se pueda seguir la línea del razonamiento incluimos algunas demostraciones (lemas 2.1, 2.4 y 2.5) que salvo pequeñas modificaciones se encuentran también en [30].

### 2.3.2 Espacios de Sobolev con peso

Para simplificar el análisis supondremos que en nuestro problema modelo  $g = 0$ . Supondremos que  $\Omega$  es un dominio plano con frontera poligonal, siendo  $\partial\Omega$  la unión de un número finito  $N$  de segmentos lineales  $\Gamma_i$  numerados en el sentido antihorario. Denotaremos por  $\omega_j$  al ángulo entre  $\Gamma_j$  y  $\Gamma_{j+1}$  y supondremos que  $\omega_j \leq \pi$  para todo  $j$  excepto para  $j = N$ . Por simplicidad supondremos que el punto de la esquina correspondiente a la intersección de  $\Gamma_N$  y  $\Gamma_1$  se ha trasladado al origen y que  $\Gamma_1$  está incluido en el semieje positivo de las abscisas (Ox). Para simplificar la notación pondremos  $\omega = \omega_N$ .

Dado  $f \in L^2(\Omega)$  la solución débil  $u \in H_0^1(\Omega)$  de

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega \quad (2.6)$$

verifica que existe un único número  $\lambda$  tal que

$$u - \lambda r^{\frac{\pi}{\omega}} \text{sen} \frac{\pi\theta}{\omega} \in H^2(\Omega) \quad (2.7)$$

donde  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  y  $\theta = \arctg(\frac{y}{x})$ .

Aquí utilizaremos como parámetro de discretización de la familia de redes al número

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$$

donde  $h_T$  es el diámetro de  $T$ . Suponemos que este número  $h$  varía y se acerca a 0 y que la familia de triangulaciones  $(\mathcal{T}_h)$  es regular.

El resultado clásico es que existe una constante  $C$  tal que:

$$\| \nabla(u - u_h) \|_{0,2,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,2,\Omega} \quad (2.8)$$

siempre que  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ ,  $k = 0, 1$  (ver sección 3.2 de Ciarlet [18]). Interpolando estas desigualdades, teniendo en cuenta (2.7), se obtiene la estimación

$$\| \nabla(u - u_h) \|_{0,2,\Omega} \leq Ch^{\frac{\pi}{\omega} - \epsilon} |u|_{1+\frac{\pi}{\omega}-\epsilon,2,\Omega}$$

para todo  $\epsilon > 0$ , si  $\lambda$  no se anula. Veremos a continuación que (2.8) no es la mejor estimación a priori si introducimos hipótesis adicionales a las redes  $\mathcal{T}_h$ . Para tal propósito definimos:

**Definición:** Para números reales  $k$  y  $\alpha \geq 0$ , denotaremos por  $H^{k+1,\alpha}(\Omega)$  al siguiente espacio

$$H^{k+1,\alpha}(\Omega) = \{v \in H^k(\Omega) : r^\alpha D^\beta v \in L^2(\Omega) \ \forall \ \beta \text{ tal que } |\beta| = k + 1\}$$

**Lema 2.1** Equipando  $H^{k+1,\alpha}$  con la norma

$$\|u\|_{H^{k+1,\alpha}(\Omega)} = \{ \|u\|_{k,2,\Omega}^2 + |u|_{H^{k+1,\alpha}(\Omega)}^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

donde

$$|u|_{H^{k+1,\alpha}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\beta|=k+1} \|r^\alpha D^\beta u\|_{0,2,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

entonces, la inmersión de  $H^{k+1,\alpha}(\Omega) \subset W^{k+1,p}(\Omega)$  es continua para todo  $p$  tal que  $1 \leq p < \frac{2}{\alpha+1}$ ; la inmersión de  $H^{k+1,\alpha}(\Omega) \subset W^{k,q}(\Omega)$  es continua para todo  $q$  tal que  $1 \leq q < \frac{2}{\alpha}$  y la inmersión natural  $H^{k+1,\alpha}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$  es compacta para  $\alpha < 1$ . Además,  $H^{2,\alpha}(\Omega)$  está inmerso continuamente en  $C^0(\overline{\Omega})$

**Demostración:** Recordemos que, en  $\mathfrak{R}^2$ ,  $r^\beta \in L^1$  si y sólo si  $\beta > -2$ . Ahora, si aplicamos la desigualdad de Hölder tenemos que:

$$|u|_{k+1,p} \leq \|r^{-\frac{2p\alpha}{2-p}}\|_{0,1}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} |u|_{H^{k+1,\alpha}}$$

y en consecuencia  $H^{k+1,\alpha} \subset W^{k+1,p}$  para todo  $p \in (1, \frac{2}{\alpha+1})$ . Por los teoremas de inmersión de Sobolev sabemos que si  $p < 2$  la inmersión de  $W^{2,p}$  en  $W^{1,q}$  es continua para todo  $q \in [p, \frac{2p}{2-p}]$ , resultando así que la inmersión de  $H^{k+1,\alpha}$  en  $W^{k,q}$  es continua para todo  $q \in (1, \frac{2}{\alpha})$ . Si  $p \in (1, \frac{2}{\alpha+1})$  y  $\alpha < 1$  entonces  $2 < \frac{2p}{2-p}$  y por el teorema de Rellich-Kondrachov la inmersión de  $W^{k+1,p}$  en  $H^k$  es compacta. Por último si observamos que para todo  $p$ , la inmersión de  $W^{2,p}$  en  $C^0(\overline{\Omega})$  es continua, se tiene que la inmersión de  $H^{2,\alpha}$  en  $C^0(\overline{\Omega})$  también lo es.

**Observación:** Teniendo en cuenta (2.7) para  $\omega \in (\pi, 2\pi)$  tenemos que la solución  $u$  de (2.6) pertenece a  $H^{2,\alpha}(\Omega)$  para todo  $\alpha > 1 - \frac{\pi}{\omega}$ . Luego, si  $\Omega$  es cualquier polígono, resulta que  $\alpha > \frac{1}{2}$  y como consecuencia del lema anterior resulta que

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \quad \forall \ p \in (1, \frac{4}{3})$$

$$u \in W^{1,q}(\Omega) \quad \forall \quad q \in (1,4)$$

Con  $P_k(G)$  indicaremos el espacio de polinomios de grado  $\leq k$  restringidos a  $G$ .

A continuación enunciamos un resultado básico sobre espacios de Sobolev que dice, como corolario, que sobre el espacio cociente  $H^{k+1,\alpha}(G)/P_k(G)$  la seminorma  $|u|_{H^{k+1,\alpha}(G)}$  es equivalente a la norma cociente. Para el caso  $\alpha = 0$  la demostración puede verse en [18] pag. 115 y para  $\alpha \neq 0$  en [30] pag. 388.

**Lema 2.2** *Existe una constante  $C$  tal que*

$$\inf_{p \in P_k(G)} \|u - p\|_{H^{k+1,\alpha}(G)} \leq C |u|_{H^{k+1,\alpha}(G)} \quad \forall \quad u \in H^{k+1,\alpha}(G)$$

### 2.3.3 Estimación del error de discretización

Sea  $E_T$  el conjunto de lados de  $T$ . Para cualquier  $T \in \mathcal{T}_h$  y  $\ell \in T$  definimos  $\Pi_\ell \in \mathcal{L}(L^2(\ell); P_0(\ell))$  y  $r_T \in \mathcal{L}(H^1(T); P_1(T))$  dados por:

$$\Pi_\ell \varphi = \frac{1}{|\ell|} \int_\ell \varphi d\sigma \quad r_T v(M_\ell) = \Pi_\ell(v|_\ell) \quad \forall \quad \ell \in E_T$$

donde  $M_\ell$  es el punto medio del lado  $\ell$  y para  $w \in H^1(\Omega)$  notaremos por  $I^{nc}w$  a la función dada por:

$$I^{nc}w|_T = r_T w \quad \forall \quad T \in \mathcal{T}_h$$

Notaremos por  $\hat{T}$  al triángulo de referencia cuyos vértices son  $(0,0);(1,0)$  y  $(0,1)$  y por  $F_T : \hat{T} \rightarrow T$  la aplicación afín invertible dada por  $F_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + b$ . También pondremos  $\hat{v}(\hat{x}) = v(x)$ ;  $\hat{r} \equiv r_{\hat{T}}$ . Notemos que se verifica  $\hat{r}\hat{u} = (r_T u) \circ F_T$

**Lema 2.3** *Existe una constante  $C$  independiente del triángulo  $T$  tal que  $\forall v \in H^{s,\alpha}(T)$  se verifica la siguiente desigualdad*

$$|\hat{v}|_{H^{s,\alpha}(\hat{T})} \leq C \|B_T^{-1}\|^\alpha \|B_T\|^s |det B_T|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{|\beta|=s} \int_T \|x - a\|^{2\alpha} |D^\beta v(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

donde  $s$  es un entero positivo y  $a = F_T(0)$  es un vértice de  $T$

**Demostración:** Tenemos que

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{H^{s,\alpha}(\hat{T})}^2 &= \sum_{|\beta|=s} \|r^\alpha D^\beta \hat{v}\|_{0,2;\hat{T}}^2 \\ &= \sum_{|\beta|=s} \int_{\hat{T}} |r^\alpha(\hat{x}) D^\beta (v \circ F_T)(\hat{x})|^2 d\hat{x} \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena y el cambio de variables  $x = F_T(\hat{x})$  obtenemos

$$|\hat{v}|_{H^{s,\alpha}(\hat{T})}^2 \leq C \|B_T\|^{2s} |\det B_T|^{-1} \sum_{|\beta|=s} \int_T |r^\alpha(F_T^{-1}(x)) D^\beta v(x)|^2 dx$$

y la desigualdad deseada se sigue porque:

$$r(F_T^{-1}(x)) = \|F_T^{-1}(x) - F_T^{-1}(a)\| \leq \|B_T^{-1}\| \|x - a\|$$

**Observación:** En el lema que sigue acotaremos el error de interpolación en un elemento  $T$ . Utilizaremos que en el elemento de referencia  $\hat{T}$  se verifica

$$\|v - \hat{r}v\|_{1,2,\hat{T}} \leq \hat{C} |v|_{H^{2,\alpha}(\hat{T})} \quad \forall v \in H^{2,\alpha}(\hat{T})$$

La demostración es la misma que para el caso conforme con la interpolada de Lagrange y puede verse en [6] pag. 456.

**Lema 2.4** *Existe una constante  $C$  independiente del triángulo  $T$  tal que  $\forall u \in H^{2,\alpha}(T)$  se verifica*

$$|u - I^{nc}u|_{1,2,T} \leq C \|B_T^{-1}\|^{1+\alpha} \|B_T\|^2 \left\{ \sum_{|\beta|=2} \int_T \|x - a\|^{2\alpha} |D^\beta u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

donde  $a$  es un vértice de  $T$

**Demostración:** Sea  $\hat{u} = u \circ F_T$ . Se verifica que  $\hat{u} \in H^{2,\alpha}(\hat{T})$  y además  $(r_T u) \circ F_T = \hat{r}\hat{u}$ . Luego  $\hat{u} - \hat{r}\hat{u} = (u - r_T u) \circ F_T = (u - r_T u)$  y entonces

$$|u - r_T u|_{1,2,T} \leq C \|B_T^{-1}\| |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} |\hat{u} - \hat{r}\hat{u}|_{1,2,\hat{T}}$$

y, utilizando que  $\hat{r}p = p \quad \forall p \in \mathcal{P}_1(\hat{T})$ , resulta

$$|u - r_T u|_{1,2,T} \leq C \|B_T^{-1}\| |\det B_T|^{-\frac{1}{2}} \hat{C} \inf_{p \in \mathcal{P}_1(\hat{T})} \|u - p\|_{H^{2,\alpha}(\hat{T})}$$

y por los lemas 2.2 y 2.3 tenemos que

$$|u - r_T u|_{1,2,T} \leq C \|B_T^{-1}\|^{1+\alpha} \|B_T\|^2 \left\{ \sum_{|\beta|=2} \int_T \|x - a\|^{2\alpha} |D^\beta v(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

**Observación:** Utilizando el hecho de que  $\|B_T\| \leq Ch_T$  y que  $\|B_T^{-1}\| \leq C\rho_T^{-1}$  (ver [18]); obtenemos de la desigualdad del lema 2.4 los siguientes casos particulares:

- Cuando  $\alpha = 0$  se obtiene

$$|u - I^{nc}u|_{1,2,T} \leq C \frac{h_T^2}{\rho_T} |u|_{2,2,T} \quad (2.9)$$

- Cuando  $\alpha > 0$  y  $a = 0$  se obtiene

$$|u - I^{nc}u|_{1,2,T} \leq C \frac{h_T^2}{\rho_T^{1+\alpha}} |u|_{H^{2,\alpha}(T)} \quad (2.10)$$

Dada una triangulación  $\mathcal{T}_h$  indicaremos con  $\mathcal{T}_{h,0}$  al conjunto de los triángulos de  $\mathcal{T}_h$  que tienen al origen como uno de sus vértices.

**Lema 2.5** *Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_h\}$  es regular y satisface que existe  $\sigma$  para el cual*  
 (a)  $h_T^{1-\alpha} \leq \sigma h \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h,0}$   
 (b)  $h_T \leq \sigma h \|x\|^\alpha \quad \forall x \in T, \forall T \in \mathcal{T}_h - \mathcal{T}_{h,0}$   
*entonces existe una constante  $C$  tal que*

$$\|\nabla_h(u - I^{nc}u)\|_{0,2,\Omega} \leq Ch |u|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}$$

**Demostración:** Si uno de los vértices de  $T$  es 0 usando (2.10), la regularidad de las triangulaciones y la hipótesis (a) obtenemos:

$$|u - I^{nc}u|_{1,2,T} \leq C \frac{h_T^2}{\rho_T^{1+\alpha}} |u|_{H^{2,\alpha}(T)} \leq Ch_T^{1-\alpha} |u|_{H^{2,\alpha}(T)} \leq Ch |u|_{H^{2,\alpha}(T)}$$

y si  $T$  no tiene vértice en 0 se sigue de (2.9), la regularidad de las triangulaciones y la hipótesis (b), que

$$|u - I^{nc}u|_{1,2,T} \leq C \frac{h_T^2}{\rho_T} |u|_{H^2(T)} \leq Ch_T |u|_{H^2(T)} \leq Ch |u|_{H^{2,\alpha}(T)}$$

luego, para todo triángulo  $T$  se tiene que

$$\|\nabla_h(u - I^{nc}u)\|_{0,2,T} \leq Ch |u|_{H^{2,\alpha}(T)}$$

de la cual se sigue la desigualdad deseada.

### 2.3.4 Estimación del error de consistencia

**Lema 2.6** *Se verifica:*

$$\|\nabla_h(I^{nc}u - u_h)\|_{0,2,\Omega}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \frac{\partial u}{\partial n} (I^{nc}u - u_h)$$

**Demostración:** Veamos que para cualquier  $w \in V_h$

$$\int_{\Omega} \nabla_h w \nabla_h (I^{nc}u - u) = 0$$

En efecto de integrar por partes se tiene

$$\int_T \nabla w \nabla (I^{nc}u - u) = \int_{\partial T} \frac{\partial w}{\partial n} (I^{nc}u - u) = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$



Ahora, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla_h(I^{nc}u - u_h)|^2 &= \int_{\Omega} \nabla_h(I^{nc}u - u_h)\nabla_h(u - u_h) \\
&= \int_{\Omega} \nabla_h u \nabla_h(I^{nc}u - u_h) - \int_{\Omega} f(I^{nc}u - u_h) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (-\Delta u - f)(I^{nc}u - u_h) + \int_{\partial T} \frac{\partial u}{\partial n}(I^{nc}u - u_h) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \frac{\partial u}{\partial n}(I^{nc}u - u_h)
\end{aligned}$$

de donde se obtiene el lema.

El siguiente lema es una generalización del lema 3 pag. 41 de [20], resultado que se recupera cuando  $\alpha = 0$ .

**Lema 2.7** Si  $\varphi \in P_1(T)$  y  $v \in H^{1,\alpha}(T)$ , entonces existe una constante  $C$  independiente del triángulo  $T$  tal que

$$\int_{\ell} \varphi(v - \Pi_{\ell}v) \leq C \frac{h_T^2}{\rho_T^{1+\alpha}} |\varphi|_{1,2,T} \left\{ \sum_{|\beta|=1} \int_T \|x - a\|^{2\alpha} |D^{\beta}v(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

donde  $a$  es un vértice de  $T$

**Demostración:** Sea  $p \in (1, \frac{2}{1+\alpha})$  y  $q_1, q_2 \in P_0(\hat{T})$ . Para  $\hat{v} \in H^{1,\alpha}(\hat{T})$  consideramos el funcional

$$\hat{\varphi} \rightarrow \int_{\hat{\ell}} \hat{\varphi}(\hat{v} - \hat{\Pi}_{\hat{\ell}}\hat{v}) d\sigma$$

el cual es continuo sobre  $W^{1,p'}(\hat{T})$  con norma  $\leq \|\hat{v} - \hat{\Pi}_{\hat{\ell}}\hat{v}\|_{0,p,\hat{\ell}}$  y se anula sobre  $P_0$ , entonces

$$\begin{aligned}
|\int_{\hat{\ell}} \hat{\varphi}(\hat{v} - \hat{\Pi}_{\hat{\ell}}\hat{v})| &\leq C \|\hat{\varphi} - q_1\|_{1,p',\hat{T}} \|(I - \hat{\Pi}_{\hat{\ell}})(\hat{v} - q_2)\|_{0,p,\hat{\ell}} \\
&\leq C \|\hat{\varphi} - q_1\|_{1,p',\hat{T}} \|\hat{v} - q_2\|_{0,p,\hat{\ell}}
\end{aligned}$$

Como la traza de  $W^{1,p}(\hat{T})$  en  $L^p(\hat{\ell})$  es continua y  $P_1(\hat{T})$  es de dimensión finita, se tiene que para  $\hat{\varphi} \in P_1(\hat{T})$  se verifica

$$\begin{aligned}
|\int_{\hat{\ell}} \hat{\varphi}(\hat{v} - \hat{\Pi}_{\hat{\ell}}\hat{v})| &\leq C \|\hat{\varphi} - q_1\|_{1,2,\hat{T}} \|\hat{v} - q_2\|_{1,p,\hat{T}} \\
&\leq C \|\hat{\varphi} - q_1\|_{1,2,\hat{T}} \|\hat{v} - q_2\|_{H^{1,\alpha}(\hat{T})}
\end{aligned}$$

donde hemos usado que la inmersión de  $H^{1,\alpha}$  en  $W^{1,p}$  es continua. Ahora, tomando ínfimo sobre  $q_1, q_2 \in P_0(\hat{T})$  y utilizando el lema 2.2 se obtiene

$$|\int_{\hat{\ell}} \hat{\varphi}(\hat{v} - \hat{\Pi}_{\hat{\ell}}\hat{v})| \leq C |\hat{\varphi}|_{1,2,\hat{T}} |\hat{v}|_{H^{1,\alpha}(\hat{T})}$$

y combinando las fórmulas de cambio de variables con el lema 2.3 tenemos:

$$\begin{aligned}
|\int_{\ell} \varphi(v - \Pi_{\ell}v)| &\leq C |\det B_T| \|B_T^{-1}\| |\int_{\hat{\ell}} \hat{\varphi}(\hat{v} - \hat{\Pi}_{\hat{\ell}}\hat{v})| \\
&\leq C \|B_T^{-1}\|^{1+\alpha} \|B_T\|^2 |\varphi|_{1,2,T} \left\{ \sum_{|\beta|=1} \int_T \|x - a\|^{2\alpha} |D^{\beta}v(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

**Observación:** En la estimación a priori del problema con solución regular se utiliza la siguiente desigualdad básica

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} w \phi \cdot \mathbf{n}_T \right| \leq Ch \|\nabla_h w\|_{0,2,\Omega} |\phi|_{1,2,\Omega} \quad \forall \phi \in (H^1(\Omega))^2, \forall w \in V_h$$

Esta es crucial para el análisis de métodos no conformes y puede verse en [20] pag. 44.

A continuación se formula un resultado que extiende la desigualdad de la observación anterior.

**Lema 2.8** Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_h\}$  es regular y satisface que existe  $\sigma$  para el cual

- (a)  $h_T^{1-\alpha} \leq \sigma h \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h,0}$   
(b)  $h_T \leq \sigma h \|x\|^\alpha \quad \forall x \in T, \forall T \in \mathcal{T}_h - \mathcal{T}_{h,0}$

entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} w \phi \cdot \mathbf{n}_T \right| \leq Ch \|\nabla_h w\|_{0,2,\Omega} |\phi|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} \quad \forall \phi \in (H^{1,\alpha}(\Omega))^2, \forall w \in V_h$$

**Demostración:** Podemos escribir

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} w \phi \cdot \mathbf{n}_T d\sigma = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} w(\phi_i - \Pi_\ell \phi_i) n_{\ell,i} d\sigma$$

y usando el lema anterior tenemos que si 0 es un vértice de  $T$

$$\left| \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} w(\phi_i - \Pi_\ell \phi_i) n_{\ell,i} d\sigma \right| \leq Ch_T^{1-\alpha} |\phi|_{H^{1,\alpha}(T)} |w|_{1,T} \leq Ch |\phi|_{H^{1,\alpha}(T)} |w|_{1,T}$$

y si 0 no es un vértice de  $T$

$$\left| \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} w(\phi_i - \Pi_\ell \phi_i) n_{\ell,i} d\sigma \right| \leq Ch_T |\phi|_{1,T} |w|_{1,T} \leq Ch |\phi|_{H^{1,\alpha}(T)} |w|_{1,T}$$

y en consecuencia se tiene la estimación deseada.

**Corolario 2.1** Con las hipótesis del lema anterior, se verifica que existe una constante  $C$  tal que:

$$\|\nabla_h(I^{nc}u - u_h)\|_{0,2,\Omega} \leq Ch |u|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}$$

**Demostración:** Basta reemplazar en el lema anterior  $\phi$  por  $\nabla u$  y usar el lema 2.6 para obtener el corolario.

### 2.3.5 Estimación del error

**Teorema 2.1** Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_h\}$  es regular y satisface que existe  $\sigma$  para el cual

- (a)  $h_T^{1-\alpha} \leq \sigma h \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h,0}$   
(b)  $h_T \leq \sigma h \|x\|^\alpha \quad \forall x \in T, \forall T \in \mathcal{T}_h - \mathcal{T}_{h,0}$   
entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\|\nabla_h(u - u_h)\|_{0,2,\Omega} \leq Ch \|u\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}$$

**Demostración:** El teorema se sigue de combinar el corolario anterior y el lema 2.5.

Si tenemos la intención de no introducir grados de libertad prescindibles, debemos poner hipótesis más restrictivas para nuestra familia de triangulaciones. Para tal fin establecemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.2** Sean  $f \in H^{0,\alpha}(\Omega)$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$  la solución de (2.6) y  $u_h$  su aproximación por elementos finitos. Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_h\}$  es regular y satisface que existe  $\sigma$  para el cual

- (a)  $\sigma^{-1} h \leq h_T^{1-\alpha} \leq \sigma h \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h,0}$   
(b)  $\sigma^{-1} h \|x\|^\alpha \leq h_T \leq \sigma h \|x\|^\alpha \quad \forall x \in T, \forall T \in \mathcal{T}_h - \mathcal{T}_{h,0}$   
(c)  $\sigma^{-1} h \|x\|^\alpha \leq h_T \leq \sigma h \|x\|^\alpha \quad \forall x \in T, \forall T \in \mathcal{T}_h - \mathcal{T}_{h,0}$   
entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\|\nabla_h(u - u_h)\|_{0,2,\Omega} \leq C(\text{Nod})^{-\frac{1}{2}} \|r^\alpha f\|_{0,2,\Omega}$$

donde  $\text{Nod}$  es el número de nodos de la triangulación  $\mathcal{T}_h$ .

