

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

**Estimaciones de Error para aproximaciones obtenidas
usando cuadrados mínimos con peso variable**

Autor

María Gabriela Armentano

Director

Dr. Ricardo G. Durán

Tesis presentada para optar por el Título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

2000

Resumen

El objetivo de esta tesis es obtener estimaciones de error en \mathbb{R}^N para aproximaciones obtenidas usando cuadrados mínimos con peso variable. Probaremos que, bajo hipótesis apropiadas sobre la función de peso y la distribución de puntos, se tienen estimaciones de error de orden óptimo en L^∞ y L^2 para la aproximación de la función y sus derivadas. Estas estimaciones son importantes en el análisis de aproximaciones de Galerkin basadas en cuadrados mínimos con peso variable. En particular, los resultados proveen estimaciones de error, óptimas en orden y regularidad, para problemas coercivos de segundo orden. También, nuestras estimaciones de error proveen la consistencia de los esquemas que resultan cuando el método es usado para generar fórmulas de diferencias finitas o colocación a partir de un conjunto arbitrario de puntos. Además, se introduce el método de cuadrados mínimos continuos y se obtienen también estimaciones de error de orden óptimo para este método. Finalmente, como ejemplo de aplicación de estos métodos se considera la ecuación de convección-difusión y se propone una manera de introducir up-wind mediante el uso de una función de peso no simétrica. Se presentan varios ejemplos numéricos que muestran el buen comportamiento del método.

Palabras claves. estimaciones de error, cuadrados mínimos con peso variable, métodos sin malla, aproximaciones de Galerkin.

Abstract

The aim of this thesis is to obtain error estimates for moving least square approximations in \mathbb{R}^N . We prove that, under appropriate hypotheses on the weight function and the distribution of points, the method produces optimal order error estimates in L^∞ and L^2 for the approximations of the function and its derivatives. These estimates are important in the analysis of Galerkin approximations based on the moving least square method. In particular, the results provides error estimates, optimal in order and regularity, for second order coercive problems. Also, our estimates allows to control the consistency error of finite difference or collocation methods obtained from an arbitrary set of points by the moving least square method. Moreover, we introduce the continuous moving least square method and obtain the error estimates for this method too. Finally, as an application of these methods we consider a convection-diffusion equation and propose a way of introducing up-wind by means of a non-symmetric weight function. We present several numerical results showing the good behavior of the method.

Key words. error estimates, moving least square, meshless method, Galerkin approximations.

*A mi esposo Sergio y a mis hijos
Santiago, Gonzalo y Mercedes*

Agradecimientos

Quisiera agradecer a todos aquellos que de una u otra manera han colaborado para que esta tesis haya sido posible:

Al Dr. Ricardo G. Durán, a quien admiro por sus conocimientos y capacidad, le agradezco por haber confiado en mí. Gracias, por las muchas horas de trabajo en común, por el buen ánimo que ha tenido siempre para escucharme, por la dedicación y empeño con la que asumió mi dirección, por lo que he aprendido trabajando con él y por la amistad que me ha brindado a lo largo de estos años.

A Gabriela Savioli, mi amiga, por haber estado siempre alentándome cuando las fuerzas me faltaban.

A mis padres, María Esther y Ricardo, y a mis suegros, Gerardo (Apo) y Amelia, por haber estado junto a mí brindándome su apoyo y cariño.

A Gabriel Acosta, con quien he trabajado en múltiples ocasiones, por su colaboración y amistad.

A Noemí Wolanski, Javier Etcheverry, Juan Pablo Borgna, y a todos aquellos que me han apoyado.

A Liliana Gysin por su buena predisposición a mis consultas.

Índice General

0.1	Introducción	5
0.1.1	Las principales características del método y los resultados existentes	5
0.1.2	Descripción general del contenido de esta tesis	6
1	El Método de Cuadrados Mínimos con Peso Variable	8
1.1	Descripción del método	8
1.2	La aplicación de MLS para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales	11
1.2.1	Aproximaciones de Galerkin	11
1.2.2	Método de Colocación	13
1.2.3	Fórmulas de diferencias finitas usando MLS	14
2	Estimaciones de Error en L^∞ - El caso unidimensional	16
2.1	Estimaciones de error para la aproximación de la función	16
2.2	Estimaciones de error para la aproximación de las derivadas	18
3	Estimaciones de Error en Espacios de Sobolev - El caso N-dimensional	26
3.1	Estimaciones de Error en L^∞ y $W^{1,\infty}$	27
3.2	Estimaciones de Error en L^2 y H^1	33
3.3	Cotas de las bases de Lagrange	38
4	El método de cuadrados mínimos continuos con peso variable	45
4.1	Descripción del método	45
4.2	Estimaciones de error	46
4.3	La aplicación de CMLS a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales	56

5 Experimentos Numéricos	58
5.1 El caso unidimensional	58
5.1.1 Aplicaciones del método MLS	58
5.1.2 Ejemplo de aplicación de CMLS	61
5.2 El caso bidimensional	71

0.1 Introducción

0.1.1 Las principales características del método y los resultados existentes

Dada una ecuación diferencial es sabido que no siempre es posible hallar la solución analítica y se necesita entonces recurrir a algún método para obtener una aproximación a dicha solución. El método de elementos finitos así como los métodos de diferencias finitas son algunos de los más empleados existiendo para ellos una basta teoría. Desde hace algunos años una nueva clase de métodos, que se han dado en llamar ‘métodos sin malla’, han cobrado interés y existen numerosos trabajos referentes a la aplicación de este tipo de métodos a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ([4],[5],[6],[11],[13], [16],[24],[27],[28],[29],[33]). Dentro de estos métodos se destaca el método de cuadrados mínimos con peso variable. Este método fue introducido por Shepard [32], como método de aproximación, en el caso de menor orden y luego fue generalizado para mayor orden por Lancaster y Salkauskas [21]. El objeto principal de estos trabajos era proveer una alternativa a la interpolación clásica que resultara útil para aproximar una función a partir de su valor en ciertos puntos dados, distribuidos irregularmente, usando cuadrados mínimos pesados con la variante de que los pesos dependan del punto donde se desea realizar la aproximación. Más recientemente, el método de cuadrados mínimos con peso variable comenzó a utilizarse como método para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Entre las principales características del método que despertaron este interés se destacan:

- No se requiere la construcción de una “malla” para su aplicación y por ello este método cae dentro de los llamados “métodos sin malla”.
- Es sencillo construir aproximaciones tan regulares como se desee (este aspecto es importante si se desean resolver ecuaciones de alto orden).
- La posibilidad de incorporar a priori, a través por ejemplo de la elección apropiada de la función de peso, los conocimientos que se tengan sobre el comportamiento de la solución de la ecuación diferencial.

Existen diversos trabajos, especialmente en el ámbito ingenieril, referentes a la aplicación del método a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ([5], [6], [11],[13], [16], [27], [28], [29], [33]) sin embargo, la convergencia del método no había sido demostrada y en particular, no se contaba con una teoría que provea estimaciones del error cometido al aproximar la solución de la ecuación diferencial por la obtenida empleando el método de cuadrados mínimos con peso variable. Para llevar a cabo estas estimaciones era fundamental analizar el orden de la aproximación no sólo para la función sino también para sus derivadas.

En un trabajo reciente Levin [22] analiza una variante del método de cuadrados mínimos con peso variable para una función de peso en particular (cabe señalar que la función de peso por él considerada no es de soporte compacto como es usual en la aplicación del método para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ([5], [6], [11], [27], [33])). En este trabajo obtiene estimaciones de error en norma uniforme para la aproximación de una función regular en N dimensiones. Sin embargo, no obtiene estimaciones de error para las derivadas. Era entonces un tema no resuelto obtener esta clase de estimaciones. Teniendo en cuenta además que en general las soluciones de ecuaciones diferenciales no suelen ser regulares era importante contar con estimaciones de error en norma L^2 con menos requerimientos de regularidad de la función que los que se emplean para obtener estimaciones de error en norma uniforme. La necesidad de obtener este tipo

de estimaciones a fin de establecer la convergencia del método cuando es aplicado a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales son las que motivaron la presente tesis. Cabe mencionar que los resultados obtenidos para el caso unidimensional y luego para el caso N -dimensional se presentan en los trabajos [1] y [2] respectivamente.

Inspirados en este método estudiamos además un nuevo método de aproximación el cual hemos dado en llamar Cuadrados mínimos continuos con peso variable. Para este método obtenemos estimaciones de error tanto en norma uniforme como en norma L^2 de la aproximación de la función y sus derivadas y explicamos como podría implementarse para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Es importante notar que este método posee las mismas tres características que mencionamos anteriormente para el método de cuadrados mínimos con peso variable.

0.1.2 Descripción general del contenido de esta tesis

Los resultados obtenidos, que han dado lugar a la presente tesis, son presentados de la siguiente manera:

El Capítulo 1 comienza describiendo el método de cuadrados mínimos con peso variable como método para la aproximación de funciones y sus características más sobresalientes. La sección 1.2 está dedicada a explorar las distintas alternativas de la aplicación del método a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Una de las posibles aplicaciones es la de generar Aproximaciones de Galerkin, usando funciones base que se construyen por el método de cuadrados mínimos con pesos variable, como se describe en la sección 1.2.1. Pero existen además otras alternativas interesantes como es la posibilidad de utilizar las aproximaciones obtenidas por el método propuesto en el Método de Colocación, como se describe en la sección 1.2.2, así como, utilizarlo para generar fórmulas de diferencias finitas para aproximar la función y sus derivadas como se explica en la sección 1.2.3.

En el Capítulo 2 abordamos el problema de obtener estimaciones de error para la aproximación de la función y sus derivadas en el caso unidimensional. Este caso es analizado aparte ya que se cuenta con propiedades de la aproximación que no se conocen hasta el momento para el caso general. Además está claro que en este caso el concepto de malla no adquiere especial significado lo que conduce a que el análisis sea esencialmente más simple que para el caso N -dimensional. Comenzamos presentando las estimaciones de error para la aproximación de la función en la sección 2.1, estas estimaciones se derivan de resultados conocidos en teoría de aproximación. La sección 2.2 está dedicada a obtener estimaciones de error para las dos primeras derivadas en norma L^∞ . Es importante notar que no se contaba hasta el momento con estimaciones de este tipo siendo entonces este uno de los aportes originales de esta tesis. Una de las ideas fundamentales que posibilitaron tales estimaciones es haber explotado la propiedad de ortogonalidad que satisface la aproximación que resulta de cuadrados mínimos. Si bien se presentan las estimaciones de error sólo para las dos primeras derivadas las mismas ideas pueden utilizarse para obtener estimaciones para las derivadas de orden mayor.

En el Capítulo 3 estudiamos el caso N -dimensional. Este caso presenta la dificultad de establecer condiciones sobre la distribución de los puntos dados de manera de garantizar la existencia del aproximante y obtener estimaciones del error de aproximación pero permitiendo que los puntos estén distribuidos irregularmente, por ende comenzamos presentando las propiedades que supon-

dremos sobre la función de peso y la distribución de los puntos. En la sección 3.1 presentamos las estimaciones de error para la aproximación de la función y sus derivadas en L^∞ , estas estimaciones se realizan generalizando las ideas usadas para el caso unidimensional. Uno de nuestros principales intereses era obtener estimaciones en L^2 con menos requerimientos de regularidad de la función que los que se supusieron para obtener estimaciones en L^∞ . En este aspecto no existía ningún resultado sobre el error en la aproximación de la función ni de sus derivadas, por ende las estimaciones de error que obtenemos en la sección 3.2, óptimas en orden y regularidad, conforman otro de los resultados relevantes de esta tesis. En resumen, las estimaciones de error que se presentan en los Capítulos 2 y 3 garantizan la convergencia del método cuando es aplicado como método de Galerkin para problemas coercivos de segundo orden, así como la consistencia de los esquemas resultantes cuando es usado para generar esquemas de diferencias como se explica en el Capítulo 1.

El Capítulo 4, el cual constituye otro de los aportes originales de esta tesis, está dedicado al análisis de un nuevo método de aproximación, por nosotros llamado cuadrados mínimos continuos con peso variable, en el cual, a diferencia del método de cuadrados mínimos con peso variable analizado previamente, el aproximante se construye minimizando un promedio de los errores en lugar de considerar sólo el valor en ciertos puntos. En la sección 4.2 presentamos las estimaciones de error en L^∞ y en L^2 para la aproximación de la función y sus primeras derivadas y en la sección 4.3 explicamos como el método puede ser empleado para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales.

El último Capítulo de esta tesis está dedicado a presentar experimentos numéricos sobre la aplicación de los métodos propuestos para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Entre las características sobresalientes de estos métodos, que mencionamos previamente, se destaca la posibilidad de incorporar, a priori, el conocimiento que se tenga sobre el comportamiento de la solución de la ecuación y es sobre el aprovechamiento de esta cualidad en la que se concentran los ejemplos. Los experimentos numéricos se refieren entonces a la aplicación del método a la resolución numérica de la ecuación de convección-difusión. En la sección 5.1 consideramos el caso unidimensional, es sabido que si la convección domina es necesario trabajar con mallas muy finas, si se emplea el método de elementos finitos usual o en su defecto emplear elementos finitos no centrados o bien fórmulas de diferencias finitas con up-wind a fin de evitar la presencia de oscilaciones ([25], [31]). Los métodos propuestos, en esta tesis, se emplean utilizando una función de peso que tenga en cuenta la asimetría del problema y a lo largo de esta sección se presentan ejemplos de las distintas alternativas de aplicación de los métodos y se comparan con las obtenidas si se emplean los métodos usuales. La sección 5.2 está dedicada a la aplicación del método de cuadrados mínimos con peso variable a la ecuación de convección-difusión en dos dimensiones. Se plantea como generalizar el concepto unidimensional de ‘up-wind’ proponiendo una función de peso conveniente y se presentan gráficos comparativos de la solución obtenida por este método y diferencias finitas.

Capítulo 1

El Método de Cuadrados Mínimos con Peso Variable

En este capítulo describiremos el método de cuadrados mínimos con peso variable y las distintas variantes de su aplicación para obtener aproximaciones a la solución de ecuaciones diferenciales.

1.1 Descripción del método

El método de cuadrados mínimos usual ([12],[18],[20]) trata el problema de aproximar una función $u(x)$ a partir de su valor en ciertos puntos $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ pertenecientes a algún conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Para llevar a cabo la aproximación se elige un conjunto de s funciones linealmente independientes (usualmente polinomios) g_1, \dots, g_s con $s \ll n$ y se busca una aproximación a $u(x)$ de la forma

$$\hat{u}(x) = \sum_{k=1}^s \alpha_k g_k(x)$$

donde los coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ son elegidos de manera que mimimicen la expresión

$$J(\alpha) = \sum_{i=1}^n w_i \left(u_i - \sum_{k=1}^s g_k(\xi_i) \alpha_k \right)^2$$

con w_i constantes no negativas dadas (pesos) y $u_i = u(\xi_i)$, $1 \leq i \leq n$.

En el método de cuadrados mínimos con peso variable, a diferencia del método de cuadrados mínimos usual, se consideran pesos que sean funciones de x , i.e, $w_i = w_i(x)$ $1 \leq i \leq n$ y por lo tanto, para cada x , los coeficientes $\alpha_1(x), \dots, \alpha_s(x)$ son elegidos de manera que minimicen

$$J(\alpha) = \sum_{i=1}^n w_i(x) \left(u_i - \sum_{k=1}^s g_k(\xi_i) \alpha_k(x) \right)^2 \quad (1.1.1)$$

y en consecuencia la aproximación está dada por

$$\hat{u}(x) = \sum_{k=1}^s \alpha_k(x) g_k(x) \quad (1.1.2)$$

Observación 1.1.1 Si se utiliza una sola función $g_1(x) \equiv 1$ se tiene el método de Shepard [32], y el aproximante $\hat{u}(x)$ esta dado entonces por:

$$\hat{u}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(x) u_i}{\sum_{j=1}^n w_j(x)}$$

En consecuencia, para cada x , $\hat{u}(x)$ resulta ser en este caso un promedio pesado de los valores de u en los puntos $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. La aproximación definida en (1.1.2) con $s > 1$ es entonces una generalización del método de Shepard la cual fue introducida por Lancaster y Salkauskas [21].

Es claro que las funciones de peso en (1.1.1) pueden elegirse para producir efectos convenientes. Si la función de peso w_i se concentra próxima a ξ_i y se aproxima a cero cuando x se aleja de ξ_i , los puntos lejanos a x tendrán poca influencia al considerar $\hat{u}(x)$. Esto se tiene, por ejemplo, si se toman funciones de peso que sean de la forma $w_i(x) = \Phi(x - \xi_i)$ con Φ alguna función no negativa con soporte en un entorno de x . Este es el tipo de funciones de peso que vamos a considerar, como es usual cuando el método de cuadrados mínimos con peso variable se utiliza para construir aproximaciones a la solución de ecuaciones diferenciales ([5], [6], [11], [27], [33]).

El método de cuadrados mínimos con peso variable que consideraremos en esta tesis, el cual llamaremos en adelante MLS, puede describirse de la siguiente manera:

Dado $R > 0$ sea $0 \leq \Phi_R \leq 1$ una función con soporte en $\overline{B_R(0)} = \{z/\|z\| \leq R\}$ y sea $\mathcal{X}_R = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ un conjunto de $n = n(R)$ puntos en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un conjunto abierto acotado y con borde Lipschitz. Sean $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ los valores de la función u en los puntos pertenecientes a \mathcal{X}_R , i.e, $u_j = u(\xi_j)$, $1 \leq j \leq n$. Vamos a denotar por \mathcal{P}_m el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a m , sea $s = \dim \mathcal{P}_m$ y $\{p_1, \dots, p_s\}$ una base de \mathcal{P}_m .

Para cada $x \in \Omega$ consideramos $P^*(x, y) = \sum_{k=1}^s p_k(y) \alpha_k(x)$, donde los coeficientes $\alpha_k(x)$, $1 \leq k \leq s$, son elegidos tal que

$$J_x(\alpha) = \sum_{j=1}^n \Phi_R(x - \xi_j) \left(u_j - \sum_{k=1}^s p_k(\xi_j) \alpha_k(x) \right)^2$$

sea mínimo.

Definimos entonces una aproximación a $u(x)$ como

$$\hat{u}(x) = P^*(x, x) = \sum_{k=1}^s p_k(x) \alpha_k(x) \quad (1.1.3)$$

Para que el aproximante este bien definido cualquiera sea $x \in \Omega$ debemos garantizar que el problema de minimización tenga solución única. A tal fin consideramos la siguiente propiedad sobre la función de peso Φ_R y los puntos pertenecientes a \mathcal{X}_R :

Propiedad \mathcal{L} : Para cada $x \in \Omega$, existe un subconjunto de s puntos $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_s}$ pertenecientes a $\mathcal{X}_{\mathcal{R}}$ donde la interpolación de Lagrange es posible (es decir, existe un único polinomio P_I de grado menor o igual que m tal que $P_I(\xi_{i_j}) = u(\xi_{i_j})$ para $1 \leq j \leq s$) y tal que $\Phi_{\mathcal{R}}(x - \xi_{i_j}) > 0$ para aquellos puntos ξ_{i_j} , $1 \leq j \leq s$.

Si $\Phi_{\mathcal{R}}$ satisface la Propiedad \mathcal{L} podemos definir para cada $x \in \Omega$

$$\langle f, g \rangle_x = \sum_{j=1}^n \Phi_{\mathcal{R}}(x - \xi_j) f(\xi_j) g(\xi_j) \quad (1.1.4)$$

que resulta ser un producto interno sobre \mathcal{P}_m y la correspondiente norma asociada es entonces $\|f\|_x^2 = \langle f, f \rangle_x$.

Observemos que si notamos $\mathbf{f} = (f(\xi_1), \dots, f(\xi_n))^t$ el producto interno (1.1.4) puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera

$$\langle f, g \rangle_x = \mathbf{f}^t \mathbf{W}(x) \mathbf{g}$$

donde $\mathbf{W}(x)$ es la matriz diagonal de $n \times n$, $\mathbf{W}(x) = \text{diag}(\Phi_{\mathcal{R}}(x - \xi_1), \dots, \Phi_{\mathcal{R}}(x - \xi_n))$ con elementos no-negativos. Sabemos que para cada $x \in \Omega$ la mejor aproximación $P^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}_m$ satisface la relación de ortogonalidad

$$\langle u - P^*(x, \cdot), p_l \rangle_x = 0 \quad \forall 1 \leq l \leq s$$

dado que $P^*(x, \cdot)$ es la proyección ortogonal de u sobre \mathcal{P}_m bajo el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ ([12],[18].[20]). Por lo tanto los coeficientes $\alpha_k(x)$, $1 \leq k \leq s$ satisfacen las correspondientes ecuaciones normales

$$\sum_{k=1}^s \alpha_k(x) \langle p_k, p_l \rangle_x = \langle u, p_l \rangle_x \quad 1 \leq l \leq s$$

Si notamos $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_s(x))^t$ las ecuaciones normales pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{P}\mathbf{W}(x)\mathbf{P}^t \alpha = \mathbf{P}\mathbf{W}(x)\mathbf{u} \quad (1.1.5)$$

donde \mathbf{P} es una matriz de $s \times n$ cuya j -ésima fila es $\mathbf{p}_j = (p_j(\xi_1), \dots, p_j(\xi_n))$ y $\mathbf{u} = (u(\xi_1), \dots, u(\xi_n))^t$.

Observación 1.1.2 *Notemos que la independencia de los vectores \mathbf{p}_j , lo cual se sigue inmediatamente de la independencia de $\{p_j\}_{1 \leq j \leq s}$, junto con el hecho de que $\Phi_{\mathcal{R}}$ satisface la Propiedad \mathcal{L} implican que $\mathbf{P}\mathbf{W}(x)\mathbf{P}^t$ es definida positiva. Luego los coeficientes $\alpha_k(x)$, $1 \leq k \leq s$ son determinados unívocamente y $P^*(x, \cdot)$ está bien definido.*

De resultados clásicos en teoría de aproximación por cuadrados mínimos (ver por ejemplo [18]) tenemos entonces que:

Teorema 1.1.1 *Si la función de peso $\Phi_{\mathcal{R}}$ satisface la Propiedad \mathcal{L} . Entonces, para cualquier $x \in \Omega$ existe un único $P^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}_m$ para el cual $\|u - P^*(x, \cdot)\|_x \leq \|u - P\|_x \quad \forall P \in \mathcal{P}_m$.*

Observación 1.1.3 A partir de las ecuaciones normales (1.1.5) $P^*(x, x)$ puede ser escrito de la siguiente manera

$$P^*(x, x) = \sum_{j=1}^n \beta_j(x) u_j \quad (1.1.6)$$

con $\beta_j(x) = \sum_{k=1}^s ((PW(x)P^t)^{-1} \mathbf{c}^j)_k p_k(x) = (p_1(x) \cdots p_s(x))(PW(x)P^t)^{-1} \mathbf{c}^j$ donde \mathbf{c}^j es la j -ésima columna de $PW(x)$, $1 \leq j \leq s$

Observación 1.1.4 Para ver la regularidad de P^* basta notar que si $\Phi_R \in C^k(\mathbb{R}^N)$ luego $P^* \in C^k(\Omega)$, lo cual se sigue inmediatamente desde la inversibilidad de $PW(x)P^t$ y (1.1.3) (ver sección 2 en [21]). En conclusión las funciones base β_j definidas en (1.1.6) son funciones con soporte en $\overline{B_R(\xi_j)}$ y tienen la misma regularidad que la función de peso Φ_R .

Observación 1.1.5 Es sencillo ver que si $u \in \mathcal{P}_k$ con $k \leq m$, luego $\hat{u} = u$. En particular $\{\beta_j\}_{1 \leq j \leq n}$ son una partición de la unidad, i.e., $\sum_{j=1}^n \beta_j(x) = 1, \forall x \in \Omega$.

1.2 La aplicación de MLS para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales

En esta sección presentaremos distintas alternativas de la aplicación de MLS para obtener aproximaciones a la solución de ecuaciones diferenciales. En la subsección 1.2.1 explicaremos como obtener aproximaciones de Galerkin usando MLS. En la subsección 1.2.2 nos ocuparemos del uso de MLS como Método de Colocación y por último en la subsección 1.2.3 describiremos como generar fórmulas de diferencias finitas usando MLS.