**Demostración:** Observemos en primer lugar que para  $T \in \mathcal{T}_h$

$$h^2 \|x\|^{2\alpha} \leq \sigma^2 h_T^2$$

pues, si  $T \in \mathcal{T}_h - \mathcal{T}_{h,0}$  se sigue de la primera desigualdad de (b) y si  $T \in \mathcal{T}_{h,0}$  se tiene que:

$$h^2 \|x\|^{2\alpha} \leq h^2 h_T^{2\alpha} \leq \sigma^2 h_T^2$$

Ahora, veamos que se verifica

$$h \leq C \text{Nod}^{-\frac{1}{2}}$$

con  $C$  que depende sólo de  $\Omega, \alpha, \sigma$

$$\begin{aligned} \text{Nod} &\leq 3 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} 1 \\ &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \int_T dx \\ &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \int_T \|x\|^{-2\alpha} dx \\ &\leq Ch^{-2} \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\alpha < 1$ . Finalmente, para obtener el teorema se utiliza el siguiente resultado ([32], teorema 1.1); con las hipótesis anteriores, si  $f \in H^{0,\alpha}(\Omega)$ , la solución de (2.6) pertenece a  $H^{2,\alpha}(\Omega)$ , y existe una constante  $c > 0$  independiente de  $f$  tal que

$$\|u\|_{H^{2,\alpha}} \leq c \|f\|_{H^{0,\alpha}}$$

**Observación:** Una familia de triangulaciones que verifique las hipótesis del teorema anterior puede verse en [30] pag. 393.

**Observación:** Si los ángulos reentrantes son más de uno debemos modificar los espacios  $H^{m,\alpha}(\Omega)$  cambiando el peso, como en [6], donde se define para un multiíndice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$

$$\phi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^M \|x - x_i\|^{\alpha_i}$$

donde  $x_i, 1 \leq i \leq M$  denota los vértices de  $\Omega$  con ángulo interior mayor que  $\pi$  y

$$H^{m,\alpha}(\Omega) = \{u \in H^{m-1}(\Omega) : \phi_\alpha D^\beta u \in L^2(\Omega) \ \forall \ \beta \text{ tal que } |\beta| = m\}$$

equipado con la norma  $\|u\|_{H^{m,\alpha}} = \{\|u\|_{m-1,2,\Omega}^2 + \|\phi_\alpha D^m u\|_{0,2,\Omega}^2\}^{\frac{1}{2}}$  y en la definición de las familias de redes debemos modificar solamente la parte concerniente al conjunto  $\mathcal{T}_{h,0}$  de la siguiente manera: Dada una triangulación  $\mathcal{T}_h$  indicaremos con  $\mathcal{T}_{h,0}$  al conjunto de los triángulos de  $\mathcal{T}_h$  para los cuales  $\phi_\alpha$  se anula.

Los resultados anteriores se obtienen en forma análoga para cualquier polígono  $\Omega$ .

También puede observarse que si  $\Omega$  es un polígono convexo,  $\alpha = 0$  y  $\mathcal{T}_{h,0} = \emptyset$  con lo cual la familia de redes resulta casi-uniforme, lo que indica que las hipótesis sobre las redes para polígonos arbitrarios forman una buena extensión de la definición de redes casi-uniformes.

## 2.4 Estimaciones a posteriori del error

Cuando hacemos refinamientos adaptivos en problemas que envuelven singularidades las mallas generadas son usualmente altamente no-uniformes (es decir, los elementos de  $\mathcal{T}$  pueden tener tamaños muy diferentes). Sin embargo, si el refinamiento se hace de una forma apropiada la familia  $\{\mathcal{T}_j\}$  puede construirse de modo tal que el ángulo mínimo de cualquier  $\mathcal{T}_j$  no sea menor que la mitad del ángulo mínimo de la triangulación inicial (ver [39]). Por lo tanto, es natural construir estimadores de error que sean equivalentes al error con constantes que dependan sólo del ángulo mínimo (y no del tamaño del elemento). Presentaremos aquí algunos estimadores de esta clase.

### 2.4.1 Ecuación de error y relaciones de ortogonalidad

Ahora, introducimos algunas notaciones que necesitaremos en la definición y análisis de los estimadores del error.

Sea  $E_I$  el conjunto de todos los lados interiores y, como en la sección anterior,  $E_T$  el conjunto de lados de  $T$ . Para cada lado interior  $\ell$  elegimos un sentido arbitrario para la normal  $\mathbf{n}$  y denotamos a los dos triángulos que comparten este lado por  $T_{\text{in}}$  y  $T_{\text{out}}$  donde  $\mathbf{n}$  apunta hacia afuera de  $T_{\text{in}}$ . Para un lado de la frontera  $\ell$  tomamos  $\mathbf{n}$  como la normal exterior.

Si  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$  definimos la tangente en  $\ell$  por  $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$  y para  $\ell$  interior

$$\left[ \left[ \frac{\partial u_j}{\partial n} \right] \right]_{\ell}(x) = \nabla(u_j|_{T_{\text{out}}}) \cdot \mathbf{n} - \nabla(u_j|_{T_{\text{in}}}) \cdot \mathbf{n}, \quad \forall x \in \ell$$

y

$$\left[ \left[ \frac{\partial u_j}{\partial t} \right] \right]_{\ell} = \nabla(u_j|_{T_{\text{out}}}) \cdot \mathbf{t} - \nabla(u_j|_{T_{\text{in}}}) \cdot \mathbf{t}$$

Notemos que estos valores son independientes de la elección del sentido de  $\mathbf{n}$ .

Definimos el salto para  $\ell$  interior y  $v \in V^j$  como

$$[[v]]_{\ell}(x) = v|_{T_{\text{out}}}(x) - v|_{T_{\text{in}}}(x), \quad \forall x \in \ell$$

finalmente para  $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$  definimos,

$$\mathbf{curl} \varphi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

Para un  $\ell$  dado definimos  $J_{\ell,n}$  y  $J_{\ell,t}$  por

$$J_{\ell,n} = \begin{cases} \left[ \left[ \frac{\partial u_j}{\partial n} \right] \right]_{\ell} & , \quad \text{si } \ell \in E_I \\ 0 & , \quad \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$J_{\ell,t} = \begin{cases} \left[ \left[ \frac{\partial u_j}{\partial t} \right] \right]_{\ell} & , \quad \text{si } \ell \in E_I \\ 2 \left( \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \Big|_{\ell} & , \quad \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

El siguiente lema da una ecuación de error la cual es uno de los puntos principales de nuestro análisis.

**Lema 2.9** Para  $v \in W_0^{1,p'}$ ,  $\varphi \in W^{1,p'}$  y  $w \in V_0^j$  el error  $e = u - u_j$  satisface,

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \cdot (\nabla v + \mathbf{curl} \varphi) = \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left\{ \int_T f(v-w) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} (J_{\ell,n}(v-w) + J_{\ell,t}\varphi) \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Demostración:** Usando (2.3) e integrando por partes en cada elemento tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \cdot (\nabla v + \mathbf{curl} \varphi) = \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T f(v-w) - \int_T \nabla u_j \cdot \nabla(v-w) + \int_T \nabla e \mathbf{curl} \varphi \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left\{ \int_T f(v-w) - \int_{\partial T} \nabla u_j \mathbf{n}_T (v-w) + \int_{\partial T} \frac{\partial e}{\partial t} \varphi \right\} \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left\{ \int_T f(v-w) - \sum_{\ell \in E_T \cap E_I} \left[ \int_{\ell} \nabla u_j \cdot \mathbf{n}_T (v-w) + \int_{\ell} \frac{\partial u_j}{\partial t} \varphi \right] \right\} \\ & + \sum_{\ell \subset \partial\Omega} \int_{\ell} \left( \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \varphi \end{aligned}$$

el cual, en vista de las definiciones de  $J_{\ell,n}$  y  $J_{\ell,t}$ , nos da (2.11)

**Observación:** Podemos poner  $w = I^{nc}v$  en el lema 2.9 obteniendo:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \cdot (\nabla v + \mathbf{curl} \varphi) &= \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left\{ \int_T f(v - I^{nc}v) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi \right\} \end{aligned}$$

El segundo paso en el análisis son las relaciones de ortogonalidad del error las cuales se dan en el próximo lema.

**Lema 2.10** *El error satisface:*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \cdot \nabla v = 0, \quad \forall v \in M_0^j \quad (2.12)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \cdot \mathbf{curl} \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in M^j \quad (2.13)$$

**Demostración:** Como  $M_0^j \subset W_0^{1,p'} \cap V_0^j$  podemos usar (2.2) y (2.3) para  $v \in M_0^j$  y restando (2.3) de (2.2) obtenemos (2.12).

La propiedad de ortogonalidad (2.13) es conocida (ver por ejemplo [2]). En efecto, la integración por partes nos da

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \cdot \mathbf{curl} \varphi = \sum_{\ell \subset \partial\Omega} \int_{\ell} (g - u_j) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{\ell \in E_I} \int_{\ell} \llbracket u_j \rrbracket_{\ell} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

y el lado derecho se anula porque  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{\ell}$  es constante,  $\llbracket u_j \rrbracket_{\ell}$  es cero en el punto medio de  $\ell$  para todo  $\ell \in E_I$  y  $g - u_j$  es lineal en  $\ell$  (pues  $g$  lo es) y nula en el punto medio de  $\ell$  para  $\ell \subset \partial\Omega$ .

#### 2.4.2 Estimadores a posteriori del error equivalentes a $\|\nabla_j e\|_{0,p}$

En esta sección introducimos estimadores de error y probamos que son equivalentes a  $\|\nabla_j e\|_{0,p}$ . Supondremos que  $\Omega$  y  $p$  son tales que la ecuación diferencial:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\mathbf{r}) \text{ en } \Omega$$

donde  $\mathbf{r} \in L^{p'}(\Omega)$ , tiene una única solución en  $W_0^{1,p'}(\Omega)$  que verifica:

$$\|\nabla u\|_{p'} \leq C \|\mathbf{r}\|_{p'}$$

donde  $p' = \frac{p}{p-1}$  y  $C$  depende sólo de  $\Omega$  y  $p$ . Se sabe [34] que para cualquier  $\Omega$  existe un entorno del número 2 tal que, si  $p'$  pertenece a dicho entorno la hipótesis anterior se verifica.

Definimos el estimador de error local  $\eta_{T,p}$  por,

$$\eta_{T,p} = \{h_T^{p+2} |f_T|^p + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |J_{\ell,t}|^p |\ell|^2\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.14)$$

y el global por,

$$\eta_p = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{T,p}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.15)$$

Sea  $\nabla_j e$  el vector de  $L^p \times L^p$  definido por

$$\nabla_j e|_T = \nabla(e|_T)$$

**Teorema 2.3** *Existe una constante positiva  $C$  que depende sólo del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  tal que,*

$$\|\nabla_j e\|_{0,p} \leq C\eta_p$$

**Demostración:** Descomponemos un vector arbitrario  $\mathbf{r} \in L^{p'} \times L^{p'}$  como sigue,

$$\mathbf{r} = \nabla\psi_1 + \mathbf{curl} \psi_2 \quad (2.16)$$

con  $\psi_1 \in W_0^{1,p'}$  y  $\psi_2 \in W^{1,p'}$ . Notemos que cuando  $p = 2$  esta es la descomposición usual de Helmholtz de  $\mathbf{r}$  y, en efecto, (2.16) puede obtenerse como en ese caso. Primero, sea  $\psi_1 \in W_0^{1,p'}$  la solución de

$$\Delta\psi_1 = \operatorname{div} \mathbf{r} \quad , \quad \text{en } \Omega$$

entonces,  $\operatorname{div}(\nabla\psi_1 - \mathbf{r}) = 0$  y por lo tanto existe  $\psi_2 \in W^{1,p'}$  tal que

$$\mathbf{r} - \nabla\psi_1 = \mathbf{curl} \psi_2$$

Además, por las hipótesis sobre  $p$  y  $\Omega$  se verifica la siguiente desigualdad

$$|\psi_1|_{1,p'} + |\psi_2|_{1,p'} \leq C\|\mathbf{r}\|_{0,p'}$$

Ahora, sea  $I^c(\psi_2) \in M^j$  tal que,

$$\|\psi_2 - I^c(\psi_2)\|_{0,p',T} \leq Ch_T |\psi_2|_{1,p',\tilde{T}} \quad (2.17)$$

donde  $\tilde{T}$  es la unión de todos los triángulos que comparten un vértice con  $T$  (ver [19]).

Usando la descomposición (2.16), para  $\mathbf{r} \in L^{p'} \times L^{p'}$  tenemos,

$$\int_{\Omega} \nabla_j e \cdot \mathbf{r} = \int_{\Omega} \nabla_j e \cdot (\nabla\psi_1 + \mathbf{curl} \psi_2)$$

y por el lema 2.10

$$\int_{\Omega} \nabla_j e \cdot \mathbf{r} = \int_{\Omega} \nabla_j e \cdot \nabla \psi_1 + \nabla_j e \cdot \mathbf{curl} (\psi_2 - I^c(\psi_2))$$

luego, del lema 2.11 con  $v = \psi_1$ ,  $\varphi = \psi_2 - I^c(\psi_2)$  y  $w = I^{nc}\psi_1$  obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla_j e \cdot \mathbf{r} = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left\{ \int_T f_T(\psi_1 - I^{nc}\psi_1) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} J_{\ell,t}(\psi_2 - I^c(\psi_2)) \right\}$$

y usando que  $\|\psi_1 - I^{nc}\psi_1\|_{0,p',T} \leq Ch_T |\psi_1|_{1,p',T}$ , la desigualdad de Hölder y (2.17) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_j e \cdot \mathbf{r} &\leq C \eta_p (|\psi_1|_{1,p'} + |\psi_2|_{1,p'}) \\ &\leq C \eta_p \|\mathbf{r}\|_{0,p'} \end{aligned}$$

y esto prueba la desigualdad deseada, pues:

$$\|\nabla_j e\|_{0,p} \equiv \sup_{\mathbf{r} \in L^{p'} \times L^{p'}} \frac{\int \nabla_j e \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|_{0,p'}} \leq C \eta_p$$

Notaremos por  $T^* = \cup\{T' \in \mathcal{T}_j : T \text{ y } T' \text{ tienen un lado en común}\}$

**Teorema 2.4** *Existe una constante positiva  $C$  que depende sólo del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  tal que,*

$$\eta_{T,p} \leq C \|\nabla_j e\|_{0,p,T^*}$$

**Demostración:** Seguiremos las ideas desarrolladas por Verfürth [47] para el caso conforme (ver también [5]). Usamos la ecuación de error que provee el lema 2.11 con  $w = 0$  y la elección particular de  $v \in W_0^{1,p}$  y  $\varphi \in W^{1,p}$  que verifican,

$$\int_T f_T v = h_T^{p+2} |f_T|^p \tag{2.18}$$

$$\int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi = |J_{\ell,t}|^p |\ell|^2, \quad \forall \ell \in \partial T \tag{2.19}$$

y

$$|v|_{1,p',T} + |\varphi|_{1,p',T} \leq C \eta_{T,p}^{p-1} \tag{2.20}$$

No es difícil ver que tales  $v$  y  $\varphi$  existen. Para ello, denotaremos por  $b_T$  a la función *burbuja* canónica de  $T$ , es decir, el producto de las coordenadas baricentricas de  $T$  y por  $\phi_{\ell}$  a la función base canónica de  $P_2(T)$  que se anula en todos los nodos excepto en el que se encuentra en la mitad del lado  $\ell$  en el cual  $\phi_{\ell}$  vale 1.

Entonces definimos:

$$v = \alpha_T b_T$$



y

$$\varphi = \sum_{\ell \in E_T} \beta_\ell \phi_\ell$$

donde  $\{\alpha_T\}$  y  $\{\beta_\ell\}$  se determinan como sigue. Para tal  $\varphi$  (2.19) implica:

$$\beta_\ell J_{\ell,t} \int_\ell \phi_\ell = |J_{\ell,t}|^p |\ell|^2$$

con lo cual  $|\beta_\ell| \leq C |J_{\ell,t}|^{p-1} |\ell|$ . Para determinar  $\alpha_T$  utilizamos (2.18) de la cual se deduce que:

$$\alpha_T f_T \int_T b_T = h_T^{p+2} |f_T|^p$$

y en consecuencia es  $|\alpha_T| \leq C h_T^p |f_T|^{p-1}$ . Tenemos, entonces que:

$$\|v\|_{0,\infty,T} \leq C h_T^p |f_T|^{p-1}$$

$$\|\varphi\|_{0,\infty,T} \leq C \sum_\ell |J_{\ell,t}|^{p-1} |\ell|$$

$$\|\varphi\|_{0,\infty,T'} \leq C |J_{\ell,t}|^{p-1} |\ell| \quad \text{donde } \ell = T \cap T'$$

y utilizando la desigualdad inversa (es decir,  $|v_h|_{1,p',T} \leq C h^{\frac{2}{p'}-1} |v_h|_{0,\infty,T}$ , ver [18]) se obtiene:

$$|v|_{1,p',T} \leq C h_T^{\frac{2}{p'}-1+p} |f_T|^{p-1} \leq C (h_T^{p+2} |f_T|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C (\eta_{T,p})^{\frac{p}{p'}} \leq C \eta_{T,p}^{p-1}$$

$$|\varphi|_{1,p',T} \leq C h_T^{\frac{2}{p'}-1} \sum_\ell |J_{\ell,t}|^{p-1} |\ell| \leq C (\sum_\ell |J_{\ell,t}|^p |\ell|^2)^{\frac{1}{p'}} \leq C \eta_{T,p}^{p-1}$$

$$|\varphi|_{1,p',T'} \leq C h_T^{\frac{2}{p'}-1} |J_{\ell,t}|^{p-1} |\ell| \leq C |J_{\ell,t}|^{p-1} |\ell|^{\frac{2}{p'}} \leq C (|J_{\ell,t}|^p |\ell|^2)^{\frac{1}{p'}} \leq C \eta_{T,p}^{p-1}$$

donde  $T' \subset T^* - T$  y  $\ell = T \cap T'$

Observemos que  $v$  se anula fuera de  $T$  y  $\varphi$  se anula fuera de  $T^*$ . Ahora, (2.11) junto con (2.18), (2.19), (2.20) y el hecho de que  $I^{nc}v = 0$  nos da,

$$\begin{aligned} \eta_{T,p}^p &= h_T^{p+2} |f_T|^p + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |J_{\ell,t}|^p |\ell|^2 = \int_T f_T v + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell J_{\ell,t} \varphi \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left\{ \int_T f v + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell J_{\ell,t} \varphi \right\} = \int_{T^*} \nabla_j e(\nabla v + \text{curl} \varphi) \\ &\leq C \|\nabla_j e\|_{0,p,T^*} (|v|_{1,p',T} + |\varphi|_{1,p',T^*}) \leq C \|\nabla_j e\|_{0,p,T^*} \eta_{T,p}^{p-1} \end{aligned}$$

lo cual concluye el teorema.

**Observación:** La extensión de los resultados anteriores cuando la ecuación es

$$-\text{div}(A\nabla u) = f$$

donde  $A$  es una matriz constante por elemento y tal que la ecuación es estrictamente elíptica. En este caso,  $J_{\ell,n}$  debe definirse

$$J_{\ell,n} = \begin{cases} \left[ [A\nabla u_j \mathbf{n}] \right]_{\ell} & , \quad \text{si } \ell \in E_I \\ 0 & , \quad \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

**Observación:** En el caso  $p = 2$  los resultados anteriores pueden extenderse a problemas con condiciones de borde mixtas. Si notamos por  $\Gamma_D$  a la región de la frontera con condiciones de Dirichlet y por  $\Gamma_N$  a la de Neumann y suponiendo que

$$\begin{aligned} u &= g_1 & , \quad \text{en } \Gamma_D \\ A\nabla u \mathbf{n} &= g_2 & , \quad \text{en } \Gamma_N \end{aligned}$$

entonces, para un  $\ell$  dado, definimos  $J_{\ell,n}$  y  $J_{\ell,t}$  por

$$J_{\ell,n} = \begin{cases} \left[ [A\nabla u_j \mathbf{n}] \right]_{\ell} & , \quad \text{si } \ell \in E_I \\ 2(g_2 - A\nabla u_j \mathbf{n})|_{\ell} & , \quad \text{si } \ell \subset \Gamma_N \\ 0 & , \quad \text{si } \ell \subset \Gamma_D \end{cases} \quad (2.21)$$

y

$$J_{\ell,t} = \begin{cases} \left[ \left[ \frac{\partial u_j}{\partial t} \right] \right]_{\ell} & , \quad \text{si } \ell \in E_I \\ 2\left( \frac{\partial g_1}{\partial t} - \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)|_{\ell} & , \quad \text{si } \ell \subset \Gamma_N \\ 0 & , \quad \text{si } \ell \subset \Gamma_D \end{cases} \quad (2.22)$$

En este caso, el operador de interpolación conforme  $I^c$  debe preservar condiciones de frontera, es decir,  $\psi_2 - I^c(\psi_2) = 0$  en  $\Gamma_N$  (en [41] se contruye una interpolación que satisface estas condiciones). También debe redefinirse el problema del cual es solución  $\psi_1$  (ver detalles en [21]).

### 2.4.3 Estimadores a posteriori del error que acotan por arriba a $\|e\|_{0,p}$

En esta sección introducimos estimadores de error y probamos que son equivalentes a  $\|e\|_{0,p}$ . Para mayor simplicidad en los cálculos supondremos que:  $g = 0$

También supondremos que  $\Omega$  y  $p$  son tales que la ecuación diferencial:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega$$

donde  $f \in L^{p'}(\Omega)$ , tiene una única solución en  $W_0^{1,p'}(\Omega)$  que verifica:

$$\|u\|_{2,p'} \leq C \|f\|_{p'}$$

donde  $p' = \frac{p}{p-1}$  y  $C$  depende sólo de  $\Omega$  y  $p$ . Se sabe ( pag. 265 de [30] ) que para  $p > \frac{2w}{\pi}$ , donde  $w$  es el mayor de los ángulos interiores de  $\Omega$ , la hipótesis anterior se verifica. En particular si  $p$  es suficientemente grande (tal que  $1 < p' < \frac{4}{3}$ ) la hipótesis anterior se verifica para todo polígono  $\Omega$ .

Será necesaria la siguiente relación entre los saltos de una función del espacio aproximante y del salto de su derivada tangencial:

**Lema 2.11** Si  $v \in V^j$  se tiene que para cualquier lado  $\ell$  de la triangulación

$$| \llbracket v \rrbracket | \leq \frac{|\ell|}{2} |J_{\ell,t}|$$

**Demostración:** Supongamos que  $\ell$  es un lado compartido por los triángulos  $T_1$  y  $T_2$ ; notaremos los vértices de  $T_1$  en sentido antihorario por  $a_1, a_2, a_3$  y por  $a_1, a_4, a_2$  a los vértices de  $T_2$ . Además, a la restricción de  $v$  en el triángulo  $T_i$  la indicaremos por  $v_i$ . Entonces se tiene que

$$|J_{\ell,t}| = \left| \frac{v_1(a_2) - v_1(a_1)}{|\ell|} - \frac{v_2(a_2) - v_2(a_1)}{|\ell|} \right|$$

y como  $v_1(a_2) - v_2(a_2) = v_2(a_1) - v_1(a_1)$  se tiene que

$$|\ell| |J_{\ell,t}| = |v_1(a_2) - v_1(a_1) - v_2(a_2) + v_2(a_1)| = 2|v_1(a_2) - v_2(a_2)| \geq | \llbracket v \rrbracket |$$

con lo cual se obtiene el lema.