1.2.1 Aproximaciones de Galerkin

Supongamos que deseamos resolver una ecuación diferencial la cual puede expresarse en su forma variacional de la siguiente manera:

Hallar $u \in V \subset H$, donde H es un espacio de Hilbert dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad (1.2.7)$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, continua (o sea existe C tal que $|a(v, w)| \leq C \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V$), y coerciva en V (existe una constante $\gamma > 0$ tal que $a(v, v) \geq \gamma \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$), y L es un operador lineal y continuo en V (i.e., existe una constante $\lambda > 0$ tal que $|L(v)| \leq \lambda \|v\|_V \quad \forall v \in V$).

El método de Galerkin consiste en obtener una solución aproximada al problema variacional (1.2.7) resolviendo un problema en dimensión finita de la siguiente manera:

Hallar $u_h \in V_h$, donde V_h es un subespacio de V de dimensión finita, tal que

$$a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_h \quad (1.2.8)$$

Por el Teorema de Lax-Milgram ([7], [10]) sabemos que tanto el problema (1.2.7) como el problema (1.2.8) tiene solución única. Además por el Lema de Cea ([7], [10]) sabemos que:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\gamma} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \quad (1.2.9)$$

donde C y γ son las constantes de continuidad y coercividad de la forma bilineal a .

Observación 1.2.1 *Si la forma bilineal no resulta coerciva, pero satisface la llamada condición inf-sup, i.e.,*

$\exists \alpha > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u\|_V \quad \forall u \in V \quad (1.2.10)$$

y

$$\sup_{u \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V} \geq \alpha \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (1.2.11)$$

se tienen también resultados de existencia y unicidad para el problema (1.2.7) (ver por ejemplo [8]) Para tener aproximaciones de Galerkin bien definidas asumimos que a satisface la cond inf-sup en V_h , i.e., existe $\gamma > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V_h} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \gamma \|u\|_V \quad \forall u \in V_h \quad (1.2.12)$$

Bajo estas suposiciones tenemos entonces una generalización del Lema de Cea dado por Babuska [3]:

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{C}{\gamma}\right) \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \quad (1.2.13)$$

Observación 1.2.2 *Notemos que la condición (1.2.10) (y análogamente (1.2.11)) pueden escribirse como*

$$\inf_{u \in V} \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V \|v\|_V} > 0$$

y de ahí su nombre.

En el método de elementos finitos usual se consideran cierto tipos de elementos, por ejemplo triángulos si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y se toma como V_h el espacio de funciones de V que restringidas a cada triángulo son polinomios de cierto grado (la elección de V_h esta ligada al espacio V en cada caso). Para este tipo de métodos existe una teoría muy completa ([7],[10]) y se tienen estimaciones del error $u - u_h$ en términos del tamaño de la malla, en este caso el subíndice h se asocia con el mayor diámetro de los elementos de la triangulación.

El método de cuadrados mínimos con peso variable MLS puede ser utilizado para construir aproximaciones de Galerkin de la siguiente manera:

Sea $V_R = \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, donde β_j , $1 \leq j \leq n$ son las funciones base definidas en (1.1.6), el problema es entonces hallar $u_R \in V_R$ de la forma

$$u_R(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j(x) u_j^R$$

donde u_1^R, \dots, u_n^R son solución del sistema

$$\sum_{j=1}^n a(\beta_j, \beta_k) u_j^R = L(\beta_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

Observación 1.2.3 Como las funciones base β_j tienen la misma regularidad que Φ_R (ver Observación 1.1.4) es sencillo construir espacios V_R adecuados para cada problema.

Para ver como es la aproximación es fundamental tener entonces estimaciones del error $u - u_R$ en términos de R el cual juega el mismo papel que h en el método de elementos finitos (aunque cabe destacar que para la aplicación de MLS no se necesita tener una malla o triangulación en el sentido usual). Notemos que a partir de (1.2.9) o (1.2.13) se tiene que

$$\|u - u_R\|_V \leq C \|u - v\|_V \quad \forall v \in V_R$$

Como la estimación se tiene cualquiera sea $v \in V_R$ podemos considerar $v = \hat{u} \in V_R$ definido en (1.1.6). Las estimaciones deseadas para $u - u_R$ se tendrán entonces a partir de las estimaciones de error para $u - \hat{u}$, las cuales serán presentadas en los Capítulos 2 y 3.

1.2.2 Método de Colocación

Otra aplicación de MLS para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales es el Método de Colocación el cual puede describirse de la siguiente manera:

Dada una ecuación diferencial

$$Lu = f \quad \text{en } \Omega$$

con condiciones de borde

$$Bu = g \quad \text{en } \partial\Omega$$

con L y B operadores lineales, nos proponemos encontrar una aproximación a u de la forma $u_R = \sum_{j=1}^n \beta_j a_j$ con β_j como en (1.1.6).

Por lo mencionado en la Observación 1.1.4 las funciones base β_j pueden construirse suficientemente regulares si se eligen funciones de peso convenientes. El método de colocación consiste en imponerle a u_R que satisfaga la ecuación diferencial y las condiciones de borde, en ciertos puntos $\{z_1, \dots, z_n\} \in \bar{\Omega}$, i.e.,

$$\begin{aligned} Lu_R|_{x=z_i} &= f(z_i) \quad z_i \in \Omega \\ Bu_R|_{x=z_i} &= g(z_i) \quad z_i \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Arribando de esta manera a un sistema de n ecuaciones con n incógnitas a_1, \dots, a_n .

$$L_R a = F_R$$

donde L_R es una matriz de $n \times n$ tal que $(L_R)_{ij} = L(\beta_j(x))|_{x=z_i}$ si $z_i \in \Omega$ y $(L_R)_{ij} = B(\beta_j(x))|_{x=z_i}$ si $z_i \in \partial\Omega$ y F_R es un vector con componentes $f(z_i)$ o $g(z_i)$ según $z_i \in \Omega$ o $z_i \in \partial\Omega$.

La convergencia de este tipo de métodos se establece a partir de la estabilidad y la consistencia del esquema resultante [31]. A pesar que MLS como método de Colocación fue utilizado en varios trabajos ([11], [27], [33]) ninguno de estos presenta resultados de este tipo. Si bien la estabilidad debe analizarse en cada caso en particular, las estimaciones de error que presentaremos en el Capítulo 2 (caso unidimensional) y en el Capítulo 3 (caso N-dimensional) pueden emplearse para establecer la consistencia de los esquemas resultantes al utilizar MLS como método de colocación para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden.

1.2.3 Fórmulas de diferencias finitas usando MLS

En [28] Orkisz propone un aprovechamiento de MLS (distinto al método de colocación) para generar esquemas de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales. Vamos a ejemplificar esta aplicación para el caso unidimensional, el mismo razonamiento puede emplearse para generar fórmulas de diferencias en más dimensiones.

Fijado \hat{x} en Ω podemos considerar $\{1, x - \hat{x}, \dots, \frac{(x - \hat{x})^m}{m!}\}$ una base de \mathcal{P}_m , y

$$P^*(\hat{x}, x) = \sum_{k=1}^{m+1} a_k(\hat{x}) \frac{(x - \hat{x})^{k-1}}{(k-1)!}$$

donde los coeficientes $a_k(\hat{x})$ son determinados minimizando

$$\sum_{j=1}^n \Phi_R(\hat{x} - \xi_j) \left(u_j - \sum_{k=1}^{m+1} a_k(\hat{x}) \frac{(\xi_j - \hat{x})^{k-1}}{(k-1)!} \right)^2$$

Notemos que $P^*(\hat{x}, x)$ coincidiría con el polinomio de Taylor de grado m , centrado en \hat{x} , de la función u si los coeficientes a_k fuesen las $(k-1)$ -ésimas derivadas de u evaluadas en \hat{x} . Inspirado en esta idea Orkisz propone considerar, para cada $\hat{x} \in \Omega$, a $a_k(\hat{x})$ como una aproximación a $u^{(k-1)}(\hat{x})$, $1 \leq k \leq m+1$. De esta manera se pueden generar fácilmente fórmulas de diferencias para las derivadas las cuales podrían utilizarse para resolver ecuaciones diferenciales de hasta orden m .

Si bien $u(\hat{x})$ se aproxima por $a_1(\hat{x}) = P^*(\hat{x}, \hat{x}) = \hat{u}(\hat{x})$, Orkisz propone que la k -ésima derivada de u en \hat{x} se aproxime por $a_{k+1}(\hat{x})$ en lugar de aproximarla por la k -ésima derivada de \hat{u} en \hat{x} como se propuso en los métodos antes mencionados. De esta manera se pueden generar fórmulas de diferencias finitas más fácilmente que utilizando colocación ya que nos evitamos el cálculo de las derivadas de \hat{u} .

La convergencia de las aproximaciones obtenidas usando estos esquemas de diferencias finitas puede establecerse si se tiene la consistencia y la estabilidad de los mismos. Si bien nuestro propósito es obtener estimaciones del error cometido al aproximar u y sus derivadas por \hat{u} y las

derivadas de \hat{u} , es importante notar que los resultados intermedios que se obtienen para arribar a estas estimaciones de error (ver Capítulo 2) proporcionan también estimaciones del error cometido al aproximar la primer y segunda derivada de u por a_k para $k = 2, 3$ respectivamente, y estas estimaciones proveen entonces la consistencia para esquemas de este tipo cuando se emplean para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Capítulo 2

Estimaciones de Error en L^∞ - El caso unidimensional

En este capítulo vamos a establecer estimaciones de error en norma infinito para el caso unidimensional, en términos del parámetro R , no sólo para la aproximación de la función sino también para la aproximación de sus derivadas dado que, como mencionamos antes, queremos establecer estimaciones de error que provean la convergencia de MLS cuando es aplicado para resolver ecuaciones diferenciales.

2.1 Estimaciones de error para la aproximación de la función

Recordemos que, dado $R > 0$, Φ_R con soporte en $\overline{B_R(0)}$ y $n = n(R)$ puntos $\mathcal{X}_R = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ en un intervalo $\Omega \subset \mathbb{R}$, denotamos por $\{p_1, \dots, p_{m+1}\}$ una base de \mathcal{P}_m y para cada $x \in \Omega$ llamamos $\hat{u}(x) = P^*(x, x)$ a la aproximación a $u(x)$ definida en (1.1.3).

Vamos a denotar, para k entero no-negativo, $W^{k,\infty}(\Omega)$ al espacio de Sobolev definido por $W^{k,\infty}(\Omega) = \{f \in L^1_{loc} : \|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} < \infty\}$ donde $\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\beta| \leq k} \|D^\beta f\|_{L^\infty(\Omega)}$ con $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$, $\beta_i \in \mathbb{N}_0$ para $1 \leq i \leq n$ y $D^\beta f$ la derivada débil de f de orden $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N$, i.e., $W^{k,\infty}(\Omega)$ es el espacio de las funciones con derivadas distribucionales hasta el orden k en $L^\infty(\Omega)$.

Para realizar nuestro análisis de error vamos a considerar una serie de propiedades sobre la función de peso Φ_R y la distribución de los puntos pertenecientes a \mathcal{X}_R . Todas las constantes que aparecen son independientes de R . En adelante, para simplificar notación, vamos a descartar el subíndice R en Φ_R .

1. Dado $x \in \Omega$ existen al menos $m + 1$ puntos pertenecientes a $\mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$
2. $\exists c_0 > 0$ tal que $\Phi(z) \geq c_0 \quad \forall z \in B_{\frac{R}{2}}(0)$.
3. $\Phi \in C^1(B_R(0)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ y $\exists c_1 > 0$ tal que $\|\Phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{c_1}{R}$

4. $\exists c_p$ tal que $\frac{R}{\sigma} \leq c_p$ con $\sigma = \min|\xi_i - \xi_k|$ donde el mínimo se considera sobre los $m + 1$ puntos dados por la propiedad 1).
5. $\exists c_\#$ tal que para cualquier $x \in \Omega$, $\text{card}\{\mathcal{X}_R \cap B_{2R}(x)\} < c_\#$.
6. $\Phi \in C^2(B_R(0)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ y $\exists c_2$ tal que $\|\Phi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{c_2}{R^2}$

En primer término deseamos establecer el orden con que \hat{u} aproxima a la función u . Esto puede establecerse a partir de resultados conocidos para la mejor aproximación por cuadrados mínimos. El siguiente Teorema puede verse como un caso particular del Teorema 8 en [26] o el Teorema 1 en [23].