Ahora definimos el estimador de error local  $\epsilon_{T,p}$  por

$$\epsilon_{T,p} = \left\{ h_T^{2p} \|f\|_{0,p,T}^p + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} (\|J_{\ell,n}\|_{0,p,\ell}^p + \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell}^p) |\ell|^{p+1} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

y el global por

$$\epsilon_p = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \epsilon_{T,p}^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

**Teorema 2.5** Sea  $p > \frac{2w}{\pi}$  donde  $w$  es el mayor de los ángulos interiores formados por los lados pertenecientes a la frontera. Entonces, existe una constante positiva  $C$  que depende sólo del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  tal que,

$$\|e\|_{0,p} \leq C \epsilon_p$$

**Demostración:** Sea  $\chi \in L^{p'}$ . Como  $p > \frac{2w}{\pi}$  resulta que  $p' \in (1, \frac{2w}{2w-\pi})$  y entonces la solución de

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi &= \chi \text{ en } \Omega \\ \varphi &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{aligned}$$

está en  $W^{2,p'}$  y además,

$$|\varphi|_{2,p'} \leq C \|\chi\|_{0,p'} \tag{2.23}$$

Entonces, integrando por partes dos veces, usando el lema 2.10 y la desigualdad de Hölder tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e \chi &= - \int_{\Omega} e \Delta \varphi = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \nabla \varphi + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} \llbracket u_j \rrbracket \frac{\partial \varphi}{\partial n} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \nabla (\varphi - I^c \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} \llbracket u_j \rrbracket \frac{\partial (\varphi - I^c \varphi)}{\partial n} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T f (\varphi - I^c \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} [J_{\ell,n} (\varphi - I^c \varphi) + \llbracket u_j \rrbracket \frac{\partial (\varphi - I^c \varphi)}{\partial n}] \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \|f\|_{0,p,T} \|\varphi - I^c \varphi\|_{0,p',T} + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} [\|J_{\ell,n}\|_{0,p,\ell} \|\varphi - I^c \varphi\|_{0,p',\ell} \\ &\quad + \|\llbracket u_j \rrbracket\|_{0,p,\ell} \|\frac{\partial (\varphi - I^c \varphi)}{\partial n}\|_{0,p',\ell}] \end{aligned}$$

y usando los resultados de interpolación de [19] (aplicados a  $\varphi$  y a sus derivadas) se tiene que:

$$\int_{\Omega} e_{\chi} \leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} h_T^{2p} \|f\|_{0,p,T}^p + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{p+1} \|J_{\ell,n}\|_{0,p,\ell}^p + |\ell| \left\| \left[ [u_j] \right] \right\|_{0,p,\ell}^p \right\} \|\varphi\|_{2,p',T}$$

y utilizando 2.23 y el lema 2.11 resulta que

$$\|e\|_{0,p} \leq \inf_{\chi \in L^{p'}} \frac{\int e_{\chi}}{\|\chi\|_{0,p'}} \leq C \epsilon_p$$

Utilizando el hecho de que  $f$  es constante por elemento se puede definir un estimador del error equivalente a  $\epsilon_p$  más simple, observando que el término correspondiente al salto del flujo se acota por el correspondiente a  $f$ . En efecto, dado un lado interior  $\ell$  sea  $\varphi_{\ell} \in V_0^j$  la función base que es igual a uno en  $M_{\ell}$  y se anula en cualquier otro nodo. Entonces, de (2.3) tenemos,

$$\int_{T_{\text{in}}} \nabla u_j \cdot \nabla \varphi_{\ell} + \int_{T_{\text{out}}} \nabla u_j \cdot \nabla \varphi_{\ell} = \int_{T_1 \cup T_2} f \varphi_{\ell}$$

y si indicamos por  $f_T$  al valor de  $f$  en  $T$  e integramos por partes obtenemos

$$- \int_{\ell} J_{\ell,n} \varphi_{\ell} = \int_{T_1 \cup T_2} f \varphi_{\ell}$$

luego,

$$-J_{\ell,n} |\ell| = f_{T_1} \frac{|T|}{3} + f_{T_2} \frac{|T|}{3} \quad (2.24)$$

(la relación (2.24) fue observada en [33] en un contexto diferente). En vista de todo lo anterior, definimos el estimador de error local

$$\tilde{\epsilon}_{T,p} = \left\{ |f_T|^p h_T^{2p+2} + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |J_{\ell,t}|^p |\ell|^{p+2} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

y el global,

$$\tilde{\epsilon}_p = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \tilde{\epsilon}_T^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

y tenemos,

**Teorema 2.6** *Existe una constante positivas  $C$  que depende sólo del ángulo mínimo  $\mathcal{T}_j$  tal que*

$$\|e\|_{0,p} \leq C \tilde{\epsilon}_p$$

Demostración: El teorema se sigue de (2.24) y el Teorema 2.5.

#### 2.4.4 Estimadores a posteriori del error equivalentes a $\|e\|_{0,\infty}$

En esta sección introducimos un estimador del error el cual veremos que es equivalente a  $\|e\|_{0,\infty}$ . Este estimador extiende el del caso conforme [36] y conserva sus mismas propiedades.

Al igual que en la sección anterior supondremos que:  $g = 0$ .

Supondremos, además que la familia de triangulaciones verifica que existe  $\gamma \geq 1$  tal que  $h^\gamma \leq C \min_{T \in \mathcal{T}} h_T$ .

Como la solución exacta  $u$  es Hölder continua, digamos con exponente  $0 < \alpha \leq 1$  ([26],[30]) podemos elegir un número  $\beta$  tal que  $\beta > \frac{2\gamma}{\alpha}$ . Sea  $x_0 \in \Omega$  tal que  $|e(x_0)| = \|e\|_{0,\infty}$

**Lema 2.12** *Sea  $\delta$  una regularización de la distribución de Dirac tal que su soporte sea un subconjunto de la bola abierta con centro en  $x_0$  y radio  $\frac{h^\beta}{2}$  y, además,*

$$\int_{\Omega} \delta = 1 \quad , \quad 0 \leq \delta \leq Ch^{-2\beta}$$

y sea  $G$  la correspondiente función de Green regularizada, es decir,  $G \in H_0^1$  y  $-\Delta G = \delta$  en  $\Omega$ . Entonces:

- $\|e\|_{0,\infty} \leq C \left| \int_{\Omega} e \delta \right|$
- $|G|_{2,1} \leq C |\log h|^2$

Salvo el hecho que debemos considerar la interpolada no conforme  $I^{nc}$  para el primer ítem (lo cual no genera ningún inconveniente), la demostración se encuentra en [36].

Ahora definimos el estimador de error local  $E_T$  por

$$E_T = h_T^2 \|f\|_{0,\infty,T} + \max_{\ell \in E_T} \{ |\ell| \|J_{\ell,n}\|_{0,\infty,\ell} + |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,\infty,\ell} \}$$

y el global por

$$\epsilon = \max_{T \in \mathcal{T}_j} E_T$$

**Teorema 2.7** *Existe una constante positiva  $C$  que depende sólo del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  tal que*

$$\|e\|_{0,\infty} \leq C |\log h|^2 \epsilon$$

**Demostración:** Integrando por partes dos veces, usando el lema 2.10 y la desigualdad de Hölder tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e \delta &= - \int_{\Omega} e \Delta G = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \nabla G + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} [u_j] \frac{\partial G}{\partial n} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \nabla e \nabla (G - I^c G) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} [u_j] \frac{\partial (G - I^c G)}{\partial n} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T f (G - I^c G) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} \left[ J_{\ell,n} (G - I^c G) + [u_j] \frac{\partial (G - I^c G)}{\partial n} \right] \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \|f\|_{0,\infty,T} \|G - I^c G\|_{0,1,T} + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \left[ \|J_{\ell,n}\|_{0,\infty,\ell} \|G - I^c G\|_{0,1,\ell} \right. \\ &\quad \left. + \|[u_j]\|_{0,\infty,\ell} \left\| \frac{\partial (G - I^c G)}{\partial n} \right\|_{0,1,\ell} \right] \end{aligned}$$

y usando la teoría de interpolación estandar [18] y el lema 2.11 se tiene que:

$$\int_{\Omega} e\delta \leq C \epsilon |G|_{2,1,T}$$

y por el lema 2.12 resulta que

$$\|e\|_{0,\infty} \leq C |\log h|^2 \epsilon$$

**Teorema 2.8** *Existe una constante positiva  $C$  que depende sólo del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  tal que*

$$E_T \leq C \|e\|_{0,\infty,T^*}$$

**Demostración:** Igual que antes, siguiendo las ideas desarrolladas por Verfürth [47] para el caso conforme (ver también [36]), podemos afirmar que existen dos funciones  $v \in W_0^{2,1}$  y  $\varphi \in W^{2,1}$  que verifican

$$\int_T f_T v = h_T^2 |f_T| \quad (2.25)$$

$$\int_{\ell} J_{\ell,n} \varphi = |J_{\ell,n}| |\ell|, \quad \forall \ell \in \partial T \quad (2.26)$$

$$\int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi = |J_{\ell,t}| |\ell|, \quad \forall \ell \in \partial T \quad (2.27)$$

y

$$|v|_{2,1,T} + |\varphi|_{2,1,T} \leq C \quad (2.28)$$

No es difícil ver que tales  $v$  y  $\varphi$  existen [36], y que pueden construirse en cada elemento como polinomios cuadráticos más funciones "burbujas" cúbicas y tales que se anulen en todos los vértices de la triangulación.

Ahora, (2.11) junto con (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) y el hecho de que  $I^c v = 0$  nos da,

$$\begin{aligned} E_T &= \int_T f_T v + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi \\ &= \int_{T^*} f v + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi \\ &= \int_{T^*} \nabla_j e (\nabla v + \text{curl} \varphi) \\ &= \int_{T^*} e (-\Delta v) + \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} \left( \frac{\partial e}{\partial n} v + \frac{\partial e}{\partial t} \varphi \right) \\ &\leq C \|e\|_{0,\infty,T^*} \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{0,1,\partial T} \leq C |v|_{2,1,T}$$

y

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{0,1,\partial T} \leq C |\varphi|_{2,1,T}$$

**Observación:** Es simple la extensión de los resultados anteriores cuando la ecuación es

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$$

donde  $A$  es una matriz constante y tal que la ecuación es estrictamente elíptica. En los teoremas de esta sección hemos supuesto que  $f$  es constante por elemento. Sin embargo, los resultados siguen siendo válidos para  $A \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^{2 \times 2}$  y  $f$  uniformemente continua en cada triángulo  $T \in \mathcal{T}$  y con modulo de continuidad  $\sigma_f(t) = o(|\log t|^{-2})$  y la extensión a este caso se hace igual que para el caso conforme [36].

## 2.5 Resultados numéricos

En esta sección presentamos los resultados de algunos cálculos computacionales. Generamos las mallas  $\{\mathcal{T}_j\}$  en forma adaptiva usando como indicadores del error en el elemento  $T$  a (2.14) con el salto en la dirección tangencial definido como en (2.22).

Comenzando con una triangulación  $\mathcal{T}_0$ ,  $\mathcal{T}_{j+1}$  se obtiene de  $\mathcal{T}_j$  por refinamiento de los elementos  $T \in \mathcal{T}_j$  tales que

$$\eta_T \geq 0.7 \eta_{\max}$$

donde  $\eta_{\max} = \max_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_T$ . Estos elementos son divididos en cuatro elementos iguales y el refinamiento se propaga usando el método descrito en [39], el cual garantiza que para todo  $j$  el ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  no es menor que la mitad del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_0$ .

Como primer ejemplo consideramos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \Omega \\ u = g, & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.29)$$

donde  $\Omega$  es el dominio de la figura 1 y  $g$  es la función suave tal que la solución de 2.29 en coordenadas polares es

$$u(r, \theta) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$$

La tabla 1 muestra los resultados obtenidos en este ejemplo en pasos del procedimiento adaptivo, denotando por  $N$  al número de nodos.

Tabla 1

$j$	$N$	$\eta$
0	115	0.3312
1	134	0.2862
2	174	0.2405
3	229	0.2089
4	339	0.1757
5	495	0.1537

Los resultados en la tabla muestran en particular que el proceso de refinamiento automático permite obtener el orden óptimo de convergencia con respecto al número de nodos para este caso con solución singular, es decir, el mismo orden que en el caso regular. En efecto, de la sección 3 sabemos que, si las mallas se construyen adecuadamente,

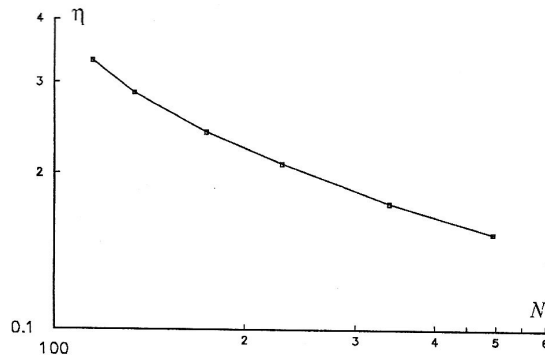
$$\|\nabla_j e\|_0 = O(N^{-1/2}) \tag{2.30}$$

Se observa computacionalmente que nuestro procedimiento adaptivo genera mallas para las cuales (2.30) también se verifica en la práctica. Las figuras (1.a), (1.b), (1.c) muestran las mallas  $\mathcal{T}_0$ ,  $\mathcal{T}_2$ ,  $\mathcal{T}_4$ , respectivamente



Los resultados en la tabla muestran en particular que el proceso de refinamiento automático permite obtener el orden óptimo de convergencia con respecto al número de nodos para este caso con solución singular, es decir, el mismo orden que en el caso regular. En efecto, de la sección 3 sabemos que, si las mallas se construyen adecuadamente,

$$\|\nabla_j e\|_0 = O(N^{-1/2}) \quad (2.30)$$



Se observa computacionalmente que nuestro procedimiento adaptivo genera mallas para las cuales (2.30) también se verifica en la práctica. Las figuras (1.a), (1.b), (1.c) muestran las mallas  $\mathcal{T}_0$ ,  $\mathcal{T}_2$ ,  $\mathcal{T}_4$ , respectivamente

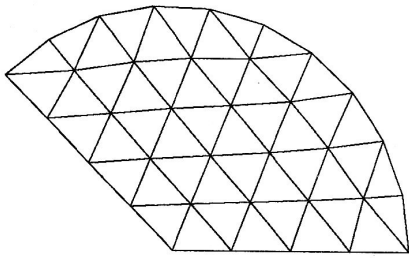


Figura (1.a)

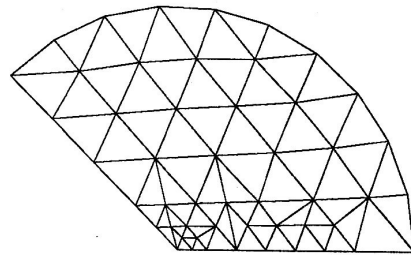


Figura (1.b)

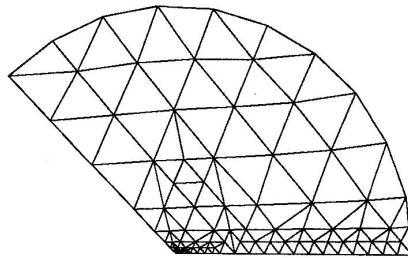


Figura (1.c)

En los siguientes ejemplos consideramos nuevamente la ecuación de Laplace pero con condiciones de borde mixtas. Para  $k = 4, 6, 8$  resolvemos

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \Gamma_1 \\ u = \sin\left(\frac{2\theta}{k}\right), & \text{en } \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{en } \Gamma_3 \end{cases}$$

donde  $\Omega = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{k\pi}{4}\}$ ,

$\Gamma_1 = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, \theta = 0\}$ ,

$\Gamma_2 = \{(r, \theta) : r = 1, 0 < \theta < \frac{k\pi}{4}\}$  and,

$\Gamma_3 = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, \theta = \frac{k\pi}{4}\}$

La solución de este problema es,

$$u(r, \theta) = r^{2/k} \sin\left(\frac{2\theta}{k}\right)$$

La tabla 2 muestra el número de nodos en las mallas generadas para estos tres ejemplos. Estas redes se muestran en las figuras 2, 3 y 4 para  $k = 4, 6$  y 8 respectivamente.

Tabla 2

	$k = 4$	$k = 6$	$k = 8$
j	N	N	N
0	82	134	160
1	105	160	189
2	127	180	239
3	163	218	288
4	227	261	337
5	289	295	386



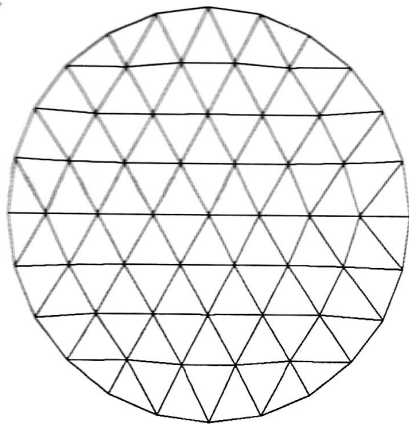


Figura (4.a)

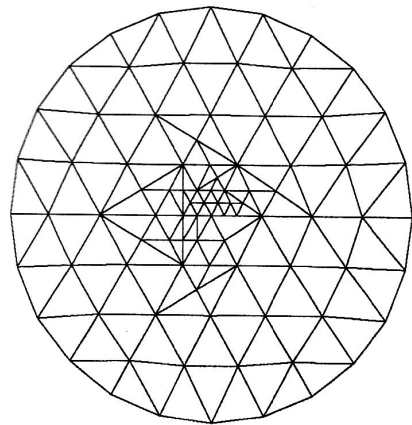


Figura (4.b)

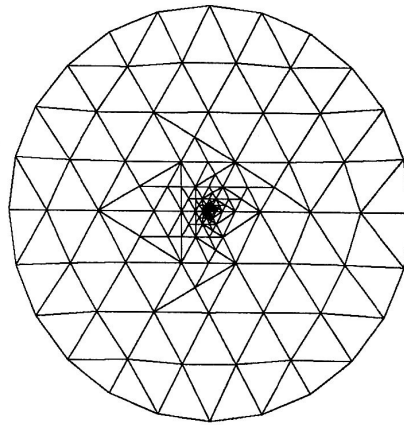


Figura (4.c)

## Capítulo 3

# Estimaciones del error para problemas elípticos no lineales de tipo monótono

*En este capítulo se estudian estimaciones a priori del error para aproximaciones de elementos finitos no conformes de problemas elípticos de tipo monótono. Luego se introducen estimadores a posteriori del error y se estudian las acotaciones por arriba y por abajo del error*

### 3.1 Introducción

La ecuación de Euler de la integral variacional

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

con  $1 < p < \infty$ , es la denominada *ecuación p-armónica* o *p-Laplaciano*

$$-\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Esta ecuación tiene aplicaciones prácticas en problemas de diseño aerodinámico [17] y en el estudio de algunos modelos glaciológicos [38]. También, para algunos fluidos No-Newtonianos [3], el operador de Laplace, en las ecuaciones de Navier-Stokes, se reemplaza por el operador p-armónico (o p-Laplaciano). Además, para  $p = n$ , tiene aplicaciones en la teoría de funciones quasi-conformes [15].

En [29] se estudia en detalle la aplicación del método de elementos finitos conformes al problema de Dirichlet para el p-Laplaciano. En [17] se extienden estos resultados para el caso en que el coeficiente principal pertenece a una familia más general de funciones, de la forma  $k(x, |\nabla u(x)|)$ . Esta clase de ecuaciones se llaman *de tipo monótono*. Por último, en [12] se estudia un estimador a posteriori del error para aproximaciones de elementos finitos conformes.

En este capítulo, analizaremos la convergencia y estudiaremos estimadores a posteriori del error para aproximaciones de elementos finitos no conformes de ecuaciones elípticas de tipo monótono.

## 3.2 Problema modelo y su aproximación por elementos finitos

### 3.2.1 Formulaciones variacionales

Sea  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  un polígono simplemente conexo. Consideramos el problema modelo :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x, |\nabla u|)\nabla u) = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

donde el coeficiente  $k(\cdot, \cdot)$  es una función continua no negativa definida en  $\Omega \times \mathfrak{R}^+$  y supondremos que, para casi todo  $x \in \Omega$ , la función  $\varphi(t) = k(x, t)t$  es estrictamente creciente en  $\mathfrak{R}^+$  que verifica

- $\varphi(t) \leq \alpha_1 t^{p-1} + \alpha_2$  para todo  $t \in \mathfrak{R}^+$ , donde  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$  son constantes independientes de  $t$ .
- Para  $p \in (1, 2]$ ,  $\varphi(t)$  es Hölder-continua con exponente  $p-1$ , es decir, existe una constante  $Q > 0$  tal que

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq Q |t - s|^{p-1} \quad \forall t, s \in \mathfrak{R}^+$$

Si  $p > 2$  supondremos que  $\varphi$  satisface la desigualdad

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq Q |t - s| (K_1 + K_2(t+s)^{p-2}) \quad \forall t, s \in \mathfrak{R}^+$$

con constantes  $K_1 \geq 0$ ,  $K_2 > 0$  y  $Q > 0$ , todas independientes de  $t$  y  $s$ .

- La función  $\varphi$  es monótona creciente y satisface una de las siguientes condiciones
  - Si  $1 < p \leq 2$ , entonces

$$C_1(t-s) \leq (\varphi(t) - \varphi(s))(K_1 + K_2(t+s)^{2-p}) \quad \forall t \geq s \geq 0$$

donde  $K_1 \geq 0$ ,  $K_2 > 0$ , y  $C_1 > 0$  son constantes conocidas que no dependen de  $t$  y  $s$ .

- Si  $p > 2$

$$\varphi(t) - C_1 t^{p-1} \text{ es una función creciente de } t \in \mathfrak{R}^+$$

**Observación:** En el caso particular en que  $k(x, t) = a(x)t^{p-2}$  con  $a \in W^{1,\infty}$  y  $a(x) \geq a_0 > 0$ ; la función  $\varphi(t) = k(x, t)t$  verifica todas las condiciones precedentes con  $\alpha_1 = Q = \|a\|_{0,\infty}$ ,  $\alpha_2 = K_1 = 0$ ,  $K_2 = 1$  y  $C_1 = a_0(p-1)$  si  $1 < p \leq 2$  y  $C_1 = a_0$  si  $p \geq 2$ .

Representaremos a la función  $k(x, \cdot)$  por  $k(\cdot)$ . Además, usaremos las notaciones introducidas en los capítulos anteriores.

Entonces, la aproximación por elementos finitos no-conformes de la solución del problema (3.1) se define por  $u_j \in V^j$  y,

$$\begin{cases} \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T k(\nabla u_j) \nabla u_j \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, & \forall v \in V_0^j \\ u_j(M_\ell) = g(M_\ell), & \forall \ell \subset \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

Es fácil ver que (3.1) es la ecuación de Euler de

$$J(v) = \int_{\Omega} \int_0^{|\nabla v|} \varphi(t) dt dx - \int_{\Omega} f v dx \quad (3.3)$$

y que (3.2) es la de

$$J_j(v) = \int_{\Omega} \int_0^{|\nabla_j v|} \varphi(t) dt dx - \int_{\Omega} f v dx \quad (3.4)$$

y las soluciones  $u$  y  $u_j$  verifican

$$J_j(u) = \min\{J(v) \mid v \in W_0^{1,p}\} \quad J_j(u_j) = \min\{J_j(v) \mid v \in V_0^j\}$$

Notaremos por  $a_j$  a la función definida sobre  $(W_0^{1,p} + V_0^j) \times (W_0^{1,p} + V_0^j)$  por

$$a_j(w, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T k(|\nabla w|) \nabla w \cdot \nabla v$$

Observemos que la solución débil  $u$  de (3.1) verifica que

$$a_j(u, v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in W_0^{1,p} \quad (3.5)$$

y la de (3.2)

$$a_j(u_j, v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V_0^j \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Continuidad, monotonía y estabilidad

En primer lugar, enunciaremos unas desigualdades intermedias para vectores cuyas demostraciones pueden verse en [17]

**Lema 3.1** Si  $1 < p \leq 2$  y  $n \geq 1$ , para cualquier  $y, z \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha \frac{|z - y|^2}{K_1 + K_2(|z| + |y|)^{2-p}} \leq \langle k(|z|)z - k(|y|)y, z - y \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$|k(|z|)z - k(|y|)y| \leq \gamma |z - y|^{p-1}$$

donde  $K_1 \geq 0$ ,  $K_2 > 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $\gamma > 0$  son constantes independientes de  $y$  y  $z$ .

**Lema 3.2** Si  $2 \leq p < \infty$  y  $n \geq 1$ , para cualquier  $y, z \in \mathfrak{R}^n$

$$\alpha |z - y|^p \leq \langle k(|z|)z - k(|y|)y, z - y \rangle_{\mathfrak{R}^n}$$

$$|k(|z|)z - k(|y|)y| \leq \gamma |z - y| (K_1 + K_2(|z| + |y|)^{p-2})$$

donde  $K_1 \geq 0$ ,  $K_2 > 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $\gamma > 0$  son constantes independientes de  $y$  y  $z$ .

De estos lemas se obtiene, facilmente, la continuidad y la monotonía de  $a_j$

**Teorema 3.1** Existen constantes positivas  $\alpha$  y  $\gamma$  tales que, para todo  $u, v, w \in W_0^{1,p} + V_0^j$  se verifica

- Si  $1 < p \leq 2$

$$\alpha \frac{\|\nabla_j u - \nabla_j v\|_{0,p}^2}{\check{K}_1 + \check{K}_2(\|\nabla_j u\|_{0,p} + \|\nabla_j v\|_{0,p})^{2-p}} \leq a_j(u, u - v) - a_j(v, u - v)$$

y

$$\frac{|a_j(u, w) - a_j(v, w)|}{\|\nabla_j w\|_{0,p}} \leq \gamma \|\nabla_j u - \nabla_j v\|_{0,p}^{p-1}$$

- Si  $2 \leq p < \infty$

$$\alpha \|\nabla_j u - \nabla_j v\|_{0,p}^p \leq a_j(u, u - v) - a_j(v, u - v)$$

y

$$\frac{|a_j(u, w) - a_j(v, w)|}{\|\nabla_j w\|_{0,p}} \leq \gamma \|\nabla_j u - \nabla_j v\|_{0,p} (\check{K}_1 + \check{K}_2(\|\nabla_j u\|_{0,p} + \|\nabla_j v\|_{0,p})^{p-2})$$

donde  $\check{K}_1 \geq 0$  y  $\check{K}_2 > 0$  son constantes independientes de  $y$  y  $z$ .

Como consecuencia del teorema previo tenemos que  $J$  y  $J_j$  son estrictamente convexos y continuos. Luego, los problemas (3.1) y (3.2) tienen una única solución [40].

**Observación:** La misma demostración del teorema anterior prueba que para  $\mathbf{w} \in L^p \times L^p$  se verifica

$$\frac{\int [k(|\nabla_j u|)\nabla_j u - k(|\nabla_j v|)\nabla_j v] \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_{0,p}} \leq \gamma \|\nabla_j u - \nabla_j v\|_{0,p}^{p-1}$$

si  $1 < p \leq 2$ , y

$$\frac{\int [k(|\nabla_j u|)\nabla_j u - k(|\nabla_j v|)\nabla_j v] \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_{0,p}} \leq \gamma \|\nabla_j u - \nabla_j v\|_{0,p} (\check{K}_1 + \check{K}_2(\|\nabla_j u\|_{0,p} + \|\nabla_j v\|_{0,p})^{p-2})$$

si  $2 \leq p < \infty$



**Observación:** Poniendo  $u = v$  en (3.5), utilizando el teorema anterior y la desigualdad de Poincaré, se obtiene que para  $2 \leq p < \infty$  que

$$\alpha |u|_{1,p}^p \leq a_j(u, u) \leq \|f\|_{0,p'} \|u\|_{0,p} \leq C \|f\|_{0,p'} |u|_{1,p}$$

y en consecuencia

$$|u|_{1,p} \leq \left( \frac{C \|f\|_{0,p'}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Si  $1 < p \leq 2$  tenemos que

$$\alpha |u|_{1,p} \leq (\check{K}_1 + \check{K}_2 |u|_{1,p}^{2-p}) a_j(u, u) \leq C (\check{K}_1 + \check{K}_2 |u|_{1,p}^{2-p}) \|f\|_{0,p'} |u|_{1,p}$$

y en consecuencia

$$|u|_{1,p} \leq \min \left\{ 1, \left( \frac{C \|f\|_{0,p'} (\check{K}_1 + \check{K}_2)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right\}$$

De la misma manera se puede acotar  $\|\nabla_j u_j\|_{0,p}$  ya que la desigualdad de Poincaré también se verifica para elementos no conformes [2] [46].

Ahora veamos la estabilidad. Sean  $u_1, u_2$  las soluciones débiles correspondientes a los datos  $f_1, f_2$  respectivamente. Entonces tenemos que

$$\alpha |u_1 - u_2|_{1,p} \leq \|f_1 - f_2\|_{0,p'} (K_1 + K_2 (|u_1|_{1,p} + |u_2|_{1,p})^{2-p}) \quad \text{si } 1 < p \leq 2$$

$$\alpha |u_1 - u_2|_{1,p}^{p-1} \leq \|f_1 - f_2\|_{0,p'} \quad \text{si } 2 < p \leq \infty$$

resultando  $|u_1 - u_2|_{1,p} \leq C \|f_1 - f_2\|_{0,p'}$  donde  $C$  puede depender de  $\alpha, f_1$  y  $f_2$ .

El mismo argumento se puede aplicar al problema discretizado. Luego, los problemas (3.5) y (3.6) están bien planteados.

### 3.3 Estimaciones a priori del error

Supondremos en esta sección que  $k(x, t) = t^{p-2}$ . Luego debemos tomar  $K_1 = 0$  y  $K_2 = 1$ .

#### 3.3.1 Resultados preliminares

Se puede ver en [42] la demostración del siguiente lema

**Lema 3.3** Sean  $f \in L^{p'}$  y  $u$  la solución de

$$- \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n$$

entonces, se verifica

- $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p \leq 2$

- $u \in W^{2,p}(\mathfrak{R}^n)$  si  $2 \leq p < \infty$  y  $f \in W^{1,p'}(\Omega)$

En la observación anterior al lema 2.8 recordamos una desigualdad básica para el análisis de la estimación a priori del problema lineal con solución regular. A continuación enunciamos una desigualdad fundamental para las acotaciones de los términos de consistencia, la cual extiende la desigualdad anterior. En el lema 2.8 ya hemos hecho una extensión de dicho resultado y por ser análoga a aquella, la demostración será omitida.

**Lema 3.4** *Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_j\}$  es regular entonces existe una constante  $C$  tal que*

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} w \phi \cdot \mathbf{n}_T \right| \leq Ch \|\nabla_j w\|_{0,p} \|\phi\|_{1,p'} \quad \forall \phi \in (W^{1,p'}(\Omega))^2, \forall w \in V_0^j$$

### 3.3.2 Caso $1 < p \leq 2$

**Teorema 3.2** *Si la solución exacta de (3.1) u cumple que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ , la familia de triangulaciones es regular y  $1 < p \leq 2$ , se verifica que*

$$\|\nabla_j u_j - \nabla u\|_{0,p} \leq C h^{p-1}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\|u\|_{2,p}$ ,  $f$  y del ángulo mínimo de la triangulación.

**Demostración:** Sea  $v \in V_0^j$ . Se verifica

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\|\nabla_j u_j - \nabla_j v\|_{0,p}^2}{(\|\nabla_j u_j\|_{0,p} + \|\nabla_j v\|_{0,p})^{2-p}} &\leq a_j(u_j, u_j - v) - a_j(v, u_j - v) \\ &\leq a_j(u, u_j - v) - a_j(v, u_j - v) + a_j(u_j, u_j - v) - a_j(u, u_j - v) \\ &\leq \gamma \|\nabla u - \nabla_j v\|_{0,p}^{p-1} \|\nabla_j u_j - \nabla_j v\|_{0,p} + a_j(u_j, u_j - v) - a_j(u, u_j - v) \end{aligned}$$

y dividiendo por  $\|\nabla_j u_j - \nabla_j v\|_{0,p}$  resulta

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\|\nabla_j u_j - \nabla_j v\|_{0,p}}{(\|\nabla_j u_j\|_{0,p} + \|\nabla_j v\|_{0,p})^{2-p}} &\leq a_j(u_j, u_j - v) - a_j(v, u_j - v) \\ &\leq \gamma \|\nabla u - \nabla_j v\|_{0,p}^{p-1} + \sup_{w \in V_0^j} \frac{a_j(u_j, w) - a_j(u, w)}{\|\nabla_j w\|_{0,p}} \end{aligned}$$

Utilizando la integración por partes y el lema 3.4, se obtiene

$$a_j(u_j, w) - a_j(u, w) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} w \leq \|\nabla u\|_{1,p'}^{p-2} \|\nabla u\|_{1,p'} \|\nabla_j w\|_{0,p} = \|u\|_{2,p}^{p-1} \|\nabla_j w\|_{0,p}$$

Ahora, combinando estas desigualdades y eligiendo  $v = I^{nc}u$  obtenemos

$$\|\nabla_j u_j - \nabla_j v\|_{0,p} \leq Ch^{p-1}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\|u\|_{2,p}$ ,  $f$  y del ángulo mínimo de la triangulación. Por la desigualdad triangular, se tiene que

$$\|\nabla u - \nabla_j u_j\|_{0,p} \leq Ch^{p-1}$$

lo cual concluye la demostración.

**Observación:** Esta estimación da un orden de convergencia menor que para el caso conforme, demostrado en [29] y mejorado en [17]. Sin embargo, para el único caso en que todos los ordenes de convergencia son óptimos es cuando  $p = 2$ .

### 3.3.3 Caso $2 \leq p < \infty$

**Teorema 3.3** *Si la solución exacta de (3.1) cumple que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ , la familia de triangulaciones es regular y  $2 \leq p < \infty$ , se verifica que*

$$\|\nabla_j u_j - \nabla u\|_{0,p} \leq C h^{\frac{1}{p-1}}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\|u\|_{2,p}$ ,  $f$  y del ángulo mínimo de la triangulación.

**Demostración:** Sea  $v \in V_0^j$ . Se verifica

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla_j u_j - \nabla_j v\|_{0,p}^p &\leq a_j(u_j, u_j - v) - a_j(v, u_j - v) \\ &\leq a_j(u, u_j - v) - a_j(v, u_j - v) + a_j(u_j, u_j - v) - a_j(u, u_j - v) \\ &\leq \gamma \|\nabla_j u - \nabla_j v\|_{0,p} (\|\nabla u\|_{0,p} + \|\nabla_j v\|_{0,p})^{p-2} \|\nabla_j u_j - \nabla_j v\|_{0,p} \\ &\quad + a_j(u_j, u_j - v) - a_j(u, u_j - v) \end{aligned}$$

y tomando como  $v = I^{nc}u$  tenemos

$$\begin{aligned} \|\nabla_j u_j - \nabla u\|_{0,p}^{p-1} &\leq 2^{p-2} (\|\nabla_j u_j - \nabla_j I^{nc}u\|_{0,p}^{p-1} + \|\nabla u - \nabla_j I^{nc}u\|_{0,p}^{p-1}) \\ &\leq C (\|\nabla u - \nabla_j I^{nc}u\|_{0,p} + \sup_{w \in V_0^j} \frac{a_j(u_j, w) - a_j(u, w)}{\|\nabla_j w\|_{0,p}}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $C$  depende de  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $f$  y del ángulo mínimo de la triangulación.

Con las mismas cuentas que para el caso  $1 < p \leq 2$  se tiene que

$$\sup_{w \in V_0^j} \frac{a_j(u_j, w) - a_j(u, w)}{\|\nabla_j w\|_{0,p}} \leq C \|u\|_{1,p}^{p-1}$$

y combinando con (3.7) se tiene

$$\|\nabla_j u_j - \nabla u\|_{0,p}^{p-1} \leq Ch$$

donde  $C$  depende de  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\|u\|_{2,p}$ ,  $f$  y del ángulo mínimo de la triangulación.

**Observación:** En el caso conforme, el término de consistencia es nulo y eligiendo la función  $v$  como una interpolada conforme resulta que

$$\|\nabla_j u_j - \nabla u\|_{0,p} \leq Ch^{\frac{1}{p-1}}$$

si la triangulación es regular y el espacio aproximante está formado por funciones que en cada triángulo son polinomios de grado 1. Este resultado fue obtenido en [29].

### 3.4 Estimaciones a posteriori del error

#### 3.4.1 Preliminares

Utilizaremos que  $k(|\nabla_j u_j|)\nabla_j u_j \in L^{p'}(\Omega)$ .

Consideraremos la solución  $\varphi \in W_0^{1,p}$  del siguiente problema auxiliar

$$\int_{\Omega} k(|\nabla\varphi|)\nabla\varphi\nabla w = \int_{\Omega} k(|\nabla_j u_j|)\nabla_j u_j\nabla w \quad \forall w \in W_0^{1,p}$$

y sea  $\psi \in W^{1,p'}$  tal que

$$\mathbf{curl} \psi = k(|\nabla_j u_j|)\nabla_j u_j - k(|\nabla\varphi|)\nabla\varphi$$

Tal  $\psi$  existe para todo dominio de  $\mathbb{R}^2$ , pues  $\operatorname{div}(k(|\nabla\varphi|)\nabla\varphi - k(|\nabla_j u_j|)\nabla_j u_j) = 0$  [27]. Además, se cumple la siguiente estimación:

**Lema 3.5** *Se verifica la siguiente desigualdad*

$$|\psi|_{1,p'} \leq \begin{cases} C \|\nabla_j u_j - \nabla\varphi\|_{0,p}^{p-1} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ C \|\nabla_j u_j - \nabla\varphi\|_{0,p} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \gamma, f, K_1$  y  $K_2$

**Demostración:** Si  $\mathbf{w} \in L^p \times L^p$  se tiene

$$\begin{aligned} \int \mathbf{curl} \psi \cdot \mathbf{w} &= \int [k(|\nabla_j u_j|)\nabla_j u_j - k(|\nabla\varphi|)\nabla\varphi] \cdot \mathbf{w} \\ &\leq \begin{cases} \gamma \|\nabla_j u_j - \nabla\varphi\|_{0,p}^{p-1} \|\mathbf{w}\|_{0,p} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ \gamma \|\nabla_j u_j - \nabla\varphi\|_{0,p} (K_1 + K_2(\|\nabla_j u_j\|_{0,p} + \|\nabla\varphi\|_{0,p})^{p-2}) \|\mathbf{w}\|_{0,p} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $2 \leq p < \infty$  se tiene que

$$\alpha |\varphi|_{1,p}^p \leq \int k(|\nabla\varphi|)\nabla\varphi\nabla\varphi = \int k(|\nabla_j u_j|)\nabla_j u_j\nabla\varphi \leq \gamma (K_1 + K_2\|\nabla_j u_j\|_{0,p}^{p-2}) |\varphi|_{1,p}$$

y como  $\|\nabla_j u_j\|_{0,p}$  está acotada por una constante que depende de  $\alpha$  y de  $f$ , resulta que

$$\int \mathbf{curl} \psi \cdot \mathbf{w} \leq C \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p} \|\mathbf{w}\|_{0,p}$$

entonces se verifica que

$$|\psi|_{1,p'} = \sup_{\mathbf{w} \in (L^p(\Omega))^2} \frac{\int \mathbf{curl} \psi \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_{0,p}} \leq \begin{cases} C \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^{p-1} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ C \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

con lo cual se tiene el lema.

Para un dado  $\ell$  definimos  $J_{\ell,n}$  y  $J_{\ell,t}$  por

$$J_{\ell,n} = \begin{cases} \left[ \left[ k(|\nabla u_j|) \nabla u_j \cdot \mathbf{n} \right] \right]_{\ell} & , & \text{si } \ell \in E_I \\ 0 & , & \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$J_{\ell,t} = \begin{cases} \left[ \left[ \frac{\partial u_j}{\partial t} \right] \right]_{\ell} & , & \text{si } \ell \in E_I \\ 2 \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{\ell} & , & \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

### 3.4.2 Estimador a posteriori del error que acota por arriba a $\|\nabla_j e\|_{0,p}$

**Caso**  $1 < p \leq 2$

Definimos los siguientes indicadores del error para cada  $T \in \mathcal{T}_j$

$$\eta_{1,T} = h_T \|f\|_{0,p',T}$$

$$\eta_{2,T} = \left( \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^2 |J_{\ell,t}|^p \right)^{\frac{1}{p(3-p)}}$$

y

$$\eta_T = \{\eta_{1,T}^{p'} + \eta_{2,T}^{p'}\}^{\frac{1}{p'}}$$

y el estimador a posteriori del error por

$$\eta = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_T^{p'} \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

**Observación:** Cuando  $p = 2$  este estimador coincide con el de la sección 4.2 del capítulo anterior.

**Teorema 3.4** Con las definiciones anteriores se verifica que

$$\|\nabla u - \nabla_j u_j\|_{0,p} \leq C \eta$$

donde  $C$  depende de  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $f$  y del ángulo mínimo de la triangulación.

**Demostración:** Para acotar por arriba a  $\|\nabla u - \nabla_j u_j\|_{0,p}$  buscaremos cotas para  $\|\nabla u - \nabla \varphi\|_{0,p}$  y para  $\|\nabla \varphi - \nabla_j u_j\|_{0,p}$ .

En primer lugar analizamos  $\|\nabla u - \nabla \varphi\|_{0,p}$ . Indicaremos por  $e_\varphi = u - \varphi$  y por  $I^{nc} e_\varphi$  a la interpolada no conforme de  $e_\varphi$  definida en el capítulo 2. Se verifica

$$\begin{aligned} \alpha |u - \varphi|_{1,p}^2 &\leq a_j(u, e_\varphi) - a_j(\varphi, e_\varphi) \\ &= a_j(u, e_\varphi) - a_j(u_j, e_\varphi - I^{nc} e_\varphi) - \int_\Omega f I^{nc} e_\varphi \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T f (e_\varphi - I^{nc} e_\varphi) + \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell \llbracket k(|\nabla_j u_j|) \frac{\partial u_j}{\partial n} \rrbracket (e_\varphi - I^{nc} e_\varphi) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T f (e_\varphi - I^{nc} e_\varphi) \end{aligned}$$

pues  $\llbracket k(|\nabla_j u_j|) \frac{\partial u_j}{\partial n} \rrbracket$  es constante en  $\ell$  y  $\int_\ell I^{nc} e_\varphi = \int_\ell e_\varphi$ . Utilizando la desigualdad de Hölder y los resultados de interpolación presentados en los capítulos previos tenemos

$$|u - \varphi|_{1,p}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left( \|f\|_{0,p',T} h_T \right) |e_\varphi|_{1,p,\tilde{T}} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} h_T^{p'} \|f\|_{0,p',T}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} |u - \varphi|_{1,p}$$

donde  $\tilde{T}$  es la unión de todos los triángulos que comparten un vértice con  $T$ . Entonces

$$|u - \varphi|_{1,p} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{1,T}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (3.8)$$

Ahora estimemos  $\|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}$ . Se verifica

$$\alpha \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^2 \leq a_j(u_j, u_j - \varphi) - a_j(\varphi, u_j - \varphi)$$

y como  $a_j(\varphi, \varphi) = a_j(u_j, \varphi)$  resulta

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^2 &\leq a_j(u_j, u_j) - a_j(\varphi, u_j) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T [|\nabla_j u_j|^{p-2} \nabla_j u_j - |\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi] \nabla_j u_j \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mathbf{curl} \psi \nabla_j u_j \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mathbf{curl} (\psi - \psi^I) \nabla_j u_j \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} \frac{\partial u_j}{\partial t} (\psi - \psi^I) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell \llbracket \frac{\partial u_j}{\partial t} \rrbracket (\psi - \psi^I) \end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad de Hölder y los resultados de interpolación tenemos

$$\|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell} h_T^{\frac{1}{p}} |\psi|_{1,p',\tilde{T}}$$

$$\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell}^p \right)^{\frac{1}{p}} |\psi|_{1,p'} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell}^p \right)^{\frac{1}{p}} \|\nabla_j u_j - \nabla_j \varphi\|_{0,p}^{p-1}$$

y, entonces

$$\|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{2,T}^{p(3-p)} \right)^{\frac{1}{p(3-p)}} \quad (3.9)$$

Combinando (3.8) y (3.9) resulta

$$\|\nabla u - \nabla_j u_j\|_{0,p} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{1,t}^{p'} + \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{2,T}^{p(3-p)} \right)^{\frac{1}{(p-1)(3-p)}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

y usando que

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right|^q \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^q \quad \forall q \in (0, 1] \quad (3.10)$$

se obtiene el teorema.

**Caso 2**  $2 \leq p < \infty$

Definimos los siguientes indicadores del error para cada  $T \in \mathcal{T}_j$

$$\begin{aligned} \eta_{1,T} &= h_T \|f\|_{0,p',T} \\ \eta_{2,T} &= \left( \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^2 |J_{\ell,t}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \eta_T &= \{\eta_{1,T}^{p'} + \eta_{2,T}^{p'}\}^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

y el estimador a posteriori del error por

$$\eta = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_T^{p'} \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

**Teorema 3.5** *Con las definiciones anteriores se verifica que*

$$\|\nabla u - \nabla_j u_j\|_{0,p} \leq C \eta$$

donde  $C$  depende de  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $f$  y del ángulo mínimo de la triangulación.

**Demostración:** En este caso, acotaremos por arriba a  $\|\nabla u - \nabla_j u_j\|_{0,p}^p$ . Para ello, buscaremos cotas para  $\|\nabla u - \nabla \varphi\|_{0,p}^p$  y para  $\|\nabla \varphi - \nabla_j u_j\|_{0,p}^p$ .

En primer lugar estimaremos  $\|\nabla u - \nabla \varphi\|_{0,p}^p$ . Igual que en el teorema anterior, indicaremos por  $e_\varphi = u - \varphi$  y por  $I^{nc}e_\varphi$  a la interpolada no conforme de  $e_\varphi$ . Se verifica

$$\begin{aligned} \alpha |u - \varphi|_{1,p}^p &\leq a_j(u, e_\varphi) - a_j(\varphi, e_\varphi) \\ &= \int_\Omega f(e_\varphi - I^{nc}e_\varphi) - a_j(\varphi, e_\varphi - I^{nc}e_\varphi) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T f(e_\varphi - e_\varphi^I) \\ &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left( \|f\|_{0,p',T} h_T \right) |e_\varphi|_{1,p,\tilde{T}} \\ &\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} h_T^{p'} \|f\|_{0,p',T}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} |u - \varphi|_{1,p} \end{aligned}$$

y, entonces

$$|u - \varphi|_{1,p}^p \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{1,T}^{p'} \quad (3.11)$$

Ahora estimemos  $\|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^p$ . Se verifica

$$\alpha \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^p \leq a_j(u_j, u_j - \varphi) - a_j(\varphi, u_j - \varphi)$$

y como  $a_j(\varphi, \varphi) = a_j(u_j, \varphi)$  resulta

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^p &\leq a_j(u_j, u_j) - a_j(\varphi, u_j) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T [|\nabla_j u_j|^{p-2} \nabla_j u_j - |\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi] \nabla_j u_j \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mathbf{curl} \psi \nabla_j u_j \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mathbf{curl} (\psi - \psi^I) \nabla_j u_j \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} \frac{\partial u_j}{\partial t} (\psi - \psi^I) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell \llbracket \frac{\partial u_j}{\partial t} \rrbracket (\psi - \psi^I) \end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad de Hölder y los resultados de interpolación tenemos

$$\begin{aligned} \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^p &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell} h_T^{\frac{1}{p}} |\psi|_{1,p',T} \\ &\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell}^p \right)^{\frac{1}{p}} |\psi|_{1,p'} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell}^p \right)^{\frac{1}{p}} \|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p} \end{aligned}$$

y, entonces

$$\|\nabla_j u_j - \nabla \varphi\|_{0,p}^p \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{2,T}^p \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell}^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (3.12)$$



Combinando (3.11) y (3.12) resulta

$$\|\nabla u - \nabla_j u_j\|_{1,p}^p \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{1,T}^{p'} + \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{2,T}^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \right)$$

y usando (3.10) se obtiene el teorema.