Teorema 2.1.1 *Supongamos que Φ satisface la Propiedad \mathcal{L} mencionada en el Capítulo 1. Sea $x \in \Omega$ y $u \in C^{m+1}(\overline{B_R(x)} \cap \overline{\Omega})$. Si $P^*(x, y)$ es el polinomio en y que minimiza $J_x(\alpha)$, luego $u(y) - P^*(x, y)$ tiene al menos $m + 1$ ceros en $\overline{B_R(x)} \cap \overline{\Omega}$.*

Dem. Dado $x \in \Omega$ supongamos que $u(y) - P^*(x, y)$ tiene exactamente k ceros (no necesariamente distintos) c_1, \dots, c_k con $k \leq m$. Entonces

$$u(y) - P^*(x, y) = \prod_{j=1}^k (y - c_j)g(y)$$

con g continua y sin ceros en $I_R = \overline{B_R(x)} \cap \overline{\Omega}$. Luego $g > 0$ o $g < 0$ en I_R . Supongamos por ejemplo que $g > 0$ en I_R y sea γ tal que $0 < \gamma < \min_{I_R} g$. Sea $Q(y) = P^*(x, y) + \gamma \prod_{j=1}^k (y - c_j)$ luego

$$\begin{aligned} |u(y) - Q(y)| &= \left| \prod_{j=1}^k (y - c_j) |g(y) - \gamma| \right| & (2.1.1) \\ &= \left| \prod_{j=1}^k (y - c_j) (g(y) - \gamma) \right| \\ &= \left| \prod_{j=1}^k (y - c_j)g(y) - \gamma \prod_{j=1}^k (y - c_j) \right| \\ &< |u(y) - P^*(x, y)| \end{aligned}$$

para todo $y \in I_R - \{c_1, \dots, c_k\}$. Consideramos ahora

$$\|u(y) - Q(y)\|_x = \sum_{j=1}^n \Phi(x - \xi_j) (u(\xi_j) - Q(\xi_j))^2 = \sum_{\xi_j \in B_R(x)} \Phi(x - \xi_j) (u(\xi_j) - Q(\xi_j))^2 \quad (2.1.2)$$

Observemos que $|u(c_j) - P^*(x, c_j)| = |u(c_j) - Q(c_j)|$, $1 \leq j \leq k$. Como Φ satisface la Propiedad \mathcal{L} hay al menos $m + 1 > k$ puntos donde $\Phi \neq 0$ y en consecuencia usando (2.1.1) en (2.1.2)

$$\|u - Q\|_x < \|u - P^*(x, \cdot)\|_x$$

Absurdo, pues por Teorema 1.1.1 sabemos que $\|u - P^*(x, \cdot)\|_x \leq \|u - P\|_x$, $\forall P \in \mathcal{P}_m$. Luego $u - P^*(x, \cdot)$ tiene al menos $m + 1$ ceros en I_R . \square

Como consecuencia de este resultado y a partir de las estimaciones clásicas para el error de interpolación (ver por ejemplo [12] o [18]), podemos concluir que

Corolario 2.1.1 *Si Φ satisface la Propiedad \mathcal{L} y $u \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ luego para cada $x \in \Omega$ y cualquiera sea $y \in B_R(x) \cap \Omega$ tenemos que*

$$|u(y) - P^*(x, y)| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m+1} \quad (2.1.3)$$

en particular tomando $y = x$, resulta

$$\|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m+1} \quad (2.1.4)$$

2.2 Estimaciones de error para la aproximación de las derivadas

Nuestro propósito es estimar el error en la aproximación de u' por \hat{u}' . Si bien la estimación del error cometido al aproximar u por \hat{u} pudo establecerse desde resultados clásicos en teoría de aproximación por cuadrados mínimos, no se tenían resultados similares para la aproximación de las derivadas. Siendo entonces las estimaciones de error que presentaremos ahora uno de los resultados principales de esta tesis.

Una de las dificultades principales para obtener estas estimaciones surgía del hecho de que para estimar el error en las derivadas debía establecerse como variaban los coeficientes α_k definidos en (1.1.3).

El siguiente Lema da la herramienta fundamental para llevar a cabo estas estimaciones.

Lema 2.2.1 *Sea $x \in \Omega$ tal que $\frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x}$ existe y $u \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$. Si las propiedades 1) a 5) se tienen entonces, existe una constante $C = C(c_0, c_1, c_p, c_\#, m)$ tal que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$:*

$$\left| \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x} \right| \leq C R^m \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (2.2.5)$$

Dem. Dado $x \in \Omega$, en vista de la propiedad 1) existen puntos $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_{m+1}} \in \mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$ donde la interpolación de Lagrange es posible. Para cualquier $h > 0$ definimos

$$S(x) = \sum_{k \in \{j_i\}} |P^*(x + h, \xi_k) - P^*(x, \xi_k)|^2 \quad (2.2.6)$$

Luego por la propiedad 2) tenemos que

$$S(x) \leq \frac{1}{c_0} \sum_{k \in \{j_i\}} \Phi(x - \xi_k) (P^*(x + h, \xi_k) - P^*(x, \xi_k))^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) (P^*(x + h, \xi_k) - P^*(x, \xi_k))^2 \quad (2.2.7) \\
&= \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) (P^*(x + h, \xi_k) - P^*(x, \xi_k)) (P^*(x + h, \xi_k) - u(\xi_k)) \\
&+ \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) (P^*(x + h, \xi_k) - P^*(x, \xi_k)) (u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k))
\end{aligned}$$

Dado que, para cada $x \in \Omega$, $P^*(x, \cdot)$ minimiza $\|u - P^*(x, \cdot)\|_x$, cualquiera sea Q polinomio de grado menor o igual que m se tiene que

$$\langle u - P^*(x, \cdot), Q \rangle_x = 0 \quad (2.2.8)$$

Sea Q el polinomio de grado $\leq m$ definido por $Q(y) = P^*(x + h, y) - P^*(x, y)$ tenemos entonces que

$$\langle u(y) - P^*(x, y), Q(y) \rangle_x = \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k) (u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k)) = 0 \quad (2.2.9)$$

Luego usando esto en (2.2.7) se sigue que

$$S(x) \leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k) (P^*(x + h, \xi_k) - u(\xi_k)) \quad (2.2.10)$$

Como Φ está en $C^1(B_R(0)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, para h suficientemente pequeño, $\exists \theta_k \in (x - \xi_k, x + h - \xi_k)$ tal que $\Phi(x - \xi_k) = \Phi(x + h - \xi_k) - \Phi'(\theta_k)h$ y por lo tanto reemplazando en (2.2.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
S(x) &\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x + h - \xi_k) Q(\xi_k) (P^*(x + h, \xi_k) - u(\xi_k)) \\
&- \frac{h}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi'(\theta_k) Q(\xi_k) (P^*(x + h, \xi_k) - u(\xi_k))
\end{aligned}$$

A partir de que $\langle u(y) - P^*(x + h, y), Q(y) \rangle_{x+h} = 0$, que Φ' tiene soporte contenido en $\overline{B_R(0)}$ y la propiedad 3) tenemos que

$$\begin{aligned}
S(x) &\leq \frac{h}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi'(\theta_k) Q(\xi_k) (u(\xi_k) - P^*(x + h, \xi_k)) \\
&\leq \frac{h}{c_0} \sum_{k=1}^n |\Phi'(\theta_k)| |Q(\xi_k)| |P^*(x + h, \xi_k) - u(\xi_k)| \\
&\leq \frac{c_1 h}{c_0 R} \sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |Q(\xi_k)| |P^*(x + h, \xi_k) - u(\xi_k)|
\end{aligned}$$

Por el mismo argumento usado para arribar al Corolario 2.1.1 cualquiera sea $x + h \in \Omega$ e $y \in B_{2R}(x) \cap \Omega$ tenemos que $|P^*(x + h, y) - u(y)| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m+1}$ y en consecuencia para $\xi_k \in B_{2R}(x)$

$$|P^*(x + h, \xi_k) - u(\xi_k)| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m+1}$$

luego,

$$S(x) \leq Ch \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m \sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |Q(\xi_k)| \quad (2.2.11)$$

Como Q es un polinomio de grado $\leq m$ este puede escribirse de la siguiente manera

$$Q(y) = \sum_{k \in \{j_i\}} Q(\xi_k) l_k(y) \quad (2.2.12)$$

donde $l_k(y)$ son los polinomios base de Lagrange asociados a los puntos $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_{m+1}}$, i.e., $l_k(y) = \prod_{l \in \{j_i\}, l \neq k} \frac{y - \xi_l}{\xi_k - \xi_l}$, $k \in \{j_i\}$ $1 \leq i \leq s$, y en consecuencia

$$\sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |Q(\xi_k)| \leq \sum_{i \in \{j_k\}} |Q(\xi_i)| \left(\sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |l_i(\xi_k)| \right)$$

Por la propiedad 4) se tiene $|l_i(y)| \leq c(\frac{R}{\sigma})^{m+1} \leq C(c_p, m)$, $\forall i \in \{j_k, 1 \leq k \leq m+1\}$ y por lo tanto haciendo uso de la propiedad 5) y (2.2.11) tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)| \right)^2 &\leq (m+1) \sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)|^2 = (m+1) S(x) \\ &\leq Ch \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m c_\# \sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)| \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

y en consecuencia

$$\sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)| \leq Ch \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m \quad (2.2.14)$$

Finalmente usando (2.2.14) y la propiedad 4) en (2.2.12) obtenemos $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$

$$\frac{|Q(y)|}{h} = \frac{|P^*(x+h, y) - P^*(x, y)|}{h} \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m \quad (2.2.15)$$

y por lo tanto, si x es un punto para el cual $\frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x}$ existe, la demostración concluye tomando $h \rightarrow 0$. \square

El siguiente teorema establece el orden con el cual \hat{u}' aproxima a u' .

Teorema 2.2.1 Si $u \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ y las propiedades 1) a 5) se satisfacen, entonces existe $C = C(c_0, c_1, c_p, c_\#, m)$ tal que

$$\|u' - \hat{u}'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m \quad (2.2.16)$$

Dem. Observemos que, como $\Phi \in C^1(B_R(0)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ luego, $P^*(x, y)$ es continuo en todos los puntos y diferenciable para todo x salvo un conjunto finito de puntos (esto puede ser visto usando nuevamente el argumento dado en [21], sección 2). En consecuencia, $P^*(\cdot, y) \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Para cualquier $x \in \Omega$ tal que $\frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x}$ existe, queremos estimar $|u'(x) - \hat{u}'(x)| = |u'(x) - \frac{d}{dx} P^*(x, x)|$. Notemos que

$$\frac{d}{dx} P^*(x, x) = \left\{ \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y} \right\} \Big|_{y=x} \quad (2.2.17)$$

Por lo tanto vamos a estimar $|u'(y) - \frac{\partial P^*(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P^*(x,y)}{\partial y}|$, $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$. Como $P^*(x, y)$ es un polinomio en y de grado $\leq m$ que interpola a u en $m + 1$ puntos (Teorema 2.1.1) luego, $\frac{\partial P^*(x,y)}{\partial y}$ interpola a u' en m puntos y en consecuencia,

$$|u'(y) - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y}| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m \quad \forall y \in B_R(x) \cap \Omega \quad (2.2.18)$$

Por el Lema 2.2.1 sabemos que $|\frac{\partial P^*(x,y)}{\partial x}| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m$, usando esta estimación junto con (2.2.18) tenemos que

$$|u'(y) - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y}| \leq |u'(y) - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y}| + |\frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x}| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m$$

En particular tomando $y = x$ concluimos la demostración. \square

Es ahora nuestro interés encontrar estimaciones de error para la aproximación de la derivada segunda, i.e, como aproxima \hat{u}'' a u'' . La idea en la que se basan estas estimaciones es similar a la usada para la primer derivada. Sin embargo en lugar de usar la relación de ortogonalidad (2.2.8) vamos a usar una relación que resulta de derivar esta. A tal fin vamos a suponer de ahora en más que $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$. Luego por los mismos argumentos que utilizamos antes (ver Observación 1.1.4) podemos asumir que $P^*(\cdot, y) \in C^1(\Omega)$.

Lema 2.2.2 Para cualquier $Q(x, y)$ polinomio en y de grado $\leq m$ y diferenciable como función de x tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \Phi'(x - \xi_j) Q(x, \xi_j) (P^*(x, \xi_j) - u_j) + \sum_{j=1}^n \Phi(x - \xi_j) Q(x, \xi_j) \frac{\partial P^*(x, \xi_j)}{\partial x} = 0 \quad (2.2.19)$$

Dem. A partir de que $P^*(x, y)$ es el mínimo, para cada $x \in \Omega$ y para cualquier $Q(x, y)$ polinomio en y de grado $\leq m$ tenemos que,

$$\langle u(y) - P^*(x, y), Q(x, y) \rangle_x = 0 \quad (2.2.20)$$

Luego como $P^*(\cdot, y) \in C^1(\Omega)$ y $Q(x, y)$ es diferenciable como función de x , podemos derivar respecto de x y obtenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \Phi'(x - \xi_j) Q(x, \xi_j) (P^*(x, \xi_j) - u_j) \\ & + \sum_{j=1}^n \Phi(x - \xi_j) \frac{\partial Q(x, \xi_j)}{\partial x} (P^*(x, \xi_j) - u_j) \\ & + \sum_{j=1}^n \Phi(x - \xi_j) Q(x, \xi_j) \frac{\partial P^*(x, \xi_j)}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Como para cada x , $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ está en \mathcal{P}_m y P^* satisface (2.2.20) el segundo término es 0 y se tiene el resultado deseado. \square

Procediendo de manera análoga a la estimación de error para la primer derivada, vamos en primer lugar a estimar $\frac{\partial^2 P^*(x,y)}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 P^*(x,y)}{\partial x \partial y}$ para cada $x \in \Omega$ donde existan. Estas estimaciones se presentan en los dos lemas siguientes.

Lema 2.2.3 *Sea $x \in \Omega$ tal que $\frac{\partial^2 P^*(x,y)}{\partial x^2}$ existe, $m \geq 1$ y $u \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$. Si las propiedades 1) a 6) se satisfacen, entonces existe $C = C(c_0, c_1, c_2, c_p, c_\#, m)$ tal que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$*

$$\left| \frac{\partial^2 P^*(x,y)}{\partial x^2} \right| \leq C R^{m-1} \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (2.2.21)$$

Dem. Sea $x \in \Omega$ y $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_{m+1}}$ como en la demostración del Lema 2.2.1. Tomamos $h > 0$ y $Q \in \mathcal{P}_m$ definido por $Q(y) = \frac{\partial P^*(x+h,y)}{\partial x} - \frac{\partial P^*(x,y)}{\partial x}$ y

$$S(x) = \sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)|^2 \quad (2.2.22)$$

A partir de la propiedad 2) tenemos que

$$\begin{aligned} S(x) &\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k \in \{j_i\}} \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k)^2 \leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k)^2 \\ &= \frac{1}{c_0} \left\{ \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k) \frac{\partial P^*(x+h, \xi_k)}{\partial x} - \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k) \frac{\partial P^*(x, \xi_k)}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Consideremos ahora el primer término en el lado derecho de la ecuación (2.2.23). Usando que para h suficientemente pequeño $\exists \theta_k \in (x - \xi_k, x + h - \xi_k)$ tal que $\Phi(x - \xi_k) = \Phi(x + h - \xi_k) - h\Phi'(\theta_k)$ junto con el Lema 2.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k) \frac{\partial P^*(x+h, \xi_k)}{\partial x} \\ &= \sum_{k=1}^n \Phi(x + h - \xi_k) Q(\xi_k) \frac{\partial P^*(x+h, \xi_k)}{\partial x} - h \sum_{k=1}^n \Phi'(\theta_k) Q(\xi_k) \frac{\partial P^*(x+h, \xi_k)}{\partial x} \\ &= \sum_{k=1}^n \Phi'(x + h - \xi_k) Q(\xi_k) (u_k - P^*(x+h, \xi_k)) - h \sum_{k=1}^n \Phi'(\theta_k) Q(\xi_k) \frac{\partial P^*(x+h, \xi_k)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Usando nuevamente el resultado obtenido en el Lemma 2.2.2 en el segundo término del lado derecho de (2.2.23) junto con (2.2.24) tenemos que

$$S(x) \leq \frac{1}{c_0} \left\{ \sum_{k=1}^n \Phi'(x + h - \xi_k) Q(\xi_k) (u_k - P^*(x+h, \xi_k)) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - h \sum_{k=1}^n \Phi'(\theta_k) Q(\xi_k) \frac{\partial P^*(x+h, \xi_k)}{\partial x} \\
& + \sum_{k=1}^n \Phi'(x-\xi_k) Q(\xi_k) (P^*(x, \xi_k) - u_k) \}
\end{aligned}$$

Como Φ está en $C^2(B_R(0)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R})$, para h suficientemente pequeño, $\exists \eta_k \in (x-\xi_k, x+h-\xi_k)$ tal que $\Phi'(x+h-\xi_k) = \Phi'(x-\xi_k) + \Phi''(\eta_k)h$. Luego, reemplazando en el primer término obtenemos

$$\begin{aligned}
S(x) & \leq \frac{1}{c_0} \left\{ \sum_{k=1}^n \Phi'(x-\xi_k) Q(\xi_k) (P^*(x, \xi_k) - P^*(x+h, \xi_k)) \right. \\
& - h \sum_{k=1}^n \Phi'(\theta_k) Q(\xi_k) \frac{\partial P^*(x+h, \xi_k)}{\partial x} + h \sum_{k=1}^n \Phi''(\eta_k) Q(\xi_k) (u_k - P^*(x, \xi_k)) \left. \right\} \\
& \leq \frac{1}{c_0} \left\{ \sum_{k=1}^n |\Phi'(x-\xi_k)| |Q(\xi_k)| |P^*(x, \xi_k) - P^*(x+h, \xi_k)| \right. \\
& + h \sum_{k=1}^n |\Phi'(\theta_k)| |Q(\xi_k)| \left| \frac{\partial P^*(x+h, \xi_k)}{\partial x} \right| + h \sum_{k=1}^n |\Phi''(\eta_k)| |Q(\xi_k)| |u_k - P^*(x, \xi_k)| \left. \right\}
\end{aligned}$$

Desde la desigualdad (2.2.15), el Lema 2.2.1, el Corolario 2.1.1, el hecho de que Φ' y Φ'' tienen soporte contenido en $\overline{B_R(0)}$ y las propiedades 3) y 6) concluimos que

$$S(x) \leq Ch \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \left\{ \sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} \frac{c_1}{R} |Q(\xi_k)| R^m + \sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} \frac{c_2}{R^2} |Q(\xi_k)| R^{m+1} \right\}$$

y en consecuencia,

$$S(x) \leq Ch \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m-1} \sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |Q(\xi_k)|$$

Usando el mismo argumento que utilizamos en la demostración del Lema 2.2.1 tenemos que

$$\frac{|Q(y)|}{h} \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m-1} \quad (2.2.25)$$

y luego, si x es tal que $\frac{\partial^2 P^*(x,y)}{\partial x^2}$ existe, tomando $h \rightarrow 0$ finalizamos la demostración. \square

Lema 2.2.4 Sea $x \in \Omega$, $m \geq 1$ y $u \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$. Si las propiedades 1) a 6) se tienen entonces, existe $C = C(c_0, c_1, c_2, c_p, c_\#, m)$ tal que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$

$$\left| \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x \partial y} \right| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m-1}$$

Dem. Sea $x \in \Omega$ y sean $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_{m+1}}$ como en la demostración del Lema 2.2.1. Como $P^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}_m$ podemos escribir

$P^*(x, y) = \sum_{k \in \{j_i\}} P^*(x, \xi_k) l_k(y)$ donde $l_k(y)$ (con $k \in \{j_i, 1 \leq i \leq m+1\}$) son las bases de Lagrange de grado $\leq m$ asociadas con los puntos $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_{m+1}}$. Por la propiedad 6) tenemos que

P^* es de clase C^1 en la primer variable. En consecuencia para cualquier x tenemos que

$$\frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x \partial y} = \sum_{k \in \{j_i\}} \frac{\partial P^*(x, \xi_k)}{\partial x} l'_k(y)$$

Notemos que por el Lema 2.2.1 sabemos que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$: $|\frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x}| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m$.

Luego

$$|\frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x \partial y}| \leq \sum_{k \in \{j_i\}} |\frac{\partial P^*(x, \xi_k)}{\partial x}| |l'_k(y)| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^m \sum_{k \in \{j_i\}} |l'_k(y)| \quad (2.2.26)$$

Las bases de Lagrange l_k pueden calcularse facilmente y es sencillo ver que satisfacen $|l'_k(y)| \leq \frac{c}{\sigma}$ with $c = c(c_p, m)$ si la propiedad 4) se tiene. Usando ahora esta estimación en (2.2.26) y la propiedad 5) obtenemos el resultado deseado \square

Con los resultados previos estamos en condiciones de estimar el error cometido al aproximar u'' por \hat{u}''

Teorema 2.2.2 *Sea $m \geq 1$, si $u \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ y las propiedades 1) a 6) se satisfacen entonces, existe $C = C(c_0, c_1, c_2, c_p, c_\#, m)$ tal que*

$$\|u'' - \hat{u}''\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m-1} \quad (2.2.27)$$

Dem. Notemos que como $\Phi \in C^2(B_R(0)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ luego, $\frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x \partial y}$ existe cualquiera sea x e y en Ω y $\frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x^2}$ existe para todo x salvo un conjunto finito de puntos y por lo tanto $P^*(\cdot, y) \in W^{2,\infty}(\Omega)$. (esto se puede ver usando nuevamente el mismo argumento que antes).

Dado cualquier $x \in \Omega$, tal que $\frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x^2}$ existe, queremos estimar $|u''(x) - \hat{u}''(x)| = |u''(x) - \frac{d^2}{dx^2} P^*(x, x)|$. Notemos que

$$\frac{d^2}{dx^2} P^*(x, x) = \left\{ \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial y^2} \right\} \Big|_{y=x} \quad (2.2.28)$$

Por lo tanto, $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$

$$\begin{aligned} & \left| u''(y) - \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x^2} \right| \\ & \leq \left| u''(y) - \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial y^2} \right| + 2 \left| \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x \partial y} \right| + \left| \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial x^2} \right| \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Observemos que, $\frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial y^2}$ es un polinomio de grado $\leq m-2$ que interpola u'' en $m-1$ puntos y en consecuencia

$$\left| u''(y) - \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial y^2} \right| \leq C \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m-1} \quad \forall y \in B_R(x) \cap \Omega \quad (2.2.30)$$

Usando esta estimación en (2.2.29) junto con los resultados obtenidos en los Lemas 2.2.3 y 2.2.4 la demostración concluye tomando $y = x$. \square

Observación 2.2.1 *Por lo mencionado en el Capítulo 1, sección 1.2.1 las estimaciones obtenidas en (2.1.4) y (2.2.16) garantizan la convergencia de MLS cuando es aplicado para obtener aproximaciones de Galerkin para resolver problemas coercivos de segundo orden o para problemas de segundo orden para los cuales la forma bilineal satisfaga la condición inf-sup. Además, como se mencionó en la sección 1.2.2 las estimaciones obtenidas para las dos primeras derivadas (2.2.16) y (2.2.27) proporcionan junto con (2.1.4) la consistencia del esquema resultante cuando MLS es utilizado como método de colocación para resolver problemas de segundo orden.*

Como mencionamos en la sección 1.2.3 del Capítulo 1 nuestras estimaciones de error proveen, en particular, las estimaciones de error necesarias para demostrar la consistencia de los esquemas resultantes cuando MLS es utilizado para obtener fórmulas de diferencias finitas como propone Orkisz [28]. El siguiente resultado establece estas estimaciones.