### 3.4.3 Estimador a posteriori del error que acota por abajo a $\|\nabla_j \ell\|_{0,p}$

**Caso  $1 < p \leq 2$**

Sea  $T \in \mathcal{T}_j$  y sea  $\varphi \in W^{1,p'}$  una función que verifica

$$\int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi = |\ell|^{\frac{2}{(p-1)(3-p)}} |J_{\ell,t}|^{\frac{p}{(p-1)(3-p)}} \quad \forall \ell \in E_T \quad (3.13)$$

y

$$|\varphi|_{1,p'} \leq C \eta_{2,T}^{p'+p-3}$$

Veamos que una función  $\varphi$  con esas propiedades siempre existe. Notaremos con  $\varphi_{\ell}$  a la función cuadrática a trozos que vale 1 en la mitad del lado  $\ell$  y se anula en la mitad de cualquier otro lado y en los vértices. Tomamos como  $\varphi$  a

$$\varphi = \sum_{\ell \in E_T} \beta_{\ell} \varphi_{\ell}$$

con  $\beta_{\ell}$  a determinar. Notaremos por  $T^* = \bigcup \{K \in \mathcal{T}_j : \overline{K} \cap \overline{T} \text{ es un lado} \}$  y observamos que el soporte de  $\varphi$  está contenido en  $T^*$ . De (3.13) calculamos  $\beta_{\ell}$  obteniendo

$$|\beta_{\ell}| |J_{\ell,t}| |\ell| \leq C \left| \int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi \right|$$

luego tenemos

$$|\beta_{\ell}| \leq C |\ell|^{\frac{2}{(p-1)(3-p)}-1} |J_{\ell,t}|^{\frac{p}{(p-1)(3-p)}-1}$$

y entonces, por la desigualdad inversa

$$\begin{aligned} |\varphi|_{1,p'} &\leq C h_T^{\frac{2}{p}-1} \|\varphi\|_{0,\infty} \\ &\leq C \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{\frac{2}{(p-1)(3-p)}-1 + \frac{2}{p'}-1} |J_{\ell,t}|^{\frac{p}{(p-1)(3-p)}-1} \\ &\leq C \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{\left(\frac{2}{(p-1)(3-p)}\right)\left(1-\frac{3-p}{p'}\right)} |J_{\ell,t}|^{\left(\frac{p}{(p-1)(3-p)}\right)\left(1-\frac{3-p}{p'}\right)} \\ &\leq C \eta_{2,T}^{p'(1-\frac{3-p}{p'})} \\ &= C \eta_{2,T}^{p'+p-3} \end{aligned}$$

Ahora podemos estimar

$$\begin{aligned}
\eta_{2,T}^{p'} &= \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{\frac{2}{(p-1)(3-p)}} |J_{\ell,t}|^{\frac{p}{(p-1)(3-p)}} \\
&= \sum_{\ell \in E_T} \int J_{\ell,t} \varphi \\
&= \int_{T^*} \nabla_j e \mathbf{curl} \varphi \\
&\leq \|\nabla_j e\|_{0,p,T^*} |\varphi|_{1,p'} \\
&\leq C \|\nabla_j e\|_{0,p,T^*} \eta_{2,T}^{p'+p-3}
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido el siguiente resultado

**Teorema 3.6** *Existe una constante positiva  $C$  que depende solo del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  tal que*

$$\eta_{2,T}^{3-p} \leq C \|\nabla_j e\|_{0,p,T^*}$$

**Caso  $2 \leq p < \infty$**

Sea  $T \in \mathcal{T}_j$  y sea  $\varphi \in W^{1,p'}$  una función que verifica

$$\int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi = |\ell|^{\frac{1}{p-1}} |J_{\ell,t}|^{\frac{p}{p-1}} \quad \forall \ell \in E_T \quad (3.14)$$

y

$$|\varphi|_{1,p'} \leq C \eta_{2,T}^{p'-1}$$

Veamos que una función  $\varphi$  con esas propiedades, siempre existe. Tomamos como  $\varphi$  a

$$\varphi = \sum_{\ell \in E_T} \beta_{\ell} \varphi_{\ell}$$

con  $\beta_{\ell}$  a determinar. De (3.14) calculamos  $\beta_{\ell}$  obteniendo

$$|\beta_{\ell}| |J_{\ell,t}| |\ell| \leq C \left| \int_{\ell} J_{\ell,t} \varphi \right|$$

de (3.14) tenemos

$$|\beta_{\ell}| \leq C |\ell|^{\frac{2}{p-1}-1} |J_{\ell,t}|^{\frac{p}{p-1}-1}$$

y entonces, por la desigualdad inversa

$$\begin{aligned}
|\varphi|_{1,p'} &\leq C h_T^{\frac{2}{p'}-1} \|\varphi\|_{0,\infty} \\
&\leq C \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{\frac{2}{p-1}-1 + \frac{2}{p'}-1} |J_{\ell,t}|^{\frac{p}{p-1}-1} \\
&\leq C \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{\frac{2}{p(p-1)}} |J_{\ell,t}|^{\frac{1}{p-1}} \\
&\leq C \eta_{2,T}^{\frac{p'}{p}} \\
&= C \eta_{2,T}^{p'-1}
\end{aligned}$$

Ahora podemos estimar

$$\begin{aligned}
\eta_{2,T}^{p'} &= \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{\frac{2}{p-1}} |J_{\ell,t}|^{\frac{p}{p-1}} \\
&= \sum_{\ell \in E_T} \int J_{\ell,t} \varphi \\
&= \int_{T^*} \nabla_{je} \mathbf{curl} \varphi \\
&\leq \|\nabla_{je}\|_{0,p,T^*} |\varphi|_{1,p'} \\
&\leq C \|\nabla_{je}\|_{0,p,T^*} \eta_{2,T}^{p'-1}
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido el siguiente resultado

**Teorema 3.7** *Existe una constante positiva  $C$  que depende solo del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  tal que*

$$\eta_{2,T} \leq C \|\nabla_{je}\|_{0,p,T^*}$$



## Capítulo 4

# Estimaciones del error para aproximaciones de fluidos Newtonianos y Quasi-Newtonianos

### 4.1 Introducción

Las ecuaciones que expresan la conservación de la masa y cantidad de movimiento de un fluido incompresible en coordenadas eulerianas son la condición de divergencia nula

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

y la ecuación de equilibrio dinámico

$$\rho \mathbf{a} - \operatorname{div} \sigma = \mathbf{f} \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad,  $\mathbf{a}$  es la aceleración,  $\rho$  la densidad,  $\sigma$  el tensor de tensión de Cauchy (simétrico) y  $\mathbf{f}$  las fuerzas volumétricas. Supondremos que el flujo es estacionario y sin inercia (es decir,  $\mathbf{a} \equiv 0$ ). El sistema queda determinado una vez que se propone una *ecuación constitutiva* para  $\sigma$ .

Se dice que el fluido es *Newtoniano* si

$$\sigma = -p \mathbf{I} + 2\mu D(\mathbf{u}) \quad (4.3)$$

donde  $\mu$ , es una constante llamada *viscosidad del fluido*,  $p$  es la presión y  $D(\mathbf{u})$  es el tensor de velocidad de deformación ( $D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ ).

**Observación:** Para un fluido Newtoniano incompresible se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{div} (2 \mu D(\mathbf{u})) &= \mu \operatorname{div} (\nabla^t \mathbf{u}) + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{u}) \\ &= \mu \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} \\ &= \mu \Delta \mathbf{u}\end{aligned}$$

Le adjuntamos una condición de borde, que elegimos de tipo Dirichlet y homogénea para simplificar la exposición

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (4.4)$$

La sustitución de (4.3) en (4.2), junto con (4.1) y (4.4) nos provee las *ecuaciones de Stokes*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = f & , \quad \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & , \quad \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & , \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.5)$$

El objeto de la primer parte de este capítulo es el de presentar y analizar estimadores a posteriori del error para aproximaciones con elementos no conformes de las ecuaciones de Stokes.

El uso de elementos no conformes para aproximar el problema de Stokes está motivado en el hecho que los elementos estándar de menor orden no satisfacen la condición inf-sup. En cambio, los elementos lineales no conformes de Crouzeix y Raviart [20] y los elementos cuadráticos de Fortin y Soulé [25] satisfacen la condición de estabilidad y entonces proveen órdenes de convergencia óptimos.

En el caso conforme hay varias formas de definir estimadores del error por medio de la ecuación del residuo. En particular, para el problema de Stokes, Verfürth [43] y Bank y Welfert [10], [11] introducen varios estimadores del error y prueban que ellos son equivalentes al error en la norma de la energía.

La dificultad principal en extender las técnicas de los trabajos recién citados a los métodos no conformes es el tratamiento de los términos de consistencia que aparece en la ecuación de error en este caso. Este término depende de la solución exacta y no puede despreciarse.

En este capítulo veremos que, con modificaciones apropiadas, las técnicas del capítulo 2 pueden extenderse para tratar este problema.

Sin embargo, numerosos flujos de fluidos no verifican la ley de Newton (4.3) pero si una relación más compleja en que la viscosidad varía en función del segundo invariante de  $D(\mathbf{u})$ , es decir de

$$\|D(\mathbf{u})\|^2 \equiv \sum_{i,j} (D_{ij}(\mathbf{u}))^2$$

$$\sigma = -p \mathbf{I} + 2 \mu (\|D(\mathbf{u})\|) D(\mathbf{u}) \quad (4.6)$$

Los flujos de fluidos que verifican (4.6) para una función  $\mu$  a precisar serán llamados *quasi-Newtonianos*.

La sustitución de (4.6) en (4.2), (4.1) y (4.4) nos dan las ecuaciones del flujo de un fluido quasi-Newtoniano

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (2\mu(\|D(\mathbf{u})\|) D(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} & , \quad \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & , \quad \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & , \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.7)$$

El objeto de la segunda parte de este capítulo es el de presentar y analizar estimadores a posteriori del error para aproximaciones con elementos no conformes para el flujo de un fluido quasi-Newtoniano.

En el caso conforme Baranger y El Amri [12] definen estimadores del error por medio de la ecuación del residuo y prueban que acotan por arriba al error en una norma adecuada.

En el capítulo 3 hemos introducido y analizado estimadores a posteriori del error para aproximaciones no conformes de problemas elípticos escalares de tipo monótono. En la segunda parte de este capítulo veremos que, con modificaciones apropiadas, esas ideas pueden extenderse al problema de flujos de fluidos quasi-Newtonianos.

## 4.2 Fluidos Newtonianos

### 4.2.1 Introducción

En esta sección se definen y analizan estimadores del error para aproximaciones no conformes de las ecuaciones de Stokes. Probamos que estos estimadores son equivalentes al error en una norma apropiada. Para el caso de elementos lineales a trozos se definen dos estimadores del error. Ambos de ellos son fáciles de implementar computacionalmente pero el segundo es más simple porque puede computarse usando solamente el dato  $f$  y las velocidades aproximadas. Veremos que el primero de estos estimadores puede generalizarse a elementos de mayor orden. Finalmente, presentamos varios ejemplos numéricos en los cuales uno de los estimadores se usa para el refinamiento adaptivo.

En 4.2.2 se introducen algunas notaciones. En 4.2.3 se definen los estimadores del error y se prueba su equivalencia con el error. En 4.2.4 se considera la extensión a los elementos cuadráticos de Fortin y Soulé y finalmente, en 4.2.5 se presentan algunos resultados computacionales en los cuales uno de los estimadores se utiliza para el refinamiento adaptivo.

### 4.2.2 Las ecuaciones de Stokes y su aproximación por elementos finitos

Dado un polígono simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  consideramos las ecuaciones de Stokes (4.5), con  $\mu \equiv 1$ . La formulación débil apropiada para métodos mixtos es entonces,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & , \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.8)$$

donde,  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ,  $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\}$ ,  $\nabla \mathbf{u}$  es la matriz  $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$  y usamos la notación estándar para espacios de Sobolev y para la contracción de dos matrices  $A$  y  $B$ , es decir,

$$A : B = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} B_{ij}$$

Recordemos que si tenemos una familia  $\{\mathcal{T}_j\}$  de triangulaciones de  $\Omega$  tales que cualquier par de triángulos en  $\mathcal{T}_j$  comparten a lo sumo un vértice o un lado; los espacios de elementos finitos no conformes de Crouzeix-Raviart se definen por,

$$\mathbf{V}^j = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : \mathbf{v}|_T \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_j, \mathbf{v} \text{ es continua en los puntos medios de los lados y } 0 \text{ en los puntos medios contenidos en } \partial\Omega \right\}$$

y,

$$Q^j = \left\{ q \in L_0^2(\Omega) : q|_T \in \mathcal{P}_0, \forall T \in \mathcal{T}_j \right\}$$



La solución aproximada  $(\mathbf{u}^j, p^j) \in \mathbf{V}^j \times Q^j$  del problema (4.5) está definida por,

$$\begin{cases} \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \{ \int_T \nabla \mathbf{u}^j : \nabla \mathbf{v} - \int_T p^j \operatorname{div} \mathbf{v} \} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^j \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T q \operatorname{div} \mathbf{u}^j = 0 & , \quad \forall q \in Q^j \end{cases} \quad (4.9)$$

Notemos que la segunda ecuación dice que para todo  $T \in \mathcal{T}_j$ ,  $\operatorname{div} (\mathbf{u}^j|_T) = 0$ .

En el análisis del estimador del error usaremos también el espacio estándar conforme,

$$\mathbf{M}^j = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}|_T \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_j \right\}$$

Ahora introducimos notaciones que necesitaremos. Para una función vectorial  $\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  definimos la matriz  $\mathbf{curl} \boldsymbol{\varphi}$  por,

$$\mathbf{curl} \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

y para una matriz  $A$  la divergencia de  $A$  es el vector,

$$\operatorname{div} A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Observemos que con esta notación tenemos,

$$\int_D \operatorname{div} A \cdot \boldsymbol{\varphi} = - \int_D A : \nabla \boldsymbol{\varphi} + \int_{\partial D} A \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}$$

para cualquier  $A$  y  $\boldsymbol{\varphi}$  con la regularidad apropiada, donde  $\mathbf{n}$  es la normal exterior a  $\partial D$ .

También,

$$\int_{\Omega} \nabla \psi : \mathbf{curl} \boldsymbol{\varphi} = 0$$

para cualquier  $\psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ .

### 4.2.3 Estimaciones a posteriori del error

En esta sección introducimos los estimadores del error y probamos su equivalencia con el error.

Para definir estos estimadores necesitamos introducir algunos saltos asociados con la solución discreta  $(\mathbf{u}^j, p^j) \in \mathbf{V}^j \times Q^j$ .

Definimos,

$$\left[ \left[ (\nabla \mathbf{u}^j - p^j \mathbf{I}) \mathbf{n}_\ell \right] \right]_\ell = \left[ \nabla \left( \mathbf{u}^j|_{T_{out}} \right) - p^j|_{T_{out}} \mathbf{I} \right] \mathbf{n}_\ell - \left[ \nabla \left( \mathbf{u}^j|_{T_{in}} \right) - p^j|_{T_{in}} \mathbf{I} \right] \mathbf{n}_\ell$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad, y,

$$\left[ \left[ \nabla \mathbf{u}^j \mathbf{t}_\ell \right] \right]_\ell = \nabla \left( \mathbf{u}^j|_{T_{out}} \right) \mathbf{t}_\ell - \nabla \left( \mathbf{u}^j|_{T_{in}} \right) \mathbf{t}_\ell$$

Sea  $E_I$  el conjunto de lados interiores  $\mathcal{T}_j$  y para un elemento  $T$ , sea  $E_T$  el conjunto de lados de  $T$ .

Ahora sea,

$$\mathbf{J}_{\ell,n} = \begin{cases} \left[ \left[ (\nabla \mathbf{u}^j - p^j \mathbf{I}) \mathbf{n}_\ell \right] \right]_\ell & , \quad \text{si } \ell \in E_I \\ 0 & , \quad \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$\mathbf{J}_{\ell,t} = \begin{cases} \left[ \left[ \nabla \mathbf{u}^j \mathbf{t}_\ell \right] \right]_\ell & , \quad \text{si } \ell \in E_I \\ 2 \nabla \mathbf{u}^j \mathbf{t}_\ell & , \quad \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

Con estas notaciones introducimos el estimador de error local  $\eta_T$  definido por,

$$\eta_T^2 = |T| \|\mathbf{f}\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^2 \left( |\mathbf{J}_{\ell,n}|^2 + |\mathbf{J}_{\ell,t}|^2 \right)$$

y el global por,

$$\eta = \left( \sum_T \eta_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sean  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^j$  y  $\epsilon = p - p^j$  los errores en velocidad y presión respectivamente.

Para una función vectorial regular a trozos  $\mathbf{v}$  definimos el gradiente discreto como la matriz de  $(L^2)^{2 \times 2}$  definida por,

$$\nabla_j \mathbf{v}|_T = \nabla (\mathbf{v}|_T)$$

También usaremos la siguiente ecuación de error la cual se obtiene restando (4.9) de (4.8) para cualquier  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{V}^j$ ,

$$\int_\Omega \nabla_j \mathbf{e} : \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{V}^j \quad (4.10)$$

Para una función  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tomamos  $\mathbf{v}^I \in \mathbf{M}^j$  como una interpolante adecuada de  $\mathbf{v}$  que satisface

$$\| \mathbf{v} - \mathbf{v}^I \|_{0,T} \leq C |T|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{v}|_{1,\tilde{T}} \quad (4.11)$$

y

$$\| \mathbf{v} - \mathbf{v}^I \|_{0,\ell} \leq C |\ell|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{v}|_{1,\tilde{T}} \quad (4.12)$$

donde  $\tilde{T}$  es la unión de todos los elementos que comparten un vértice con  $T$ . Recordemos que si  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  entonces  $\mathbf{v}^I$  puede tomarse en  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{M}^j$  (ver por ejemplo [41] para la construcción de esta clase de interpolaciones ).

Primero veremos que la norma del error,

$$\| \epsilon \|_0 + \| \nabla_j \mathbf{e} \|_0$$

está dominada por el error. Esto será consecuencia de dos Lemas. El primero de ellos muestra que el error en la presión está dominado por el error en las velocidades más el estimador y el segundo acota el error de la velocidad por una constante por el estimador.

**Lema 4.1** *Es válida la siguiente estimación*

$$\| \epsilon \|_0 \leq C \{ \eta + \| \nabla_j \mathbf{e} \|_0 \}$$

**Demostración :** Como  $\epsilon \in L_0^2(\Omega)$ , existe  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  [27] tal que,

$$\| \epsilon \|_0 \leq C \frac{\int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|_1} \quad (4.13)$$

Ahora, como  $\mathbf{v}^I \in \mathbf{M}^j \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{V}^j \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  podemos usar la ecuación de error (4.10) obteniendo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) + \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^I \\ &= \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) + \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{n} : \nabla \mathbf{v}^I \\ &= \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) - \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) + \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

luego, integrando por partes en cada elemento resulta,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left\{ \int_T (-\nabla p + \Delta \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial T} (\nabla_j \mathbf{u}^j - p^j \mathbf{I}) \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) \right\} + \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \nabla \mathbf{v} \\ &= \sum_T \left\{ - \int_T \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) - \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} \mathbf{J}_{\ell,n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) \right\} + \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad de Schwartz, (4.11) y (4.12), obtenemos,

$$\int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} \leq C (\eta + \|\nabla_j \mathbf{e}\|_0) \|\mathbf{v}\|_1$$

lo cual junto a (4.13) prueba el Lema.

**Lema 4.2** *Se verifica la siguiente estimación*

$$\|\nabla_j \mathbf{e}\|_0 \leq C\eta$$

**Demostración:** Primero descomponemos el error como,

$$\nabla_j \mathbf{e} = \nabla \mathbf{r} - q\mathbf{I} + \operatorname{curl} \varphi \quad (4.14)$$

con  $\mathbf{r} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,  $q \in L_0^2(\Omega)$  y  $\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  verificando,

$$\|\mathbf{r}\|_1 + \|\varphi\|_1 \leq C \|\nabla_j \mathbf{e}\|_0 \quad (4.15)$$

y,

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 0 \quad (4.16)$$

Esta descomposición puede obtenerse como sigue. Sea  $\mathbf{r} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y  $q \in L_0^2$  la solución del problema de Stokes con miembro derecho  $-\operatorname{div}(\nabla_j \mathbf{e}) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ , es decir,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{r} + \nabla q &= -\operatorname{div}(\nabla_j \mathbf{e}) \\ \operatorname{div} \mathbf{r} &= 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

De la estimación a priori estándar sabemos que,

$$\|\mathbf{r}\|_1 + \|q\|_0 \leq C \|\nabla_j \mathbf{e}\|_0 \quad (4.18)$$

Por otro lado, la primera ecuación de (4.17) puede escribirse como,

$$\operatorname{div}(\nabla \mathbf{r} - q\mathbf{I} - \nabla_j \mathbf{e}) = 0$$

entonces, existe  $\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , con integral cero, tal que (4.14) vale y la cota para  $\|\varphi\|_1$  se sigue de (4.18) y (4.14).

Ahora estimamos el error en la velocidad usando la descomposición (4.14). Primero observemos que,

$$\int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : q \mathbf{I} = \sum_T \int_T q \operatorname{div} \mathbf{e} = 0$$

porque  $\operatorname{div} (\mathbf{e}|_T) = 0$ . Entonces, como  $\operatorname{div} \mathbf{r} = 0$  tenemos,

$$\| \nabla_j \mathbf{e} \|_0^2 = \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \nabla \mathbf{r} - \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{r} + \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \mathbf{curl} \varphi \quad (4.19)$$

Usando la ecuación de error (4.10) para  $\mathbf{v} = \mathbf{r}^I \in \mathbf{H}_0^1 \cap \mathbf{V}^j$  y la relación de ortogonalidad,

$$\int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \mathbf{curl} \varphi^I = 0 \quad (4.20)$$

la cual se verifica como en el caso escalar, obtenemos de (4.19),

$$\begin{aligned} \| \nabla_j \mathbf{e} \|_0^2 &= \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \nabla (\mathbf{r} - \mathbf{r}^I) - \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} (\mathbf{r} - \mathbf{r}^I) + \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \mathbf{curl} (\varphi - \varphi^I) \\ &= \int_{\Omega} (\nabla_j \mathbf{e} - \epsilon \mathbf{I}) : \nabla (\mathbf{r} - \mathbf{r}^I) + \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \mathbf{curl} (\varphi - \varphi^I) \end{aligned}$$

Integrando por partes en cada elemento obtenemos

$$\begin{aligned} \| \nabla_j \mathbf{e} \|_0^2 &= \sum_T \left\{ \int_T \mathbf{f} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^I) - \int_{\partial T} (\nabla_j \mathbf{u}^j - p^j \mathbf{I}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^I) - \int_{\partial T} \nabla_j \mathbf{u}^j \mathbf{t} \cdot (\varphi - \varphi^I) \right\} \\ &= \sum_T \left\{ \int_T \mathbf{f} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^I) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \left[ \int_{\ell} \mathbf{J}_{\ell, n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^I) + \int_{\ell} \mathbf{J}_{\ell, t} \cdot (\varphi - \varphi^I) \right] \right\} \end{aligned}$$

(donde  $\mathbf{t}$  denota la tangente a  $\partial T$ )

y aplicando la desigualdad de Schwartz, (4.11), (4.12) y (4.15) obtenemos el lema.

Como una consecuencia inmediata de los dos lemas recién mencionados tenemos el siguiente,

**Teorema 4.1** *Existe una constante  $C$  tal que,*

$$\| \epsilon \|_0 + \| \nabla_j \mathbf{e} \|_0 \leq C \eta$$

En el próximo teorema vemos que el estimador está esencialmente dominado por el error. En efecto, extendemos a nuestro caso la técnica introducida en [47] para elementos conformes y probamos que el estimador está acotado por una constante por el error más un término de orden mayor el cual depende de la regularidad local del dato  $f$ .