Teorema 2.2.3 *(sobre la aproximación de Orkisz)*

Dado $x \in \Omega$ y sea $\{1, y - x, \frac{(y-x)^2}{2}\}$ una base de \mathcal{P}_2 y $P^*(x, y) = \sum_{k=1}^3 a_k(x) \frac{(y-x)^{k-1}}{(k-1)!}$ donde los coeficientes $a_k(x)$ son determinados minimizando $\sum_{j=1}^n \Phi(x - \xi_j)(u_j - (a_1(x) + a_2(x)(\xi_j - x) + a_3(x)\frac{(\xi_j-x)^2}{2}))^2$ si las hipótesis del teorema 2.2.2 se satisfacen, entonces existe una constante C tal que

$$|u^{(k)}(x) - a_{k+1}(x)| \leq C \|u'''\|_{L^\infty(\Omega)} R^{3-k} \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.2.31)$$

donde $u^{(k)}$ denota la k -ésima derivada de u para $k = 1, 2$ y $u^{(0)} = u$

Dem. Dado $x \in \Omega$ y $P^*(x, y) = a_1(x) + a_2(x)(y-x) + a_3(x)\frac{(y-x)^2}{2}$ notemos que $\hat{u}(x) = P^*(x, x) = a_1(x)$ y en consecuencia, la estimación del error cometido al aproximar $u(x)$ por $a_1(x)$ está dada por (2.1.4). Orkisz propone considerar $a_2(x)$ y $a_3(x)$ para aproximar las dos primeras derivadas de $u(x)$ en lugar de considerar las derivadas de $\hat{u}(x)$. Por (2.2.18) y (2.2.30) sabemos que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$

$$\begin{aligned} |u'(y) - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y}| &\leq C \|u'''\|_{L^\infty(\Omega)} R^2 \\ |u''(y) - \frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial y^2}| &\leq C \|u'''\|_{L^\infty(\Omega)} R \end{aligned}$$

Pero cualquiera sea y , $\frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y} = a_2(x) + a_3(x)(y-x)$ y $\frac{\partial^2 P^*(x, y)}{\partial y^2} = a_3(x)$ tomando entonces $y = x$ se tienen las estimaciones deseadas. \square

Observación 2.2.2 *Es importante señalar que las ideas desarrolladas para obtener estimaciones de error al aproximar las dos primeras derivadas pueden generalizarse para obtener estimaciones de error para derivadas de orden superior.*

Capítulo 3

Estimaciones de Error en Espacios de Sobolev - El caso N-dimensional

A lo largo de este capítulo vamos a demostrar, para el caso N-dimensional, que bajo hipótesis apropiadas sobre la función de peso y la distribución de puntos, MLS tiene orden óptimo en L^∞ y en L^2 para la aproximación de la función y sus primeras derivadas.

A fin de facilitar la lectura del presente Capítulo, vamos a recordar que, dado $R > 0$, Φ_R la función no negativa con soporte en $\overline{B_R(0)}$ y $\mathcal{X}_R = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ el conjunto de $n = n(R)$ puntos dados en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, acotado y con borde Lipschitz, denotamos, como antes, $\{p_1, \dots, p_s\}$ una base de \mathcal{P}_m , $s = \dim \mathcal{P}_m$ y para cada $x \in \Omega$, $\hat{u}(x) = P^*(x, x)$ la aproximación a $u(x)$ definida en (1.1.3). Para poder llevar a cabo nuestro análisis de error vamos a establecer, en primer lugar, las propiedades que consideraremos sobre la función de peso y la distribución de puntos. Si bien las condiciones que estableceremos sobre la función de peso Φ_R son análogas a las del caso unidimensional, una de las dificultades que se presentaba en este caso, a diferencia del caso unidimensional, es que si bien debíamos establecer condiciones sobre la distribución de los puntos dados ($\mathcal{X}_R = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$), estas condiciones fuesen bastantes generales de forma de no perder una de las características sobresalientes de MLS que es el hecho de que no se necesita generar una “malla” cuando es utilizado para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. A tal fin, vamos a suponer, como se enunciará en la propiedad 1), que la distribución de puntos es tal que cualquiera sea $x \in \Omega$ podemos seleccionar un subconjunto de s puntos en un entorno de x de forma tal que la interpolación de Lagrange sea posible y tal que las bases de Lagrange asociadas a dichos puntos satisfagan las acotaciones que enunciaremos en las propiedades 4) y 5).

En las propiedades que enunciaremos a continuación todas las constantes que aparecen son independientes de R . Nuevamente, a fin de simplificar notación, descartaremos el subíndice R al referirnos a Φ_R .

1. Para cada $x \in \Omega$ existe un subconjunto de s puntos pertenecientes a $\mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$ donde la interpolación de Lagrange es posible.
2. $\exists c_0 > 0$ tal que $\Phi(z) \geq c_0 \quad \forall z \in B_{\frac{R}{2}}(0)$.

3. $\exists c_{\#}$ tal que para todo $x \in \Omega$, $\text{card}\{\xi_j \in B_{2R}(x), 1 \leq j \leq n\} < c_{\#}$.
4. Cualquiera sea $x \in \Omega$ existe una constant c_L tal que las funciones base de Lagrange asociadas con los puntos de la propiedad 1) están acotadas por una constante c_L en $B_{2R}(x)$.
5. Para cualquier $x \in \Omega$ existe una constante c'_L tal que las derivadas de las funciones base de Lagrange asociadas con el conjunto de puntos de la propiedad 1) estan acotadas por $\frac{c'_L}{R}$ en $B_{2R}(x)$.
6. $\Phi \in C^1(B_R(0)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ y $\exists c_1 > 0$ tal que $\|\nabla\Phi(z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{c_1}{R}$.

3.1 Estimaciones de Error en L^∞ y $W^{1,\infty}$

En esta sección vamos a obtener estimaciones de error en L^∞ , en términos del parámetro R , para la aproximación de u y sus primeras derivadas.

Es importante notar que en el caso unidimensional cualquiera sea $x \in \Omega$, $P^*(x, \cdot)$ es un polinomio de grado m que interpola a la función u como se demostró en el Teorema 2.1.1, hasta donde sabemos, no se ha establecido si esto es también cierto en más dimensiones. Por lo tanto vamos a ocuparnos, en primer lugar, de establecer cuál es el orden con que \hat{u} aproxima a u .

Teorema 3.1.1 *Sea $x \in \Omega$, si las propiedades 1) a 4) se tienen existe una constante C la cual depende de $c_0, c_{\#}$ y c_L tal que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$:*

$$|u(y) - P^*(x, y)| \leq C \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)} \quad (3.1.1)$$

donde $P_I(x, \cdot)$ es el polinomio en \mathcal{P}_m que interpola a u en los puntos $\in \mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$ que satisfacen la propiedad 1). En particular tomando $y = x$ tenemos que

$$|u(x) - \hat{u}(x)| \leq C \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)} \quad (3.1.2)$$

donde $\hat{u}(x) = P^*(x, x)$

Dem. Dado $x \in \Omega$, en vista de la propiedad 1) existen puntos $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_s} \in \mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$ tal que las funciones base de Lagrange l_{j_i} ($l_{j_i} \in \mathcal{P}_m$ tal que $l_{j_i}(\xi_{j_k}) = \delta_{i_k}$, $1 \leq i \leq s$), están bien definidas. Llamemos $P_I(x, \cdot)$ al polinomio de grado $\leq m$ que interpola a u en los puntos $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_s}$. Usando ahora la propiedad 2) y el hecho de que $P^*(x, \cdot)$ realiza el mínimo tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \{j_i\}} (u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k))^2 &\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k \in \{j_i\}} \Phi(x - \xi_k) (u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k))^2 \\ &\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) (u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k))^2 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) (u(\xi_k) - P_I(x, \xi_k))^2 \\
&= \frac{1}{c_0} \sum_{\xi_k \in B_R(x)} \Phi(x - \xi_k) (u(\xi_k) - P_I(x, \xi_k))^2 \\
&\leq C(c_0, c_{\#}) \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)}^2
\end{aligned}$$

Observemos que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$ podemos escribir

$$|P_I(x, y) - P^*(x, y)|^2 \leq s \sum_{k \in \{j_i\}} |l_k(y)|^2 |P_I(x, \xi_k) - P^*(x, \xi_k)|^2 = s \sum_{k \in \{j_i\}} |l_k(y)|^2 |u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k)|^2 \quad (3.1.4)$$

Usando entonces la propiedad 4) y la acotación obtenida en (3.1.3) tenemos que

$$|P_I(x, y) - P^*(x, y)| \leq C(c_0, c_{\#}, c_L) \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)} \quad (3.1.5)$$

y en consecuencia

$$|u(y) - P^*(x, y)| \leq C \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)} \quad \forall y \in B_R(x) \cap \Omega$$

En particular tomando $y = x$ concluimos la demostración \square

Ahora vamos establecer las estimaciones de error para la aproximación de las primeras derivadas de u . Estas estimaciones se obtienen como una consecuencia del siguiente Lema, el cual es una generalización del Lema 2.2.1 del Capítulo 2.

Lema 3.1.1 *Sea $x \in \Omega$ tal que $\frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x_j}$ existe para $j = 1, \dots, N$. Si las propiedades 1) a 6) se tienen, existe una constante $C = C(c_0, c_{\#}, c_1, c_L)$ tal que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$, $j = 1, \dots, N$:*

$$\left| \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{C}{R} \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \quad (3.1.6)$$

Dem. Por simplicidad vamos a demostrar el resultado para $j = 1$ (claramente el mismo argumento se aplica a cualquier j). Dado $x \in \Omega$, en vista de la propiedad 1) existen puntos $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_s} \in \mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$ tal que el polinomio que interpola a u en esos puntos existe. Para simplificar notación denotamos $\{j_i\}$ al conjunto de índices $\{j_1, \dots, j_s\}$. Para cualquier $h > 0$ definimos

$$S(x) = \sum_{k \in \{j_i\}} |P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - P^*(x, \xi_k)|^2 \quad (3.1.7)$$

Luego, por la propiedad 2)

$$\begin{aligned}
S(x) &\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k \in \{j_i\}} \Phi(x - \xi_k) (P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - P^*(x, \xi_k))^2 \\
&\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) (P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - P^*(x, \xi_k))^2 \\
&= \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) (P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - P^*(x, \xi_k)) (P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - u(\xi_k)) \\
&+ \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) (P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - P^*(x, \xi_k)) (u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k))
\end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Sea ahora Q el polinomio de grado $\leq m$ definido por $Q(y) = P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), y) - P^*(x, y)$, luego como P^* es la proyección ortogonal bajo el producto \langle, \rangle_x tenemos que

$$\langle u(y) - P^*(x, y), Q(y) \rangle_x = \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k) (u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k)) = 0 \quad (3.1.9)$$

y se sigue que

$$S(x) \leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi(x - \xi_k) Q(\xi_k) (P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - u(\xi_k)) \quad (3.1.10)$$

Usando la propiedad 6) podemos garantizar que $\exists \theta_k = \theta(\xi_k, x)$ tal que si h es suficientemente pequeño $\Phi(x - \xi_k) = \Phi((x_1 + h, x_2, \dots, x_N) - \xi_k) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\theta_k)h$. Reemplazando en (3.1.10) obtenemos

$$\begin{aligned} S(x) &\leq \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^n \Phi((x_1 + h, x_2, \dots, x_N) - \xi_k) Q(\xi_k) (P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - u(\xi_k)) \\ &\quad - \frac{h}{c_0} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\theta_k) Q(\xi_k) (P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - u(\xi_k)) \end{aligned}$$

Usando ahora la relación de ortogonalidad

$$\langle u(y) - P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), y), Q(y) \rangle_{(x_1 + h, x_2, \dots, x_N)} = 0$$

y el hecho de que $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ tiene soporte compacto junto con la propiedad 6) resulta que

$$\begin{aligned} S(x) &\leq \frac{h}{c_0} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\theta_k) Q(\xi_k) (u(\xi_k) - P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k)) \\ &\leq \frac{h}{c_0} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\theta_k) \right| |Q(\xi_k)| |P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - u(\xi_k)| \\ &\leq \frac{hc_1}{Rc_0} \sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |Q(\xi_k)| |P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - u(\xi_k)| \end{aligned}$$

Si ahora aplicamos el resultado del Teorema 3.1.1 pero para $(x_1 + h, x_2, \dots, x_N) \in \Omega$ tendríamos que

$$\begin{aligned} |P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \xi_k) - u(\xi_k)| &\leq C \|u - P_I((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \cdot)\|_{L^\infty(B_R(x_1 + h, x_2, \dots, x_N) \cap \Omega)} \\ &\leq C \|u - P_I((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \cdot)\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \end{aligned}$$

donde $P_I((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \cdot)$ denota al polinomio que interpola a u en s puntos pertenecientes a la bola $B_R(x_1 + h, x_2, \dots, x_N)$ los cuales existen gracias a la propiedad 1). Pero notemos que, para h suficientemente chico, podemos suponer que los puntos $\{\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}\} \in B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \mathcal{X}_R$ están en $B_{\frac{R}{2}}((x_1 + h, x_2, \dots, x_N))$, y por lo tanto el $P_I((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), \cdot)$ puede ser elegido como el polinomio que interpola a u en esos s puntos, i.e, como $P_I(x, \cdot)$ y en consecuencia se sigue que

$$S(x) \leq C \frac{h}{R} \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |Q(\xi_k)| \quad (3.1.11)$$

Como Q es un polinomio de grado $\leq m$ este puede escribirse en término de las funciones base de Lagrange asociadas a los puntos $\{\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}\}$

$$Q(y) = \sum_{r \in \{j_i\}} Q(\xi_r) l_r(y) \quad (3.1.12)$$

Luego

$$\sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |Q(\xi_k)| \leq \sum_{r \in \{j_i\}} |Q(\xi_r)| \left(\sum_{\xi_k \in B_{2R}(x)} |l_r(\xi_k)| \right)$$

Gracias a la propiedad 4), existe una constante c_L que acota a $l_r \forall r \in \{j_i\}$ y usando esto junto con la propiedad 3) se sigue que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)| \right)^2 &\leq s \sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)|^2 = sS(x) \\ &\leq C \frac{h}{R} \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)| \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

y en consecuencia,

$$\sum_{k \in \{j_i\}} |Q(\xi_k)| \leq C \frac{h}{R} \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \quad (3.1.14)$$

Usando esto en (3.1.12) y la propiedad 4) nuevamente obtenemos que $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$

$$\frac{|Q(y)|}{h} = \frac{|P^*((x_1 + h, x_2, \dots, x_N), y) - P^*(x, y)|}{h} \leq \frac{C}{R} \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \quad (3.1.15)$$

y la demostración concluye tomando $h \rightarrow 0$. \square

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente Teorema el cual establece el orden de aproximación para las derivadas.