**Teorema 4.2** *Sea  $\mathbf{f}_T = \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{f}$ . Entonces, existe una constante  $C$  tal que,*

$$\eta \leq C \left\{ \| \epsilon \|_0 + \| \nabla_j \mathbf{e} \|_0 + \left( \sum_T |T| \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_T \|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

**Demostración :** Procediendo como en el lema 4.2 vemos que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : (\nabla \mathbf{r} + \mathbf{curl} \varphi) - \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{r} = \\ & = \sum_T \left\{ \int_T \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} [\int_{\ell} \mathbf{J}_{\ell,n} \cdot \mathbf{r} + \int_{\ell} \mathbf{J}_{\ell,t} \cdot \varphi] + \int_T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_T) \cdot \mathbf{r} \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

para todo  $\mathbf{r} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y todo  $\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ .

Ahora elegimos  $\mathbf{r}$  y  $\varphi$  tal que,

$$\begin{cases} \int_T \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{r} = |T|^2 |\mathbf{f}_T|^2 & , & \forall T \in \mathcal{T}_j \\ \int_{\ell} \mathbf{J}_{\ell,n} \cdot \mathbf{r} = |\ell|^2 |\mathbf{J}_{\ell,n}|^2 & , & \forall \ell \in E_I \\ \int_{\ell} \mathbf{J}_{\ell,t} \cdot \varphi = |\ell|^2 |\mathbf{J}_{\ell,t}|^2 & , & \forall \ell \in E_I, \forall \ell \subset \partial\Omega \end{cases} \quad (4.22)$$

y,

$$|\mathbf{r}|_{1,T} + |\varphi|_{1,T} \leq C\eta_T \quad (4.23)$$

Estas funciones pueden tomarse como polinomiales a trozos como en el capítulo 2. De (4.21) y (4.22) tenemos,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : (\nabla \mathbf{r} + \mathbf{curl} \varphi) - \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{r} = \\ & = \sum_T \left\{ |T|^2 \mathbf{f}_T^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^2 (|\mathbf{J}_{\ell,n}|^2 + |\mathbf{J}_{\ell,t}|^2) + \int_T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_T) \cdot \mathbf{r} \right\} \\ & = \sum_T \left\{ |T| \|\mathbf{f}\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^2 (|\mathbf{J}_{\ell,n}|^2 + |\mathbf{J}_{\ell,t}|^2) + \int_T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_T) \cdot \mathbf{r} - |T| \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{0,T}^2 \right\} \\ & = \eta^2 + \sum_T \left\{ \int_T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_T) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_T) - |T| \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{0,T}^2 \right\} \end{aligned}$$

entonces, usando la desigualdad de Schwartz, (4.23), la conocida estimación  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T\|_{0,T} \leq C|T|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{r}|_{1,T}$  y,  $|T|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{0,T} \leq \eta_T$  obtenemos,

$$\begin{aligned} \eta^2 & = (\|\epsilon\|_0 + \|\nabla_j \mathbf{e}\|_0) (|\mathbf{r}|_1 + |\varphi|_1) \\ & \quad + C \sum_T \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{0,T} |T|^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{r}|_{1,T} + \eta_T) \\ & \leq C \left\{ \|\epsilon\|_0 + \|\nabla_j \mathbf{e}\|_0 + \left( \sum_T \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{0,T}^2 |T| \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \eta \end{aligned}$$

y el teorema está probado.

Ahora introducimos un estimador que es equivalente a  $\eta$  y más simple de calcular.

Para hacer esto veremos que los términos correspondientes a  $\mathbf{J}_{\ell,n}$  pueden ser eliminados.

**Lema 4.3** *Dado un lado  $\ell$ , se verifica la siguiente desigualdad*

$$|\mathbf{J}_{\ell,n}|^2 |\ell|^2 \leq \|\mathbf{f}\|_{0,T_{in}}^2 \frac{|T_{in}|}{3} + \|\mathbf{f}\|_{0,T_{out}}^2 \frac{|T_{out}|}{3}$$

**Demostración :**

Podemos suponer que  $\ell \in E_I$ . Sea  $\psi_\ell$  la función base asociada al punto medio de  $\ell$ , es decir,  $\psi_\ell$  es uno en este punto medio y cero en todos los otros nodos.

Tomando  $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} \psi_\ell \\ 0 \end{pmatrix}$  y,  $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_\ell \end{pmatrix}$  como funciones test en (2.3) e integrando por partes obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_{T_{in} \cup T_{out}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^i &= \int_{T_{in}} \nabla_j \mathbf{u}^j : \nabla \mathbf{v}^i - \int_{T_{in}} p^j \operatorname{div} \mathbf{v}^i + \int_{T_{out}} \nabla_j \mathbf{u}^j : \nabla \mathbf{v}^i - \int_{T_{out}} p^j \operatorname{div} \mathbf{v}^i \\ &= \int_{\partial T_{in}} (\nabla \mathbf{u}^j - p^j \mathbf{I}) \mathbf{n}_\ell \cdot \mathbf{v}^i - \int_{\partial T_{out}} (\nabla \mathbf{u}^j - p^j \mathbf{I}) \mathbf{n}_\ell \cdot \mathbf{v}^i \\ &= - \int_\ell \mathbf{J}_{\ell,n} \cdot \mathbf{v}^i \end{aligned}$$

Entonces, denotando por  $J_{\ell,n}^i$  y  $f^i$ ,  $i = 1, 2$  las dos componentes de  $\mathbf{J}_{\ell,n}$  y  $\mathbf{f}$  respectivamente tenemos,

$$-J_{\ell,n}^i |\ell| = \int_{T_{in} \cup T_{out}} f^i \psi_\ell$$

y luego,

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}_{\ell,n}| |\ell| &\leq \| \mathbf{f} \|_{0,T_{in}} \| \psi_\ell \|_{0,T_{in}} + \| \mathbf{f} \|_{0,T_{out}} \| \psi_\ell \|_{0,T_{out}} \\ &= \| \mathbf{f} \|_{0,T_{in}} \left( \frac{|T_{in}|}{3} \right)^{\frac{1}{2}} + \| \mathbf{f} \|_{0,T_{out}} \left( \frac{|T_{out}|}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

lo cual concluye el Lema.

Consecuentemente, definimos el estimador  $\tilde{\eta}$  por

$$\tilde{\eta}^2 = \sum_T \tilde{\eta}_T^2$$

con

$$\tilde{\eta}_T^2 = |T| \| \mathbf{f} \|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^2 |\mathbf{J}_{\ell,t}|^2$$

Del lema 4.3 y los teoremas 4.1 y 4.2 obtenemos para  $\tilde{\eta}$  estimaciones análogas que para  $\eta$ ,

**Teorema 4.3** *Existe una constante  $C_1$  y  $C_2$  tales que,*

$$\| \epsilon \|_0 + \| \nabla_j \mathbf{e} \|_0 \leq C_1 \tilde{\eta}$$

y,

$$\tilde{\eta} \leq C_2 \left\{ \|\epsilon\|_0 + \|\nabla_j \mathbf{e}\|_0 + \left( \sum_T |T| \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

**Observación :** El estimador  $\tilde{\eta}$  depende solo del lado derecho  $\mathbf{f}$  y la velocidad aproximada  $\mathbf{u}^j$  y no de  $p^j$ . Entonces, puede calcularse sin conocer la presión aproximada. Este hecho es útil si uno calcula solamente  $\mathbf{u}^j$  usando una base de divergencia nula de  $\mathbf{V}^j$ .

**Observación :** Siguiendo la demostración del lema 4.1 vemos que la parte de  $\eta$  correspondiente a  $\mathbf{J}_{\ell,t}$  no aparece en la cota de este Lema. Luego, en vista del lema 4.3 obtenemos la estimación

$$\|\epsilon\|_0 \leq C \left\{ \left( \sum_T |T| \|\mathbf{f}\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|\nabla_j \mathbf{e}\|_0 \right\}$$

más precisa que la desigualdad del lema 4.1.

#### 4.2.4 Los elementos de segundo orden de Fortin y Soulie

Hemos introducido y analizado solamente estimadores de error para espacios de elementos no conformes de menor orden, con el fin de obtener mayor simplicidad. En efecto, nuestros resultados pueden extenderse a elementos de mayor orden.

Ahora consideramos los elementos de segundo orden de Fortin y Soulie [25]. Como se muestra en [25], la situación es diferente que en el caso de elementos lineal a trozos pues los modos naturales (es decir: los seis nodos de Gauss de los lados de  $T$ ) no pueden tomarse como grados de libertad. La razón es que existe un polinomio cuadrático que se anula en esos seis nodos. Si  $\lambda_i$  son las coordenadas baricéntricas de  $T$ , este polinomio es,

$$\mathcal{P}_T(\lambda) = 2 - 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

Fortin y Soulie mostraron que el espacio de funciones cuadráticas a trozos continuas en los dos nodos de Gauss de cada lado coincide con los elementos estándar cuadráticos a trozos y continuo enriquecido con un nodo interior en cada triángulo asociado con  $\mathcal{P}_T$ . El costo computacional es esencialmente el mismo que para los elementos cuadráticos estándar. pues el grado de libertad interno puede ser eliminado localmente.

Por otro lado, la condición inf-sup se satisface cuando estos elementos se usan para la velocidad junto con presiones discontinuas lineales a trozos.

Para extender los resultados de la Sección 3 a este caso observemos que las relaciones de ortogonalidad (4.20) valen también en este caso, en efecto, denotando con  $\llbracket \mathbf{u}^j \rrbracket_\ell$  el salto de  $\mathbf{u}^j$  en  $\ell$  tenemos,



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_j \mathbf{e} : \mathbf{curl} \varphi^I &= - \sum_T \int_T \nabla_j \mathbf{u}^j : \mathbf{curl} \varphi^I = - \sum_T \int_{\partial T} \mathbf{u}^j \cdot (\mathbf{curl} \varphi^I) \mathbf{n} \\ &= - \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} \llbracket \mathbf{u}^j \rrbracket_{\ell} \cdot (\mathbf{curl} \varphi^I) \mathbf{n}_{\ell} = 0 \end{aligned}$$

porque  $\llbracket \mathbf{u}^j \rrbracket_{\ell}$  se nula en los dos puntos Gaussianos de  $\ell$ .

Para definir el estimador tenemos que reemplazar el término que contiene  $\|\mathbf{f}\|_{0,T}$  en el caso lineal a trozos por el residuo local (en efecto,  $\mathbf{f}$  era el residuo local en ese caso).

También tenemos que tener en cuenta que  $J_{\ell,n}$  y  $J_{\ell,t}$  no son constantes en este caso. Luego, definimos

$$\eta_T^2 = |T| \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}^j - \nabla p^j\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \left( \|J_{\ell,n}\|_{0,\ell}^2 + \|J_{\ell,t}\|_{0,\ell}^2 \right)$$

Los resultados en los teoremas 4.1 y 4.2 valen en este caso con  $\mathbf{f}_T$  reemplazado por la proyección  $L^2$  local de  $\mathbf{f}$  en el espacio de funciones lineales.

**Observación:** El resultado del lema 4.3 no se puede extender a este caso. En consecuencia, no hay una generalización directa del estimador  $\tilde{\eta}$  a este caso.

#### 4.2.5 Resultados numéricos

En esta sección presentamos los resultados de computación numérica con los elementos de Crouzeix-Raviart. Hemos usado  $\eta_T$  como un indicador de error local para el refinamiento adaptivo en problemas que tienen singularidades.

El procedimiento adaptivo es como sigue. Primero, computamos  $\mathbf{u}^0$  y  $p^0$  correspondientes a la triangulación inicial  $\mathcal{T}^0$ . Entonces, la partición  $\mathcal{T}^{k+1}$  se obtiene de  $\mathcal{T}^j$  por refinamiento de aquellos elementos tales que,

$$\eta_T \geq 0.7\eta_{max}$$

donde  $\eta_{max} = \max_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_T$ . El refinamiento se propaga usando el método propuesto en [39]. En esta forma, el ángulo mínimo de  $\mathcal{T}_j$  no es menor que la mitad del ángulo mínimo de  $\mathcal{T}^0$ .

En nuestros resultados teóricos hemos supuesto, para mayor simplicidad, condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas. Sin embargo, los estimadores pueden definirse con modificaciones simples para condiciones de frontera generales y los resultados son esencialmente los mismos. La única diferencia es la presencia de términos de mayor orden en la equivalencia entre el error y el estimador que dependen de la regularidad local de los datos (ver [5],[43] para los detalles en situaciones similares).

*Ejemplos 1 y 2.* Sea  $\Omega = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{k\pi}{2}\}$ , con  $k = 3$  para el ejemplo 1 y  $k = 4$  para el ejemplo 2. Resolvemos  $-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0$  con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas en las partes rectas de la frontera, y condiciones de borde no homogéneas en la parte curva de la frontera. Las soluciones exactas están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} r^\alpha[(1 + \alpha) \sin \varphi \psi(\varphi) + \cos \varphi \partial_\varphi \psi(\varphi)], \\ r^\alpha[\sin \varphi \partial_\varphi \psi(\varphi) - (1 + \alpha) \cos \varphi \psi(\varphi)] \end{pmatrix} \\ p &= - r^{\alpha-1}[(1 + \alpha)^2 \partial_\varphi \psi(\varphi) + \partial_\varphi^3 \psi(\varphi)] / (1 + \alpha) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= \sin((1 + \alpha)\varphi) \cos(\alpha\omega) / (1 + \alpha) - \cos((1 + \alpha)\varphi) \\ &+ \sin((\alpha - 1)\varphi) \cos(\alpha\omega) / (1 - \alpha) + \cos((\alpha - 1)\varphi), \\ \alpha &= 856399/1572864, \quad \omega = 3\pi/2 \end{aligned}$$

para el ejemplo 1 y

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) &= 3 \sin(0.5\varphi) - \sin(1.5\varphi), \\ \alpha &= 0.5, \quad \omega = 2\pi \end{aligned}$$

para el ejemplo 2 [47].

La Tabla 1 muestra el error  $\|\nabla_j e\|_0 + \|\epsilon\|_0$  y el estimador para 5 pasos del proceso de refinamiento para el ejemplo 1. Se utiliza  $N$  para el número de incógnitas. La Tabla 2 muestra resultados similares para el ejemplo 2.

Tabla 1

$k$	$N$	$\eta$	Error
0	112	2.11	5.30
1	242	1.93	3.91
2	388	1.77	3.07
3	502	1.71	2.63
4	744	1.54	2.10
5	1220	1.39	1.55

Tabla 2

$k$	$N$	$\eta$	Error
0	148	3.55	10.74
1	302	3.38	8.53
2	592	3.06	6.32
3	834	2.82	5.01
4	1076	2.66	4.25
5	1630	2.36	3.16

De estos resultados, se deduce que el orden óptimo de convergencia se obtiene para estas soluciones singulares, es decir,

$$\|\epsilon\|_0 + \|\nabla_j e\|_0 = \mathcal{O}(N^{-1/2})$$

Esto se muestra en la figura 1. Este orden de convergencia es el mismo que el obtenido para soluciones regulares con refinamientos uniformes.

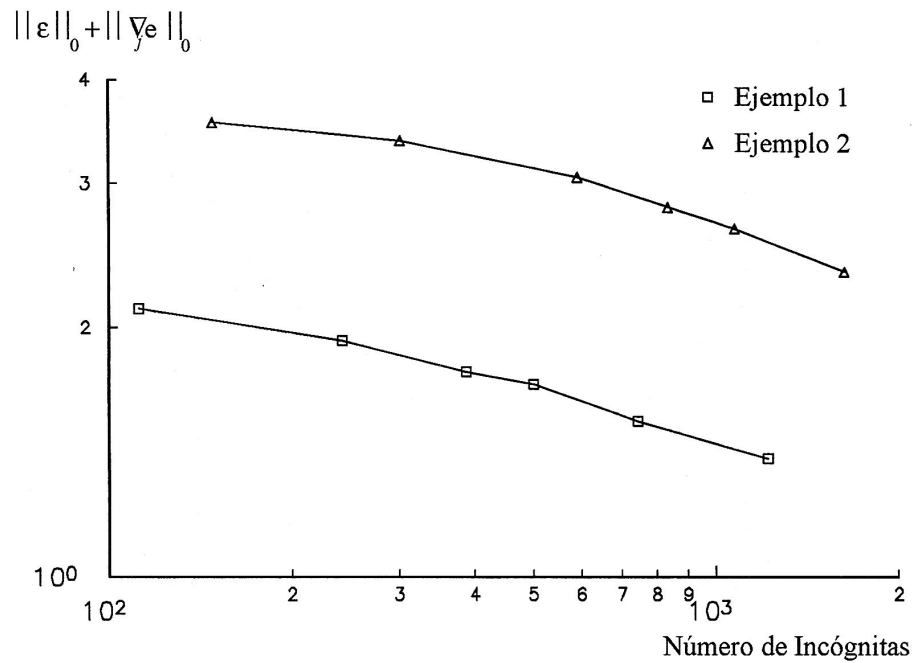
Las figuras (2.a), (2.b), (2.c), (2.d) muestran las mallas  $\mathcal{T}^j$  para  $k = 0, 1, 3, 5$ , obtenidas en el ejemplo 1. En la figura 3 se muestran las mismas mallas para el ejemplo 2.

*Ejemplo 3.* Este último ejemplo es la "cavidad cuadrada" estándar. La Tabla 3 muestra el estimador para 5 pasos del procedimiento adaptivo.

Tabla 3

$k$	$N$	$\eta$
0	198	1.50
1	362	1.26
2	726	0.99
3	1176	0.83
4	1616	0.72
5	2280	0.62

Los resultados en esta tabla muestran que  $\eta = \mathcal{O}(N^{-1/2})$ , lo cual, de acuerdo con los teoremas previos, garantiza el orden de convergencia óptimo también para este problema. Las mallas  $\mathcal{T}^j$  para  $k = 0, 1, 3, 5$ , que se obtienen en este ejemplo se muestran en la figura 4.



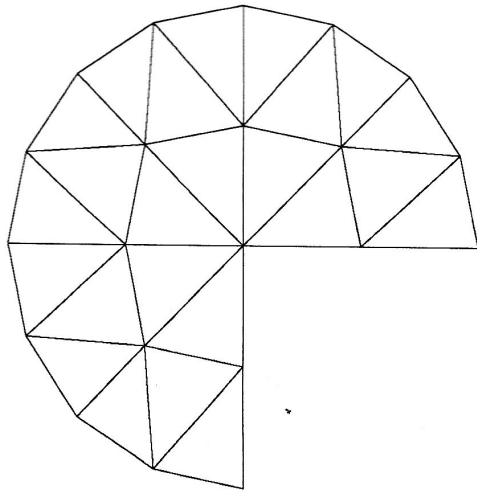


Figura (2.a)

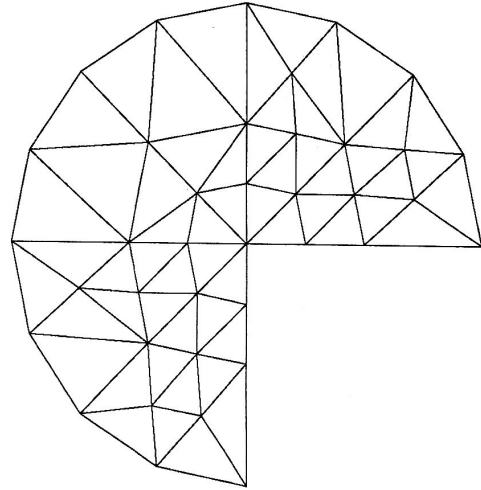


Figura (2.b)

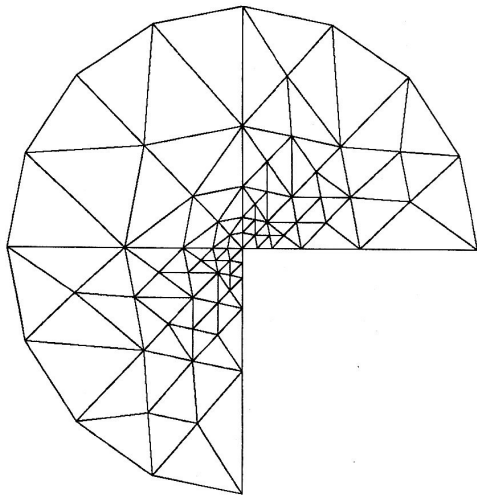


Figura (2.c)

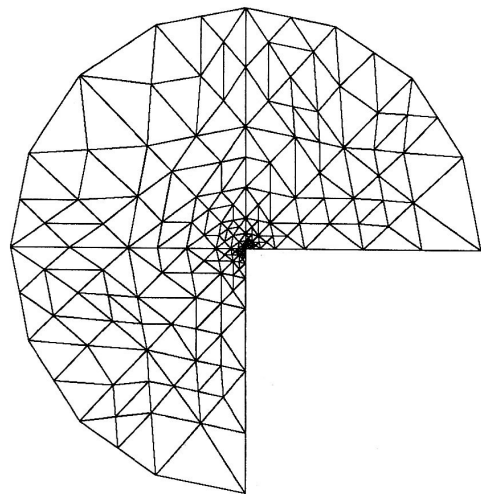


Figura (2.d)

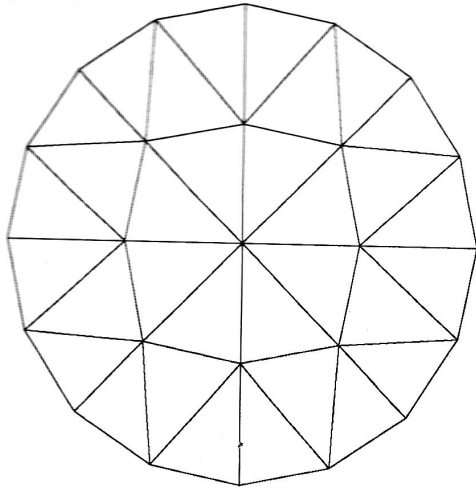


Figura (3.a)

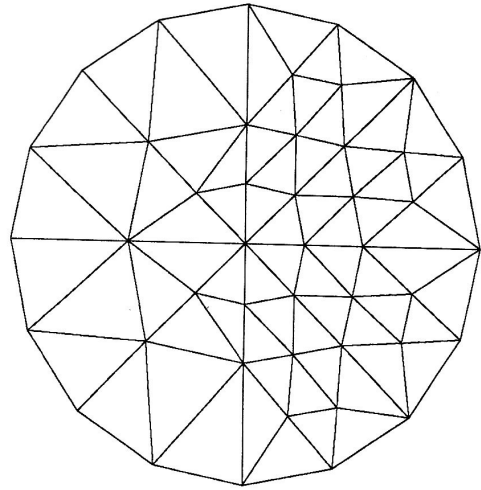


Figura (3.b)

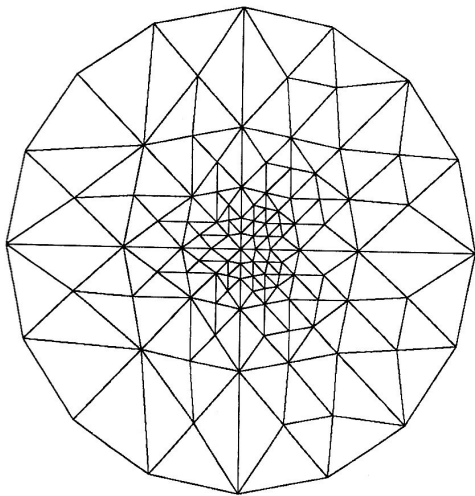


Figura (3.c)

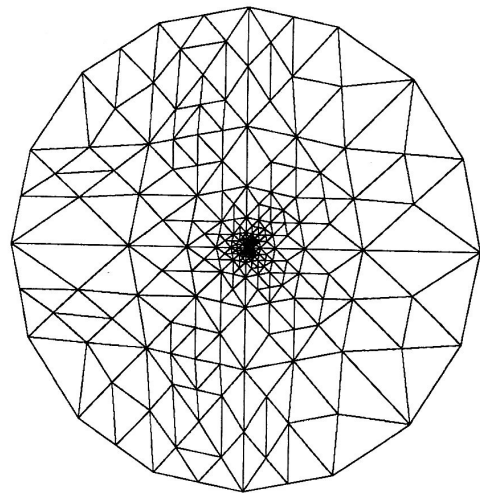


Figura (3.d)

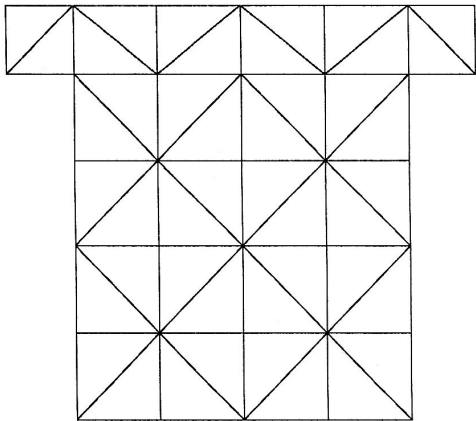


Figura (4.a)

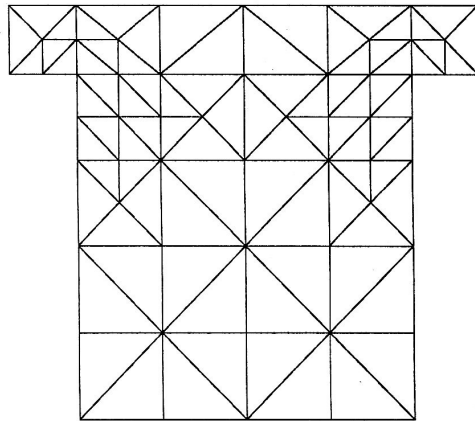


Figura (4.b)

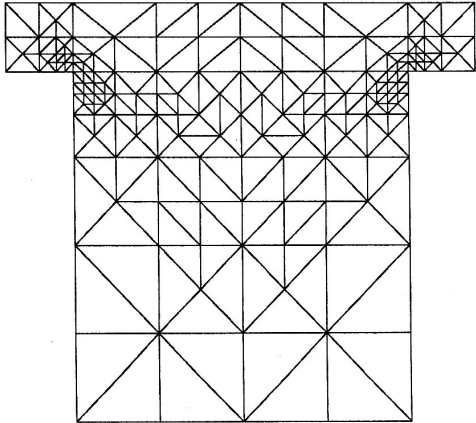


Figura (4.c)

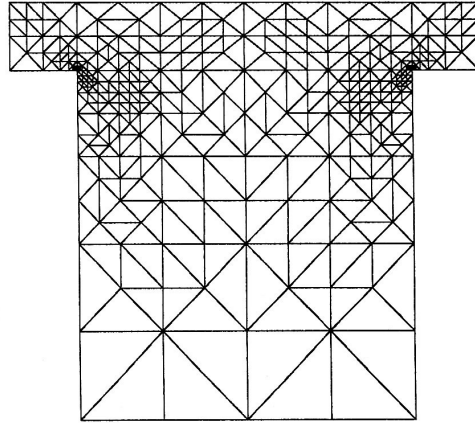


Figura (4.d)

## 4.3 Fluidos Quasi-Newtonianos

### 4.3.1 Preliminares

Para las velocidades consideramos el espacio funcional

$$\mathbf{W}_0^{1,p} = (W_0^{1,p})^2$$

equipado con la norma

$$\|D(\mathbf{u})\|_{0,p}$$

la cual, por la desigualdad de Korn, es equivalente a la norma de Sobolev en  $\mathbf{W}_0^{1,p}$  [23].