Teorema 3.1.2 *Si las propiedades 1) a 6) se tienen, existe una constante $C = C(c_0, c_1, c_\#, c_L, c'_L)$ tal que para cualquier $x \in \Omega$ y $1 \leq j \leq N$ tenemos*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} (u - \hat{u})(x) \right| \leq C \left\{ \frac{1}{R} \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (u - P_I(x, \cdot)) \right\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)} \right\} \quad (3.1.16)$$

Dem. Queremos estimar $\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \{u(x) - P^*(x, x)\} \right|$ para $1 \leq j \leq N$. Dado que podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial x_j} P^*(x, x) = \left\{ \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x_j} + \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_j} \right\} \Big|_{y=x} \quad (3.1.17)$$

es suficiente estimar $\left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x_j} - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y_j} \right|$, $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$.

Tomemos nuevamente $P_I(x, \cdot)$ como el polinomio que interpola a u en los s puntos que existen por la propiedad 1) luego

$$\left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x_j} - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y_j} \right| \leq \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial P_I(x, y)}{\partial y_j} \right| + \left| \frac{\partial P_I(x, y)}{\partial y_j} - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y_j} \right| + \left| \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial x_j} \right| \quad (3.1.18)$$

Dado que, para cada $x \in \Omega$ y cualquier $y \in B_R(x) \cap \Omega$, $P_I(x, y) - P^*(x, y)$ puede escribirse como

$$P_I(x, y) - P^*(x, y) = \sum_{k \in \{j_i\}} l_k(y)(P_I(x, \xi_k) - P^*(x, \xi_k))$$

derivando respecto de y tenemos que

$$\left| \frac{\partial P_I(x, y)}{\partial y_j} - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y_j} \right| \leq \sum_{k \in \{j_i\}} \left| \frac{\partial l_k(y)}{\partial y_j} \right| |P_I(x, \xi_k) - P^*(x, \xi_k)| = \sum_{k \in \{j_i\}} \left| \frac{\partial l_k(y)}{\partial y_j} \right| |u(\xi_k) - P^*(x, \xi_k)| \quad (3.1.19)$$

y usando ahora la propiedad 5) y (3.1.5) tenemos que

$$\left| \frac{\partial P_I(x, y)}{\partial y_j} - \frac{\partial P^*(x, y)}{\partial y_j} \right| \leq \frac{C}{R} \|u - P_I(x, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)} \quad (3.1.20)$$

Usando este resultado en (3.1.18) junto con el Lema 3.1.1 concluimos la demostración. \square

Dado que nuestras estimaciones de error, tanto para la aproximación de la función como la de sus derivadas, están en función del error cometido al interpolar u mediante P_I , nuestro problema se reduce a estimar el error cometido en dicha interpolación. Si suponemos que las funciones base de Lagrange, asociadas con los puntos dados por la propiedad 1), satisfacen las propiedades 4) y 5), dichas estimaciones de error se siguen desde las estimaciones de error clásicas en interpolación. Llamamos

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, con $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ para $1 \leq i \leq n$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. El siguiente resultado establece las estimaciones de error deseadas, que se desprenden de las estimaciones de error clásicas en teoría de interpolación (ver, por ejemplo, [19]).

Teorema 3.1.3 *Sea $x \in \Omega$, $u \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ y supongamos que las propiedades 1), 4) y 5) se tienen, existe una constante $C = C(c_L, c'_L)$ tal que $\forall y \in B_{2R}(x) \cap \Omega$,*

$$|u(y) - P_I(x, y)| \leq C \max_{|\alpha|=m+1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m+1} \quad (3.1.21)$$

$$\max_{|\alpha|=1} |D^\alpha (u(y) - P_I(x, y))| \leq C \max_{|\alpha|=m+1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} R^m \quad (3.1.22)$$

donde $P_I(x, \cdot)$ es el polinomio que interpola a u en los puntos dados por la propiedad 1).

Dem. Vamos a presentar la demostración para el caso $m = 2$ (en [19] se demuestra el resultado para el caso $m = 1$), con herramientas similares se puede generalizar la demostración para cualquier otro valor de m .

Dado $x \in \Omega$ sean $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}$ los puntos pertenecientes a $B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \mathcal{X}_R$ en los cuales, gracias a la propiedad 1), la interpolación de Lagrange es posible. El polinomio $P_I(x, \cdot) \in \mathcal{P}_2$ que interpola a u en esos puntos puede escribirse, cualquiera sea $y \in B_{2R}(x) \cap \Omega$, como

$$P_I(x, y) = \sum_{i=1}^s u_{j_i} l_{j_i}(y) \quad (3.1.23)$$

donde $u_{j_i} = u(\xi_{j_i})$ y l_{j_i} denota las bases de Lagrange asociadas a $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}$.

A partir de que $u \in C^3(\Omega)$ cualquiera sea z y cualquier y en $B_R(x) \cap \Omega$ podemos escribir

$$\begin{aligned} u(z) &= u(y) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial y_j}(y)(z_j - y_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}(y)(z_i - y_i)(z_j - y_j) \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^N \frac{\partial^3 u}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k}(\theta_{ijk})(z_i - y_i)(z_j - y_j)(z_k - y_k) \\ &= u(y) + p(z, y) + q(z, y) + r(z, y) \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Si usamos (3.1.24) en los puntos $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}$ y reemplazamos en (3.1.23) obtenemos

$$\begin{aligned} P_I(x, y) &= u(y) \sum_{i=1}^s l_{j_i}(y) + \sum_{i=1}^s p(\xi_{j_i}, y) l_{j_i}(y) \\ &+ \sum_{i=1}^s q(\xi_{j_i}, y) l_{j_i}(y) + \sum_{i=1}^s r(\xi_{j_i}, y) l_{j_i}(y) \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Mediante simples cálculos, basados principalmente en el hecho de que para cualquier $v \in \mathcal{P}_2$ el polinomio de interpolación de grado menor o igual a 2, llamémoslo $P_I(v)$, satisface $P_I(v) = v$, puede verse que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s l_{j_i}(y) &\equiv 1 \\ \sum_{i=1}^s p(\xi_{j_i}, y) l_{j_i}(y) &\equiv 0 \\ \sum_{i=1}^s q(\xi_{j_i}, y) l_{j_i}(y) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Usando esto en (3.1.25) y quien es $r(z, y)$ tenemos que para cualquier $y \in B_R(x) \cap \Omega$

$$\begin{aligned} |u(y) - P_I(x, y)| &\leq \sum_{i=1}^s |r(\xi_{j_i}, y)| |l_{j_i}(y)| \\ &\leq c \max_{|\alpha|=3} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} R^3 \sum_{i=1}^s |l_{j_i}(y)| \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

y usando ahora la propiedad 4) obtenemos la primer estimación de error.

Resta ver la estimación para las derivadas. Derivando (3.1.23) se tiene $\frac{\partial P_I}{\partial y_k}(x, y) = \sum_{i=1}^s u_{j_i} \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_k}(y)$ y usando (3.1.24) en los puntos $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_I}{\partial y_l}(x, y) &= u(y) \sum_{i=1}^s \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) + \sum_{i=1}^s p(\xi_{j_i}, y) \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) \quad 1 \leq l \leq N \\ &+ \sum_{i=1}^s q(\xi_{j_i}, y) \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) + \sum_{i=1}^s r(\xi_{j_i}, y) \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Usando nuevamente el hecho de que para cualquier función $v \in \mathcal{P}_2$ el polinomio de grado menor o igual que 2 que interpola a v en los puntos ξ_1, \dots, ξ_s satisface $P_I(v) = v$, por simples cálculos puede verse que para $1 \leq l \leq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) &\equiv 0 \\ \sum_{i=1}^s p(\xi_{j_i}, y) \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) &= \frac{\partial u}{\partial y_l}(y) \\ \sum_{i=1}^s q(\xi_{j_i}, y) \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) &\equiv 0 \end{aligned}$$

y en consecuencia reemplazando en (3.1.27) tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial y_l}(y) - \frac{\partial P_I}{\partial y_l}(y) \right| &\leq \sum_{i=1}^s |r(\xi_{j_i}, y)| \left| \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) \right| \\ &\leq c \max_{|\alpha|=3} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} R^3 \sum_{i=1}^s \left| \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_l}(y) \right| \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Usando ahora la propiedad 5) obtenemos la estimación para la derivada y la demostración concluye. \square

Como una consecuencia inmediata de este Teorema y las estimaciones de error dadas por los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2 tenemos el siguiente resultado el cual establece las estimaciones de error al aproximar u y sus derivadas de primer orden mediante \hat{u} y sus primeras derivadas.

Corolario 3.1.1 *Si las propiedades 1) a 6) se tienen y $u \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ existe una constante C , la cual depende de $c_0, c_\#, c_1, c_L, c'_L$, tal que para cada $x \in \Omega$*

$$|u(x) - \hat{u}(x)| \leq C \max_{|\beta|=m+1} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\Omega)} R^{m+1} \quad (3.1.29)$$

$$|\nabla(u - \hat{u})(x)| \leq C \max_{|\beta|=m+1} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\Omega)} R^m \quad (3.1.30)$$

3.2 Estimaciones de Error en L^2 y H^1

En las estimaciones de error de la sección previa obtuvimos orden óptimo en L^∞ y $W^{1,\infty}$ bajo la suposición de que la función $u \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$. Si bien es cierto que estos resultados claramente implican estimaciones de error con orden óptimo en L^2 y H^1 , en muchos casos en los que se desea llevar a cabo la aproximación, la función a aproximar es menos regular que lo que hasta ahora hemos supuesto (como suele suceder cuando la función a aproximar es la solución de alguna ecuación diferencial). Era entonces de gran interés probar que los mismos ordenes de convergencia que se obtuvieron se mantenían si la función a estimar era menos regular, digamos $u \in H^{m+1}(\Omega)$.

Como hemos comentado previamente, no se contaba con esta clase de estimaciones de error ni para la función ni para las derivadas. En consecuencia, las estimaciones de error que presentaremos a continuación es otro de los logros importantes de esta tesis.