El problema (4.7) admite una formulación debil mixta

Dado  $\mathbf{f} \in L^{p'}$  hallar  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\mu(\|D(\mathbf{u})\|)D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} & , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p} \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & , \quad \forall q \in L^{p'} \end{cases} \quad (4.24)$$

Si definimos  $\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p} : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$  la solución del problema (4.24) verifica que

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \equiv \int_{\Omega} 2\mu(\|D(\mathbf{u})\|)D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (4.25)$$

La formula (4.25) se puede interpretar como la ecuación de Euler  $J'(\mathbf{u})$  del problema de minimización  $\inf\{J(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbf{W}\}$  donde

$$J(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2 \int_0^{\|D(\mathbf{v})\|} \mu(t) t dt dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx$$

Supondremos que el coeficiente  $\mu(\cdot)$  es una función continua no negativa definida en  $\mathfrak{R}^+$  y que la función  $\varphi(t) = \mu(t)t$  verifique las mismas hipótesis que en el capítulo 3.

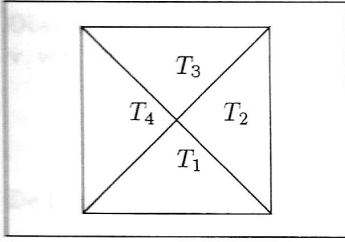
Para un vector  $\mathbf{v}$  cuyas componentes son funciones regulares a trozos definimos el gradiente discreto como la matriz de  $(L^p)^{2 \times 2}$  dada por

$$\nabla_j \mathbf{v} |_T = \nabla(\mathbf{v} |_T)$$

y la divergencia discreta por

$$\operatorname{div}_j \mathbf{v} = \mathbf{I} : \nabla_j \mathbf{v}$$

**Observación:** Consideremos como  $\Omega$  al cuadrado unidad y en la triangulación que se obtiene con sus dos diagonales. La malla obtenida está formada por cuatro triángulos iguales como muestra la siguiente figura.



Consideremos la siguiente función  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}|_{T_1} &= (-4y, 4x - 2) \\
 \mathbf{u}|_{T_2} &= (4y - 2, 4 - 4x) \\
 \mathbf{u}|_{T_3} &= (4 - 4y, 4x - 2) \\
 \mathbf{u}|_{T_4} &= (4y - 2, -4x)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Notemos que  $\mathbf{u} = 0$  en los nodos de la frontera y  $\|D_j \mathbf{u}\|_{0,2} = 0$ , lo cual muestra que  $\|D_j \mathbf{u}\|$  no es una norma en el espacio de las funciones no conformes lineales. Consideraremos los elementos de segundo orden de Fortin y Soulie debido a que para ellos  $\|D_j \mathbf{u}\|_{0,2}$  sí es una norma y además, verifican la versión discreta de la desigualdad de Korn [24].

Definimos los siguientes espacios de elementos finitos no conformes [25]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}^j &= \{ \mathbf{v} : \mathbf{v}|_T \in \mathcal{P}_2(T) \times \mathcal{P}_2 \forall T \in \mathcal{T}_j, \mathbf{v} \text{ es continua en los puntos de Gauss de } T_j \\
 &\quad \text{y nula en los puntos de Gauss de } \partial\Omega \} \\
 Q^j &= \{ v : v|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_j \}
 \end{aligned}$$

Entonces, la aproximación por elementos finitos no-conformes de la solución del problema (4.24) se define por  $(\mathbf{u}_j, p_j) \in \mathbf{V}^j \times Q^j$  y,

$$\begin{cases}
 \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mu(\|D(\mathbf{u}_j)\|) D(\mathbf{u}_j) : D(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} p_j \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} f \mathbf{v} & , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^j \\
 \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T q : \operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0 & , \quad \forall q \in Q^j
 \end{cases} \tag{4.27}$$

donde  $D_j(\mathbf{u}) = \frac{\nabla_j^t \mathbf{u} + \nabla_j \mathbf{u}}{2}$ .

Si definimos  $\mathbf{W}^j = \{ v \in \mathbf{V}^j : \operatorname{div}_j \mathbf{v} = 0 \}$  la solución del problema (4.27) verifica que

$$\langle A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle \equiv \int_{\Omega} 2\mu(\|D_j(\mathbf{u}_j)\|) D_j(\mathbf{u}_j) : D_j(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^j \tag{4.28}$$

La formula (4.28) se puede interpretar como la ecuación de Euler  $J'_j(\mathbf{u})$  del problema de minimización  $\inf \{ J_j(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbf{W}^j \}$  donde

$$J_j(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2 \int_0^{\|D_j(\mathbf{v})\|} \mu(t) t dt dx - \int_{\Omega} f \mathbf{v} dx$$



Observemos que  $A_j$  está definida sobre  $(\mathbf{W} + \mathbf{W}^j)$  y verifica que  $\langle A_j \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle A \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$  para  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$ . Además, la solución débil  $\mathbf{u}$  de (4.28) verifica que

$$\langle A_j \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (4.29)$$

De la misma manera que en el capítulo 3 se obtiene el siguiente resultado

**Teorema 4.4** *Existen constantes positivas  $\alpha$  y  $\gamma$  tales que, para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{W} + \mathbf{W}^j$  se verifica*

- Si  $1 < p \leq 2$

$$\alpha \frac{\|D_j \mathbf{u} - D_j \mathbf{v}\|_{0,p}^2}{\check{K}_1 + \check{K}_2 (\|D_j \mathbf{u}\|_{0,p} + \|D_j \mathbf{v}\|_{0,p})^{2-p}} \leq \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$$

y

$$\frac{|\langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|}{\|D_j \mathbf{w}\|_{0,p}} \leq \gamma \|D_j \mathbf{u} - D_j \mathbf{v}\|_{0,p}^{p-1}$$

- Si  $2 \leq p < \infty$

$$\alpha \|D_j \mathbf{u} - D_j \mathbf{v}\|_{0,p}^p \leq \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$$

y

$$\frac{|\langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|}{\|D_j \mathbf{w}\|_{0,p}} \leq \gamma \|D_j \mathbf{u} - D_j \mathbf{v}\|_{0,p} (\check{K}_1 + \check{K}_2 (\|D_j \mathbf{u}\|_{0,p} + \|D_j \mathbf{v}\|_{0,p})^{p-2})$$

donde  $\check{K}_1 \geq 0$  y  $\check{K}_2 > 0$  son constantes independientes de  $y$  y  $z$ .

Como consecuencia del teorema previo tenemos que  $J$  y  $J_j$  son estrictamente convexos y continuos. Luego, los problemas (4.25) y (4.28) tienen una única solución [40].

Definimos el operador  $B \in \mathcal{L}(\mathbf{W}_0^{1,p}, L^p)$  por

$$\langle B \mathbf{v}, q \rangle = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}$$

y su análogo discreto

$$\langle B_j \mathbf{v}, q \rangle = \int_{\Omega} q \operatorname{div}_j \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in (\Pi_T W^{1,p}(T))^2$$

En [13] puede verse el siguiente resultado

**Teorema 4.5** *(4.24) admite una solución única si, y solo si, (4.25) admite una solución única y  $B$  es suryectivo y satisface la siguiente condición inf-sup*

$$0 < \alpha \leq \inf_{q \in L^p/\mathbb{R}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}} \frac{\langle B \mathbf{v}, q \rangle}{\|q\|_{L^2/\mathbb{R}} \|D \mathbf{v}\|_{0,p}}$$

**Observación:** Si la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  es suficientemente regular ( $n = 2$ ) el operador  $\text{div} \in \mathcal{L}(\mathbf{W}_0^{1,p}, L^p)$  es suryectivo y admite una inversa a derecha continua [30], lo cual equivale a la condición inf-sup del teorema anterior. En [35] se demuestra que si  $p = 2$ , el resultado es válido para dominios con fronteras Lipschitz-continuas ([35] pag.187, [27]) y la misma demostración puede usarse para ver que el resultado también es válido para  $1 < p < \infty$ .

Análogamente, suponiendo que  $\mathbf{V}^j, Q^j$  satisface la condición inf-sup discreta

$$0 < \alpha' \leq \inf_{q \in Q^j} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^j} \frac{\langle B_j \mathbf{v}, q \rangle}{\|q\|_{Q^j} \|D_j \mathbf{v}\|_{0,p}}$$

donde  $\alpha'$  es una constante independiente de  $\mathbf{V}^j, Q^j$ , entonces el problema aproximado (4.27) admite una solución única.

### 4.3.2 Estimaciones a priori del error

Comenzamos estimando el error de consistencia para  $1 < p < \infty$

**Lema 4.4** Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_j\}$  es regular y si  $\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u} \in (W^{2,p'})^{2 \times 2}$   $p \in W^{2,p'}$  entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}^j} \frac{\langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{w} \rangle}{\|D_j \mathbf{w}\|_{0,p}} \leq Ch^2$$

donde  $C$  depende del ángulo mínimo de la triangulación, de  $|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}|_{2,p'}$  y de  $\|p\|_{2,p'}$ .

**Demostración:** Pondremos  $\sigma = \mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u} - p\mathbf{I}$ . Como  $\text{div}_j \mathbf{w} = 0$ , para  $\mathbf{w} \in W^j$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{w} \rangle &= \langle A_j \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{w}) \\ &= \langle A_j \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + (\text{div } \sigma, \mathbf{w}) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} \sigma \cdot \mathbf{n} \mathbf{w} - \int_{\Omega} (p - I^c p) \text{div}_j \mathbf{w} \\ &\leq C(h^2 |\sigma|_{2,p'} + \|p - I^c p\|_{0,p'}) \|D_j \mathbf{w}\|_{0,p} \\ &\leq Ch^2 (|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}|_{2,p'} + \|p\|_{2,p'}) \|D_j \mathbf{w}\|_{0,p} \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Korn discreta.

Recordemos también que  $\|D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p}$  y  $\|D\mathbf{u}\|_{0,p}$  están acotadas por  $\|\mathbf{f}\|_{0,p'}$ .

**Caso**  $1 < p \leq 2$

**Teorema 4.6** Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_j\}$  es regular y si  $\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u} \in (W^{2,p'})^{2 \times 2}$   $p \in W^{2,p'}$  entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\|D(\mathbf{u}) - D_j(\mathbf{u}_j)\|_{0,p} \leq Ch^{2(p-1)}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \gamma, K_1, K_2$ , del ángulo mínimo de la triangulación, de  $\|\mathbf{f}\|_{0,p'}$ , de  $|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}|_{2,p'}$  y de  $\|p\|_{2,p'}$ .

**Demostración:**

Para cualquier  $\mathbf{v} \in W^j$  se verifica

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\|D_j \mathbf{u}_j - D_j \mathbf{v}\|_{0,p}^2}{K_1 + K_2 (\|D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p} + \|D_j \mathbf{v}\|_{0,p})^{p-2}} &\leq \langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{v}, \mathbf{u}_j - \mathbf{v} \rangle \\ &\leq \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{v}, \mathbf{u}_j - \mathbf{v} \rangle + \langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{u}, \mathbf{u}_j - \mathbf{v} \rangle \\ &\leq \gamma \|D\mathbf{u} - D_j \mathbf{v}\|_{0,p}^{p-1} \|D_j \mathbf{u}_j - D_j \mathbf{v}\|_{0,p} \\ &\quad + \langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{u}, \mathbf{u}_j - \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

Ahora, usando el lema 4.4 y eligiendo  $\mathbf{v} = I^c \mathbf{u}$  como la inetrpolada  $\mathcal{P}_2$  conforme, obtenemos

$$\|D_j \mathbf{u}_j - D_j \mathbf{v}\|_{0,p} \leq Ch^{2(p-1)}$$

luego

$$\|D\mathbf{u} - D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p} \leq Ch^{2(p-1)}$$

Ahora, estimaremos el error en las presiones. Para ello nos basaremos en la condición inf-sup

Si  $\mathbf{v} \in V^j$  para cualquier  $q \in Q^j$  se tiene

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_j \mathbf{v}, p_j - q) &= \langle A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, q) \\ &= \langle A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle + (\operatorname{div} (-p\mathbf{I} + 2\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, q) \\ &= \langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (p - q, \operatorname{div}_j \mathbf{v}) + \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} \sigma \cdot \mathbf{n} \mathbf{v} \\ &\leq C (\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{u}\|_{0,p}^{p-1} + \|p - q\|_{0,p'} + h^2 |\sigma|_{2,p'}) \|D_j \mathbf{v}\|_{0,p} \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Korn discreta. Si tomamos por  $q$  una interpolada de  $p$  se sigue de la desigualdad triangular y la condición inf-sup que

$$\begin{aligned} \|p - p_j\|_{0,p'} &\leq C (\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{u}\|_{0,p}^{p-1} + h^2 (\|p\|_{2,p'} + \|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}\|_{2,p'})) \\ &\leq Ch^{2(p-1)^2} (\|p\|_{2,p'} + \|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}\|_{2,p'}) \end{aligned}$$

luego se tiene el siguiente resultado

**Teorema 4.7** *Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_j\}$  es regular y si  $\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u} \in (W^{2,p'})^{2 \times 2}$   $p \in W^{2,p'}$  entonces existe una constante  $C$  tal que*

$$\|D(\mathbf{u}) - D_j(\mathbf{u}_j)\|_{0,p}^{p-1} + \|p - p_j\|_{0,p'} \leq Ch^{2(p-1)^2}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \gamma, K_1, K_2$ , del ángulo mínimo de la triangulación, de  $\|\mathbf{f}\|_{0,p'}$ , de  $|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}|_{2,p'}$  y de  $\|p\|_{2,p'}$ .

**Caso  $2 \leq p < \infty$**

**Teorema 4.8** *Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_j\}$  es regular y si*

$$\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u} \in (W^{2,p'})^{2 \times 2} \quad \text{y} \quad p \in W^{2,p'}$$

entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{u}\|_{0,p} \leq C h^{\frac{2}{p-1}}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \gamma, K_1, K_2$ , del ángulo mínimo de la triangulación, de  $\|\mathbf{f}\|_{0,p'}$ , de  $|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}|_{2,p'}$  y de  $\|p\|_{2,p'}$ .

**Demostración:** Para cualquier  $v \in W^j$  usando el teorema 4.4 se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha \|D_j \mathbf{u}_j - D_j \mathbf{v}\|_{0,p}^p &\leq \langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{v}, \mathbf{u}_j - \mathbf{v} \rangle \\ &\leq \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{v}, \mathbf{u}_j - \mathbf{v} \rangle + \langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{u}, \mathbf{u}_j - \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \|D_j \mathbf{u}_j - D_j \mathbf{v}\|_{0,p}^{p-1} &\leq \\ &\leq \gamma(K_1 + K_2(\|D\mathbf{u}\|_{0,p} + \|D_j \mathbf{v}\|_{0,p})^{p-2}) \|D\mathbf{u} - D_j \mathbf{v}\|_{0,p} + \frac{\langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{u}, \mathbf{u}_j - \mathbf{v} \rangle}{\|D_j \mathbf{u}_j - D_j \mathbf{v}\|_{0,p}} \end{aligned}$$

y tomando como  $v = I^c u$  tenemos

$$\|D_j \mathbf{u} - D_j \mathbf{v}\|_{0,p} \leq C h^{\frac{2}{p-1}}$$

y entonces

$$\|D_j \mathbf{u} - D\mathbf{u}_j\|_{0,p} \leq \|D\mathbf{u} - D I^c \mathbf{u}\|_{0,p} + \|D_j \mathbf{u}_j - D_j I^c \mathbf{u}\|_{0,p} \leq C h^{\frac{2}{p-1}} \quad (4.30)$$

con lo cual se tiene el teorema.

Igual que en el caso  $1 < p \leq 2$  ahora, podemos estimar el error en las presiones.

**Teorema 4.9** Si la familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_j\}$  es regular y si

$$\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u} \in (W^{2,p'})^{2 \times 2} \quad y \quad p \in W^{2,p'}$$

entonces existe una constante  $C$  tal que

$$\|D(\mathbf{u}) - D_j(\mathbf{u}_j)\|_{0,p} + \|p - p_j\|_{0,p'} \leq C h^{\frac{2}{p-1}}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \gamma, K_1, K_2$ , del ángulo mínimo de la triangulación, de  $\|\mathbf{f}\|_{0,p'}$ , de  $|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}|_{2,p'}$  y de  $\|p\|_{2,p'}$ .

**Demostración:**

Si  $\mathbf{v} \in V^j$  para cualquier  $q \in Q^j$  se tiene

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{v}, p_j - q) &= \langle A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, q) \\ &= \langle A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle + (\operatorname{div} (-p\mathbf{I} + 2\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}), \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, q) \\ &= \langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (p - q, \operatorname{div}_j \mathbf{v}) + \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} \sigma \cdot \mathbf{n} \mathbf{v} \\ &\leq C \left\{ (K_1 + K_2(\|D\mathbf{u}\|_{0,p} + \|D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p})^{p-2}) \|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{u}\|_{0,p} + \|p - q\|_{0,p'} \right. \\ &\quad \left. + h^2 |\sigma|_{2,p'} \right\} \|D_j \mathbf{v}\|_{0,p} \end{aligned}$$

Si tomamos por  $q$  una interpolada de  $p$  se sigue de la desigualdad triangular y la condición inf-sup que

$$\begin{aligned} \|p - p_j\|_{0,p'} &\leq C (\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{u}\|_{0,p} + h^2(\|p\|_{2,p'} + \|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}\|_{2,p'})) \\ &\leq Ch^{\frac{2}{p-1}}(\|p\|_{2,p'} + \|\mu(\|D\mathbf{u}\|)D\mathbf{u}\|_{2,p'}) \end{aligned}$$

con lo cual se tiene el teorema.

### 4.3.3 Estimador a posteriori del error que acota por arriba a $\|D\mathbf{u} - D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p}$

Consideraremos la solución  $(\mathbf{r}, q) \in \mathbf{W}_0^{1,p} \times L_0^{p'}$  del siguiente problema auxiliar

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{r}, \mathbf{w} \rangle - (q, \operatorname{div} \mathbf{w}) &= \langle A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}_0^{1,p} \\ (q, \operatorname{div} \mathbf{r}) &= 0, \quad \forall w \in L_0^{p'} \end{aligned}$$

y sea  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{W}^{1,p'}$  que verifica

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{\psi} = \mu(\|D_j \mathbf{u}_j\|)D_j \mathbf{u}_j - \mu(\|D\mathbf{r}\|)D\mathbf{r} + q\mathbf{I}$$

Tal  $\boldsymbol{\psi}$  existe para todo dominio de  $\mathfrak{R}^2$  [27]. Además, se cumple la siguiente estimación:

**Lema 4.5** *Se verifica la siguiente desigualdad*

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{1,p'} \leq \begin{cases} C (\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^{p-1} + \|q\|_{0,p'}) & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ C (\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p} + \|q\|_{0,p'}) & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \gamma, f, K_1$  y  $K_2$

**Demostración:** Si  $\mathbf{w} \in (L^p)^{2 \times 2}$  se tiene

$$\begin{aligned} \int \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi} : \mathbf{w} &= \int (\mu(\|D_j \mathbf{u}_j\|)D_j \mathbf{u}_j - \mu(\|D\mathbf{r}\|)D\mathbf{r} + q\mathbf{I}) : \mathbf{w} \\ &\leq \begin{cases} C (\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^{p-1} + \|q\|_{p'}) \|\mathbf{w}\|_{0,p} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ C \left\{ (K_1 + K_2 (\|D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p} + \|D\mathbf{r}\|_{0,p})^{p-2}) \|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p} + \|q\|_{p'} \right\} \|\mathbf{w}\|_{0,p} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $2 \leq p < \infty$  se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha \|D\mathbf{r}\|_{0,p}^p &\leq \int \mu(\|D\mathbf{r}\|)D\mathbf{r} : D\mathbf{r} = \langle A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{r} \rangle \\ &= \langle A_j \mathbf{u}_j - A_j 0, \mathbf{r} \rangle \leq \gamma \left( K_1 + K_2 \|D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p}^{p-2} \right) \|D\mathbf{r}\|_{0,p} \end{aligned}$$

donde hemos usado la última desigualdad del teorema 4.4. Como  $\|D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p}$  está acotada por una constante que depende de  $\alpha$  y de  $f$ , resulta que

$$\int \mathbf{curl} \boldsymbol{\psi} : \mathbf{w} \leq C (\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p} + \|q\|_{0,p'}) \|\mathbf{w}\|_{0,p}$$

entonces se verifica que

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{1,p'} = \sup_{\mathbf{w} \in (L^p(\Omega))^{2 \times 2}} \frac{\int \mathbf{curl} \boldsymbol{\psi} : \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_{0,p}} \leq \begin{cases} C \|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^{p-1} + \|q\|_{0,p'} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ C \|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p} + \|q\|_{0,p'} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

con lo cual se tiene el lema.

Para un dado  $\ell$  definimos  $J_{\ell,n}$  y  $J_{\ell,t}$  por

$$J_{\ell,n} = \begin{cases} \left[ \left[ (-p_j \mathbf{I} + \mu(\|D\mathbf{u}_j\|) D_j \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n} \right] \right]_{\ell} & , & \text{si } \ell \in E_I \\ 0 & , & \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$J_{\ell,t} = \begin{cases} \left[ \left[ \nabla \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{t} \right] \right]_{\ell} & , & \text{si } \ell \in E_I \\ 2 \nabla \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{t} \Big|_{\ell} & , & \text{si } \ell \subset \partial\Omega \end{cases}$$

**Caso**  $1 < p \leq 2$

Notaremos por  $R = f + \operatorname{div} (-p_j \mathbf{I} + 2\mu(\|D_j \mathbf{u}_j\|) D_j \mathbf{u}_j)$ .

Definimos los siguientes indicadores del error para cada  $T \in \mathcal{T}_j$

$$\eta_{1,T}^{p'} = h_T^{p'} \|R\|_{0,p',T}^{p'} + \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,n}\|_{0,p',T}^{p'}$$

$$\eta_{2,T}^{p'} = \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{\frac{1}{(p-1)(3-p)}} \|J_{\ell,t}\|_{0,p,T}^{\frac{p}{(p-1)(3-p)}}$$

y

$$\eta_T = \{\eta_{1,T}^{p'} + \eta_{2,T}^{p'}\}^{\frac{1}{p'}}$$

y el estimador a posteriori del error por

$$\eta = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_T^{p'} \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

**Observación:** Cuando  $p = 2$  este estimador coincide con el de las ecuaciones de Stokes.

**Teorema 4.10** *Con las definiciones anteriores se verifica que*

$$\|D\mathbf{u} - D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p} \leq C \eta$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \gamma, K_1, K_2$ , del ángulo mínimo de la triangulación y de  $\|\mathbf{f}\|_{0,p'}$ .

**Demostración:** Para acotar por arriba a  $\|D\mathbf{u} - D_j\mathbf{u}_j\|_{0,p}$  buscaremos cotas para  $\|D\mathbf{u} - D\mathbf{r}\|_{0,p}$  y para  $\|D\mathbf{r} - D_j\mathbf{u}_j\|_{0,p}$ .

En primer lugar analizamos  $\|D\mathbf{u} - D\mathbf{r}\|_{0,p}$ . Indicaremos por  $\mathbf{e}_r = \mathbf{u} - \mathbf{r}$  y por  $\mathbf{e}_r^I$  a una interpolada conforme de  $\mathbf{e}_r$ . Se verifica

$$\begin{aligned}
\alpha \|D\mathbf{e}_r\|_{0,p}^2 &\leq C \langle A_j\mathbf{u} - A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r \rangle \\
&= C \langle A_j\mathbf{u} - A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle + \langle A_j\mathbf{u} - A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r^I \rangle \\
&= C \langle A_j\mathbf{u} - A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle + (p - p_j - q, \operatorname{div} \mathbf{e}_r^I) \\
&= C \langle A_j\mathbf{u}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle - (p, \operatorname{div} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I)) + (p_j, \operatorname{div} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I)) \\
&\quad - [\langle A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle - (q, \operatorname{div} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I))] \\
&= C (\mathbf{f}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I) - \langle A_j\mathbf{u}_j, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle + (p_j, \operatorname{div} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I)) \\
&= C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T R(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I) + \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell J_{\ell,n}(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I)
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder y los resultados de interpolación presentados en los capítulos previos tenemos

$$\begin{aligned}
\|D\mathbf{e}_r\|_{1,p}^2 &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left( \|R\|_{0,p',T} h_T + \sum_{\ell \in E_T} \|J_{\ell,n}\|_{0,p',\ell} h_T^{1-\frac{1}{p}} \right) \|D\mathbf{e}_r\|_{0,p,T} \\
&\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} h_T^{p'} \|R\|_{0,p',T}^{p'} + \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,n}\|_{0,p',T}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|D\mathbf{e}_r\|_{0,p}
\end{aligned}$$

y, entonces

$$\|D\mathbf{e}_r\|_{0,p} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{1,T}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (4.31)$$

Ahora estimemos  $\|D_j\mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}$ . Se verifica

$$\alpha \|D_j\mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^2 \leq C \langle A_j\mathbf{u}_j - A_j\mathbf{r}, \mathbf{u}_j - \mathbf{r} \rangle$$

y como  $\langle A_j\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \langle A_j\mathbf{u}_j, \mathbf{r} \rangle$  resulta

$$\begin{aligned}
\alpha \|D_j\mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^2 &\leq C \langle A_j\mathbf{u}_j - A_j\mathbf{r}, \mathbf{u}_j \rangle \\
&= C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T [\mu(\|D_j\mathbf{u}_j\|) D_j\mathbf{u}_j - \mu(\|D\mathbf{r}\|) D\mathbf{r}] D_j\mathbf{u}_j \\
&= C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T (\mathbf{curl} \boldsymbol{\psi} - q\mathbf{I}) : D_j\mathbf{u}_j \\
&= C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mathbf{curl} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^I) D_j\mathbf{u}_j - q \operatorname{div} \mathbf{u}_j
\end{aligned}$$

y usando que  $\operatorname{div}_j \mathbf{u}_j = 0$  y que  $\mathbf{curl} \boldsymbol{\psi}$  es simétrico y entonces  $\boldsymbol{\psi}^I$  puede elegirse como una interpolada simétrica. Luego se tiene

$$\begin{aligned}
\|D_j\mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mathbf{curl} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^I) \nabla_j \mathbf{u}_j \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} \nabla \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{t} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^I) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell J_{\ell,t} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^I)
\end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad de Hölder y los resultados de interpolación tenemos

$$\begin{aligned}
\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^2 &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} \|J_{\ell,t}\|_{0,p,\ell} h_T^{\frac{1}{p}} |\boldsymbol{\psi}|_{1,p',T} \\
&\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p,T}^p \right)^{\frac{1}{p}} |\boldsymbol{\psi}|_{1,p'} \\
&\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p,T}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \|D_j \mathbf{u}_j - D_j \mathbf{r}\|_{0,p}^{p-1} + \|q\|_{0,p'} \right)
\end{aligned}$$

y de la condición inf-sup se tiene

$$\alpha \|q\|_{0,p'} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|D\mathbf{v}\|_{0,p}} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}} \frac{\langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle}{\|D\mathbf{v}\|_{0,p}} \leq C \|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^{p-1}$$

y, entonces

$$\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{2,T}^{p(3-p)} \right)^{\frac{1}{p(3-p)}} \quad (4.32)$$

Combinando (4.31) y (4.32) resulta

$$\|Du - D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{1,T}^{p'} + \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{2,T}^{p(3-p)} \right)^{\frac{1}{(p-1)(3-p)}} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

y usando (3.10) obtenemos el teorema.

**Caso 2**  $2 \leq p < \infty$

Definimos los siguientes indicadores del error para cada  $T \in \mathcal{T}_j$

$$\begin{aligned}
\eta_{1,T}^{p'} &= h_T^{p'} \|R\|_{0,p',T}^{p'} + \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,n}\|_{0,p',T}^{p'} \\
\eta_{2,T}^{p'} &= \sum_{\ell \in E_T} |\ell|^{\frac{1}{p-1}} \|J_{\ell,t}\|_{0,p,T}^{\frac{p}{p-1}} \\
\eta_T &= \{\eta_{1,T}^{p'} + \eta_{2,T}^{p'}\}^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

y el estimador a posteriori del error por

$$\eta = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_T^{p'} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

**Teorema 4.11** *Con las definiciones anteriores se verifica que*

$$\|D\mathbf{u} - D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p} \leq C \eta$$

donde  $C$  depende de  $\alpha, \gamma, K_1, K_2$ , del ángulo mínimo de la triangulación y de  $\|\mathbf{f}\|_{0,p'}$ .



**Demostración:** En este caso, acotaremos por arriba a  $\|D\mathbf{u} - D_j\mathbf{u}_j\|_{0,p}^p$ . Para ello, buscaremos cotas para  $\|D\mathbf{u} - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p$  y para  $\|D\mathbf{r} - D_j\mathbf{u}_j\|_{0,p}^p$ .

En primer lugar estimaremos  $\|D\mathbf{u} - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p$ . Igual que antes, indicaremos por  $\mathbf{e}_r = \mathbf{u} - \mathbf{r}$  y por  $\mathbf{e}_r^I$  a una interpolada conforme de  $\mathbf{e}_r$ . Se verifica

$$\begin{aligned}
\alpha\|D\mathbf{u} - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p &\leq \langle A_j\mathbf{u} - A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r \rangle \\
&= \langle A_j\mathbf{u} - A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle + \langle A_j\mathbf{u} - A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r^I \rangle \\
&= \langle A_j\mathbf{u} - A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle + (p - p_j - q, \operatorname{div} \mathbf{e}_r^I) \\
&= \langle A_j\mathbf{u}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle - (p, \operatorname{div} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I)) + (p_j, \operatorname{div} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I)) \\
&\quad - [\langle A_j\mathbf{r}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle - (q, \operatorname{div} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I))] \\
&= (\mathbf{f}, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I) - \langle A_j\mathbf{u}_j, \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I \rangle + (p_j, \operatorname{div} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I)) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T R(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I) + \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell J_{\ell,n}(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r^I)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\operatorname{div} \mathbf{e}_r = 0$ . Utilizando la desigualdad de Hölder y los resultados de interpolación presentados en los capítulos previos tenemos

$$\begin{aligned}
\|D\mathbf{u} - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left( \|R\|_{0,p',T} h_T + \sum_{\ell \in E_T} \|J_{\ell,n}\|_{0,p',\ell} h_T^{1-\frac{1}{p}} \right) |\mathbf{e}_r|_{1,p,T} \\
&\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} h_T^{p'} \|R\|_{0,p',T}^{p'} + \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,n}\|_{0,p',T}^{p'} \right)^{\frac{1}{p}} \|D\mathbf{u} - D\mathbf{r}\|_{0,p}
\end{aligned}$$

y, entonces

$$\|D\mathbf{u} - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{1,T}^{p'} \quad (4.33)$$

Ahora estimemos  $\|D_j\mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p$ . Se verifica

$$\alpha\|D_j\mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p \leq \langle A_j\mathbf{u}_j - A_j\mathbf{r}, \mathbf{u}_j - \mathbf{r} \rangle$$

y como  $\langle A_j\mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \langle A_j\mathbf{u}_j, \mathbf{r} \rangle$  resulta

$$\begin{aligned}
\alpha\|D_j\mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p &\leq \langle A_j\mathbf{u}_j - A_j\mathbf{r}, \mathbf{u}_j \rangle \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T [\mu(\|D_j\mathbf{u}_j\|) D_j\mathbf{u}_j - \mu(\|D\mathbf{r}\|) D\mathbf{r}] : D_j\mathbf{u}_j \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T (\mathbf{curl} \boldsymbol{\psi} - q\mathbf{I}) : D_j\mathbf{u}_j \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mathbf{curl} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^I) : D_j\mathbf{u}_j - q \operatorname{div} \mathbf{u}_j
\end{aligned}$$

y usando que  $\operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0$  y que  $\mathbf{curl} \boldsymbol{\psi}$  es simétrico y entonces  $\boldsymbol{\psi}^I$  puede elegirse como una interpolada simétrica. Luego se tiene

$$\begin{aligned}
\|D_j\mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_T \mathbf{curl} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^I) : \nabla_j \mathbf{u}_j \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \int_{\partial T} \nabla \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{t} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^I) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} \int_\ell J_{\ell,t} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^I)
\end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad de Hölder y los resultados de interpolación tenemos

$$\begin{aligned}
\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} \|J_{\ell,t}\|_{0,p} \ell h_T^{\frac{1}{p}} |\boldsymbol{\psi}|_{1,p',T} \\
&\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} |\boldsymbol{\psi}|_{1,p'} \\
&\leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} (\|D_j \mathbf{u}_j - D_j \mathbf{r}\|_{0,p} + \|q\|_{0,p'})
\end{aligned}$$

y de la condición inf-sup se tiene

$$\alpha \|q\|_{0,p'} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|D\mathbf{v}\|_{0,p}} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}} \frac{\langle A_j \mathbf{u}_j - A_j \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle}{\|D\mathbf{v}\|_{0,p}} \leq C \|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}$$

y, entonces

$$\|D_j \mathbf{u}_j - D\mathbf{r}\|_{0,p}^p \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{2,T}^p \sum_{\ell \in E_T} |\ell| \|J_{\ell,t}\|_{0,p}^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (4.34)$$

Combinando (4.33) y (4.34) resulta

$$\|D\mathbf{u} - D_j \mathbf{u}_j\|_{0,p}^p \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{1,T}^{p'} + \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{2,T}^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \right)$$

y usando que (3.10) se obtiene el teorema.

#### 4.3.4 Estimador a posteriori del error que acota por arriba a $\|p - p_j\|_{0,p'}$

Notaremos por  $\epsilon = p - p_j$

**Lema 4.6** *Es válida la siguiente estimación*

$$\|\epsilon\|_{0,p'} \leq \begin{cases} C \{\eta + \|D_j \mathbf{e}\|_{0,p}\} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ C \{\eta^{p-1} + \|D_j \mathbf{e}\|_{0,p}^{p-1}\} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

**Demostración :** Como  $\epsilon \in L_0^{p'}(\Omega)$ , existe  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$  tal que,

$$\|\epsilon\|_{0,p'} \leq C \frac{\int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v}}{\|D\mathbf{v}\|_{0,p}} \quad (4.35)$$

Ahora, como  $\mathbf{v}^I \in \mathbf{M}^j \cap \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{V}^j \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  obtenemos,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) + \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^I \\
&= \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) + \int_{\Omega} [\mu(\|D_j \mathbf{u}\|) D_j \mathbf{u} - \mu(\|D_j \mathbf{u}_j\|) D_j \mathbf{u}_j] : D \mathbf{v}^I \\
&= \int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) - \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} - \mathbf{v}^I \rangle + \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle
\end{aligned}$$

luego, integrando por partes en cada elemento resulta,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \left\{ \int_T (-\nabla p + \operatorname{div} (\mu(\|D \mathbf{u}\|) D \mathbf{u})) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial T} (\mu(\|D_j \mathbf{u}_j\|) D_j \mathbf{u}_j - p_j \mathbf{I}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) \right\} + \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle \\
&= \sum_T \left\{ - \int_T \mathbf{R} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) - \frac{1}{2} \sum_{\ell \in E_T} \int_{\ell} \mathbf{J}_{\ell, n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^I) \right\} + \langle A_j \mathbf{u} - A_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v} \rangle
\end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder, (4.11) , (4.12) y la desigualdad de Korn obtenemos,

$$\int_{\Omega} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{v} \leq C \|D \mathbf{v}\|_{0,p} \begin{cases} \{\eta + \|D_j \mathbf{e}\|_{0,p}\} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ \{\eta^{p-1} + \|D_j \mathbf{e}\|_{0,p}^{p-1}\} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

lo cual junto a (4.35) prueba el lema.

Juntando los resultados anteriores para las velocidades y las presiones tenemos:

**Teorema 4.12** *Existe una constante  $C$  tal que,*

$$\begin{aligned}
\|\epsilon\|_{0,p'} + \|D_j \mathbf{e}\|_{0,p} &\leq C \eta & \text{si } 1 < p \leq 2 \\
\|\epsilon\|_{0,p'} + \|D_j \mathbf{e}\|_{0,p}^{p-1} &\leq C \eta^{p-1} & \text{si } 2 \leq p \leq \infty
\end{aligned}$$

## Referencias

- [1] **D.N. Arnold, F. Brezzi,**  
Mixed and nonconforming finite element methods implementation, postprocessing and error estimates.  
*R.A.I.R.O., Modél. Math. Anal. Numer.* **19**, 1985, pp. 7-32.
- [2] **D.N. Arnold, R.S. Falk,**  
A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate.  
*SIAM J. Numer. Anal.* **26**, 1989, pp. 1276-1290.
- [3] **G. Astarita, G. Marrucci,**  
Principles of non-Newtonian fluid mechanics,  
*Mac Graw Hill*(1974).
- [4] **I. Babuska, A.K. Aziz,**  
Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method,  
*The Mathematical Foundations of the Finite Element Method whit applications to Partial Diferential Equations*A.K. Aziz ed. *Academic Press*,1972.
- [5] **I. Babuška, R. Durán, R. Rodríguez,**  
Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements,  
*SIAM J. Numer. Anal.*, **29**, 1992, pp. 947-964.
- [6] **I. Babuška, R.B. Kellogg, J. Pitkaranta,**  
Direct and Inverse Error Estimates for Finite Elements with Mesh Refinements,  
*Numer Math.* **33**, 1979, pp 447-471.
- [7] **I. Babuška, A. Miller,**  
A feedback finite element method with a posteriori error estimation. Part I: The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator.  
*Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **61**, 1987, pp. 1-40.
- [8] **I. Babuška, W.C. Rheinboldt,**  
A posteriori error estimators in the finite element method.  
*Inter. J. Numer. Meth. Eng.* **12**, 1978, pp. 1587-1615.
- [9] **R.E. Bank, A. Weiser,**  
Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations.  
*Math. Comp.* **44**, 1985, pp. 283-301.
- [10] **R.E. Bank, B. Welfert,**  
A posteriori error estimates for the Stokes equations: a comparison.  
*Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **82**, 1990, pp. 323-340.
- [11] **R.E. Bank, B. Welfert,**  
A posteriori error estimates for the Stokes problem.  
*SIAM J. Numer. Anal.* **28**, 1991, pp. 591-623.

- [12] **J. Baranger, H. El Amri**,  
Estimateurs a posteriori d'erreur pour le calcul adaptatif d'écoulements quasi-Newtoniens,  
*Math. Mod. and Numer. Anal.***25** (1991), pp 31-48.
- [13] **J. Baranger, K. Najib**,  
Analyse numerique des ecoulements quasi-Newtoniens dont la viscosite obeit a la loi puis-  
sance ou la loi de carreau  
*Numer. Math.***58** (1990), pp 35-49.
- [14] **C. Bernardi**,  
Optimal finite element interpolation on curved domains,  
*SIAM J. Numer. Anal.* **26**, 1989, pp. 1212-1240
- [15] **B. Bojarski, T. Iwaniec**,  
Analytic foundations of quasiconformal mappings,  
*Preprint 617 of the SFB 72, University of Bonn* (1983).
- [16] **J.H. Bramble, M. Zlámal**,  
Triangular elements in the finite element method,  
*Math. Comp.* **24**, 1970, pp. 809-820.
- [17] **S.S. Chow**,  
Finite element error estimates for non-linear elliptic equations of monotone type,  
*Numer. Math.***54** (1989), pp 373-393.
- [18] **P.G. Ciarlet**,  
The finite element method for elliptic problems,  
*North Holland* , 1978.
- [19] **P. Clément**,  
Approximation by finite element function using local regularization,  
*RAIRO R-2*, 1975, pp. 77-84.
- [20] **M. Crouzeix and P.-A. Raviart**,  
Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes  
equations.  
*R.A.I.R.O., Anal. Numér.* **7 R-3**, 1973, pp. 33-76.
- [21] **E. Dari, R. Durán, C. Padra, V.Vampa**,  
A posteriori error estimators for nonconforming finite element methods,  
*a ser publicado en Mathematical Modelling and Numerical Analysis*
- [22] **R. Durán, M.A. Muschietti, R.Rodríguez**,  
On the asymptotic exactness of error estimators for linear triangular elements,  
*Numer. Math.* **59**, 1991, pp. 107-127
- [23] **G. Duvaut, J.L. Lions**,  
Les Inéquations en Mécanique et en Physique  
*Dunod. Paris*,1972

- [24] **R. Falk**,  
Nonconforming finite elements methods for the equations of linear elasticity  
*Math. Comp.* **57**, 1991 , pp. 529-550.
- [25] **M. Fortin and M. Soulie**,  
A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles.  
*Inter. J. Numer. Meth. Eng.* **19**, 1983, pp. 505-520.
- [26] **D. Gilbarg, N.S. Trudinger**,  
Elliptic partial differential equations of second order,  
*Springer-Verlag, Berlin*, 1983
- [27] **V. Girault and P.-A. Raviart**,  
Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.  
*Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*. 1986.
- [28] **R. Glowinski, A. Marroco**,  
Sur l'approximation, par elements finis d'ordre un, et la resolution, par penalization-dualite,  
d'une classe de problemes de Dirichlet non lineaires,  
*R.A.I.R.O.R2* (1975), pp 41-76.
- [29] **D.F. Griffiths, A.R. Mitchell**,  
Nonconforming elements, The mathematical basis of finite element methods,  
*D.F. Griffiths, ed., Clarendon Press, Oxford*, 1984, pp. 41-69.
- [30] **P. Grisvard**,  
Elliptic problems in nonsmooth domains,  
*Pitman, Boston*, 1985
- [31] **C. Johnson, P. Hansbo**,  
Adaptive finite element methods in computational mechanics,  
*Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* **101**, 1992, pp 143-181
- [32] **V. A. Kondrat'ev**,  
Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points.  
*Trans. Moscow Math. Soc.* **16**, 1967, pp 227-313.
- [33] **L.D. Marini**,  
An inexpensive method for the evaluation of the solution of the lowest order Raviart-Thomas  
mixed method,  
*SIAM J. Numer. Anal.* **22**, 1985, pp. 493-496.
- [34] **N.G. Meyers**,  
An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations,  
*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Serie III Vol. 22, Fasc. III*, 1963, pp.  
189-206.
- [35] **J. Nečas**,  
Les méthodes directes en Théorie des équations elliptiques  
*Masson et Cie, Paris*, 1967.

- [36] **R. Nochetto**, Pointwise a posteriori error estimates for elliptic problems on highly graded meshes, *a ser publicado*
- [37] **A.K. Noor, I. Babuška**,  
Quality assesment and control of finite element solutions.  
*Fun. Elem. in Anal. & Design.* **3**, 1987, pp. 1-26.
- [38] **M.C. Pelissier**,  
Sur quelques problèmes non-linéaires en glaciologie,  
*Thèse, Publications Mathematiques d'Orsay N 110* (1975).
- [39] **M.C. Rivara**,  
Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices,  
*SIAM J. Numer. Anal.* **21**, 1984, pp. 604-613.
- [40] **R.T. Rocafellar**,  
Convex analysis,  
*Princeton, NY:Princeton University Press*, 1970.
- [41] **L.R. Scott, S. Zhang**,  
Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions,  
*Technical Report 99*, 1989.
- [42] **J. Simon** ,  
Regularité de la solution d'une équation non linéaire dans  $\mathfrak{R}^n$ ,  
*P. Grisvard, W Wendland and J. R. Whiteman eds., Lectures Notes in Math. 1121*, Springer-Verlag, Berlin (1978) pp. 205-227.
- [43] **R. Stenberg and D. Baroudi**,  
A new nonconforming finite element method for incompressible elasticity.  
*To appear in Proceedings of the IVth Finnish Mechanics Days*. Lappeenranta, June 5-6, 1991.
- [44] **G. Strang**,  
Variational crimes in the finite element method,  
*The Mathematical Foundations of the Finite Element Method*  
A.K. Aziz, editor, pp 689-710. Academic Press, 1972.
- [45] **G. Strang**,  
Approximation in the finite element method,  
*Numer. Math.* **19**, 1972, pp. 81-98.
- [46] **R. Temam**,  
Navier Stokes equations,  
*North Holland* , 1978.
- [47] **R. Verfürth**,  
A posteriori error estimators for the Stokes equations,  
*Numer. Math.* **55**, 1989, pp. 309-325.

- [48] **M. Zlamal**,  
On the finite element method,  
*Numer. Math.* **12**, 1968, pp. 394-409
- [49] **F. Brezzi**,  
On the existence uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers,  
*RAIRO*, R2 **8**, 1974, pp 129-151.
- [50] **W.C. Rheinboldt**,  
Feedback systems and adaptivity for numerical computations,  
*Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, editado por Babuška, Chandra, Flaherty , 1983, SIAM, Philadelphia, pp 3-19