Sean $\{\eta_1, \dots, \eta_l\}$ puntos en Ω tales que $\Omega \subset \cup_{i=1}^l B_R(\eta_i)$ y el número de las bolas que se superponen está acotado independientemente de R . Vamos a denotar por $|\cdot|_{H^{m+1}(\Omega)}$ la seminorma en $H^{m+1}(\Omega)$, i.e.,

$$|f|_{H^{m+1}(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta|=m+1} \|D^\beta f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $D^\beta f$ denota la derivada débil de f de orden $|\beta|$. Nuestro propósito es estimar $\|u - \hat{u}\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)}$ cualquiera sea $j \in \{1, \dots, l\}$

Teorema 3.2.1 *Sea $m+1 > \frac{N}{2}$. Si las propiedades 1) a 4) se tienen y $u \in H^{m+1}(\Omega)$ existe una constante C que depende de $c_0, c_\#, c_L$ tal que, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$*

$$\|u - \hat{u}\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C R^{m+1} |u|_{H^{m+1}(B_{2R}(\eta_j) \cap \Omega)} \quad (3.2.1)$$

Dem. Cualquiera sea $j \in \{1, \dots, l\}$ queremos estimar

$$\int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} |u(y) - \hat{u}(y)|^2 dy = \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} |u(y) - P^*(y, y)|^2 dy \quad (3.2.2)$$

A partir de la propiedad 1), cualquiera sea $y \in B_R(\eta_j) \cap \Omega$ existe un subconjunto de s puntos de \mathcal{X}_R , llamemoslos $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}$, que están en la bola $B_{\frac{R}{2}}(y)$ de manera que la interpolación de Lagrange es posible. Llamemos $P_I(f)(y, \cdot)$ al polinomio de grado $\leq m$ que interpola a f en esos puntos. A partir del resultado obtenido en el Teorema 3.1.1 tenemos que

$$\int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} |u(y) - P^*(y, y)|^2 dy \leq C \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \|u - P_I(u)(y, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)}^2 dy \quad (3.2.3)$$

Cualquiera sea $y \in \Omega$ tomemos $T^m u$ un polinomio de grado menor o igual a m tal que si $u \in H^{m+1}(\Omega)$ tenemos que

$$\|u - T^m u\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} \leq C R^{m+1 - \frac{N}{2}} |u|_{H^{m+1}(B_R(y) \cap \Omega)} \quad m+1 > \frac{N}{2} \quad (3.2.4)$$

$$\|u - T^m u\|_{H^j(B_R(y) \cap \Omega)} \leq C R^{m+1-j} |u|_{H^{m+1}(B_R(y) \cap \Omega)} \quad 0 \leq j \leq m$$

La existencia de un polinomio con esas características y el análisis de como dependen las constantes respecto del dominio donde se realiza la aproximación, ha sido estudiado en distintos trabajos ([14], [15], [34]). Es importante notar que para contar con estas estimaciones necesitamos que, para cualquier $y \in B_R(\eta_j) \cap \Omega$ el conjunto $B_R(y) \cap \Omega$ sea estrellado respecto de alguna bola, i.e., existe una bola B tal que para cualquier $z \in B_R(y) \cap \Omega$ la cápsula convexa de $\{z\} \cup B$ está contenida en $B_R(y) \cap \Omega$. En vista de que Ω tiene borde Lipschitz esta condición se tiene si tomamos R suficientemente chico.

Una posible elección de T^m , ver por ejemplo [7], es la siguiente:

Llamemos $\tilde{\Omega} = B_R(y) \cap \Omega$. Dada $u \in H^{m+1}(\tilde{\Omega})$ y sea B una bola contenida en $\tilde{\Omega}$ definimos el polinomio de Taylor centrado en z de grado $\leq m$

$$T_z^m u(x) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} D^\beta u(z) (x - z)^\beta$$

con $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N$, $\beta! = \beta_1! \dots \beta_N!$, $(x - z)^\beta = (x_1 - z_1)^{\beta_1} \dots (x_N - z_N)^{\beta_N}$ y $D^\beta f = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\beta_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_N})^{\beta_N}$, En general, si u está en $H^{m+1}(\Omega)$, D^β puede no existir y es claro que no se podría definir un polinomio de Taylor para tal función, esto se soluciona definiendo un ‘promedio’ de los polinomios $T_z^m u(x)$ de la siguiente manera

$$T^m u(x) = \frac{1}{|B|} \int_B T_z^m u(x) dz$$

el cual satisface (3.2.4) (una demostración de este hecho puede verse en [7]). Como $T^m u$ es un polinomio de grado $\leq m$, $P_I(T^m u) = T^m u$ y podemos escribir

$$\|u - P_I(u)(y, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} \leq \|u - T^m u\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} + \|P_I(T^m u - u)\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} \quad (3.2.5)$$

Dado que, para cualquier función $v \in L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)$, $P_I(v) = \sum_{i=1}^s v(\xi_{j_i}) l_{j_i}$, con l_{j_i} las bases de Lagrange asociadas a los puntos $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}$. Usando la propiedad 4) tenemos que

$$\|P_I(v)\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} \leq C \|v\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)}$$

donde la constante C depende de c_L (cota de las bases de Lagrange).

Luego, usando este resultado, con $v = T^m u - u$, en (3.2.5) junto con (3.2.4) resulta que

$$\|u - P_I(u)(y, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} \leq C \|u - T^m u\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} \leq C R^{m+1-\frac{N}{2}} |u|_{H^{m+1}(B_R(y) \cap \Omega)} \quad (3.2.6)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} |u(y) - P^*(y, y)|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} &\leq C R^{m+1-\frac{N}{2}} \left\{ \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} |u|_{H^{m+1}(B_R(y) \cap \Omega)}^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C R^{m+1-\frac{N}{2}} \left\{ \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} |u|_{H^{m+1}(B_{2R}(\eta_j) \cap \Omega)}^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C R^{m+1} |u|_{H^{m+1}(B_{2R}(\eta_j) \cap \Omega)} \end{aligned}$$

arribando así al resultado deseado. \square

Ahora nos vamos a ocupar de obtener las estimaciones de error para las derivadas. A tal fin vamos a hacer uso de las estimaciones de error en L^∞ que obtuvimos en la sección 3.1.

Teorema 3.2.2 *Sea $m + 1 > \frac{N}{2}$. Si las propiedades 1) a 6) se tienen y $u \in H^{m+1}(\Omega)$. Luego, existe una constante C la cual depende de $c_0, c_\#, c_1, c_L, c'_L$ tal que $\forall j \in \{1, \dots, l\}$*

$$\|\nabla(u - \hat{u})\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C R^m \|u\|_{H^{m+1}(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)} \quad (3.2.7)$$

Dem. Consideremos $\int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} |\frac{\partial u}{\partial y_k}(y) - \frac{\partial}{\partial y_k} P^*(y, y)|^2 dy$ para $k = 1, \dots, N$. En virtud de la propiedad 1), cualquiera sea η_j , $1 \leq j \leq l$ podemos construir un polinomio $P_I(\eta_j, \cdot)$ que interpole a u en un subconjunto de s puntos de $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ que pertenezcan a la bola $B_{\frac{R}{2}}(\eta_j)$ luego,

$$\begin{aligned} \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y_k}(y) - \frac{\partial}{\partial y_k} P^*(y, y) \right|^2 dy &\leq c \left\{ \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y_k}(y) - \frac{\partial P_I}{\partial y_k}(\eta_j, y) \right|^2 dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left| \frac{\partial P_I}{\partial y_k}(\eta_j, y) - \frac{\partial}{\partial y_k} P^*(y, y) \right|^2 dy \right\} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Vamos a analizar, en primer lugar, el segundo término en el lado derecho de (3.2.8). Cualquiera sea $y \in B_R(\eta_j) \cap \Omega$ y $z \in B_R(y) \cap \Omega$ notemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_k} P^*(y, y) = \left\{ \frac{\partial P^*}{\partial y_k}(y, z) + \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z) \right\} \Big|_{z=y}$$

En vista de esto vamos a estimar $|\frac{\partial P_I}{\partial z_k}(\eta_j, z) - (\frac{\partial P^*}{\partial y_k}(y, z) + \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z))|$ para cualquier $z \in B_R(y) \cap \Omega$.

Sea $T^m u$ como en el Teorema anterior, i.e, el polinomio de grado menor o igual que m que satisface (3.2.4). Usando la estimación obtenida en el Lema 3.1.1 y con el mismo argumento que usamos para obtener (3.2.6) podemos concluir que para cualquier $z \in B_R(y) \cap \Omega$

$$\left| \frac{\partial P^*}{\partial y_k}(y, z) \right| \leq \frac{C}{R} \|u - P_I(y, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} \leq \frac{C}{R} \|u - T^m u\|_{L^\infty(B_R(y) \cap \Omega)} \leq C R^{m - \frac{N}{2}} |u|_{H^{m+1}(B_{2R}(\eta_j) \cap \Omega)} \quad (3.2.9)$$

Vamos ahora a estimar $|\frac{\partial P_I}{\partial z_k}(\eta_j, z) - \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z)|$. Como

$$\left| \frac{\partial P_I}{\partial z_k}(\eta_j, z) - \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z) \right| \leq \left| \frac{\partial P_I}{\partial z_k}(\eta_j, z) - \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(\eta_j, z) \right| + \left| \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(\eta_j, z) - \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z) \right| \quad (3.2.10)$$

Usando la acotación obtenida en (3.1.20) en el primer término del lado derecho de (3.2.10), y por el mismo argumento que utilizamos para obtener (3.2.6) se sigue que

$$\left| \frac{\partial P_I}{\partial z_k}(\eta_j, z) - \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(\eta_j, z) \right| \leq \frac{C}{R} \|u - P_I(\eta_j, \cdot)\|_{L^\infty(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C R^{m - \frac{N}{2}} |u|_{H^{m+1}(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \quad (3.2.11)$$

Miremos ahora el segundo término del lado derecho de (3.2.10), notemos que, dado $y \in B_R(\eta_j) \cap \Omega$, $\frac{\partial P^*}{\partial z_k}(\eta_j, z)$ y $\frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z)$ son polinomios en z de grado $m - 1$. Sean ahora $\{\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}\} \in B_{\frac{R}{2}}(y)$ los puntos en los que, en virtud de la propiedad 1), podemos construir las bases de Lagrange las cuales satisfacen las propiedades 4) y 5), luego se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z) - \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(\eta_j, z) \right| &= \left| \sum_{i=1}^s \frac{\partial l_{j_i}}{\partial z_k}(z) (P^*(\eta_j, \xi_{j_i}) - P^*(y, \xi_{j_i})) \right| \\ &\leq \frac{C}{R} \sum_{i=1}^s |\nabla_y P^*(\theta_j, \xi_{j_i}) \cdot (\eta_j - y)| \end{aligned}$$

Usando ahora el Lema 3.1.1 (es fácil ver que el resultado (2.2.5) puede extenderse a puntos en la bola de radio $2R$) y por los mismos argumentos utilizados para arribar a (3.2.6) resulta que

$$\left| \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z) - \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(\eta_j, z) \right| \leq \frac{C}{R} \|u - P_I(\theta_j, \cdot)\|_{L^\infty(B_{2R}(\theta_j) \cap \Omega)} \leq C R^{m - \frac{N}{2}} |u|_{H^{m+1}(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)} \quad (3.2.12)$$

Por lo tanto, en vista de (3.2.12), (3.2.9), (3.2.11), cualquiera sea $z \in B_R(y) \cap \Omega$ tenemos que

$$\left| \frac{\partial P_I}{\partial z_k}(\eta_j, z) - \left(\frac{\partial P^*}{\partial y_k}(y, z) + \frac{\partial P^*}{\partial z_k}(y, z) \right) \right| \leq C R^{m - \frac{N}{2}} |u|_{H^{m+1}(B_{3R}(\eta_j))}$$

en particular tomando $z = y$ tenemos que

$$\left\{ \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left| \frac{\partial P_I}{\partial y_k}(\eta_j, y) - \frac{\partial}{\partial y_k}(P^*(y, y)) \right|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C R^m |u|_{H^{m+1}(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)} \quad (3.2.13)$$

Consideremos ahora el primer término del lado derecho de (3.2.8), usando nuevamente que $P_I(T^m u) = T^m u$ podemos escribir

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial y_k} - \frac{\partial P_I}{\partial y_k}(\eta_j, \cdot) \right\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial y_k} - \frac{\partial T^m u}{\partial y_k} \right\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} + \left\| \frac{\partial P_I}{\partial y_k}(u - T^m u) \right\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \quad (3.2.14)$$

Para cualquier $v \in L^\infty(B_R(\eta_j) \cap \Omega)$, dado que las bases de Lagrange satisfacen la propiedad 5) tenemos que,

$$\left\| \frac{\partial P_I}{\partial y_k}(v) \right\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq \|v\|_{L^\infty(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \sum_{i=1}^s \left\| \frac{\partial l_{j_i}}{\partial y_k}(y) \right\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C \|v\|_{L^\infty(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} R^{\frac{N}{2}-1}$$

Si $v \in H^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)$ por los Teoremas de inmersión de Sobolev sabemos además que

$$\|v\|_{L^\infty(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq c \left\{ R^{-\frac{N}{2}} \|v\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} + R^{-\frac{N}{2}+1} \|D^\alpha v\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} + R^{-\frac{N}{2}+2} \|D^\beta v\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \right\}_{|\alpha|=1, |\beta|=2}$$

En vista de estas estimaciones y (3.2.4) el segundo término en el lado derecho de (3.2.14) satisface

$$\left\| \frac{\partial P_I}{\partial y_k}(u - T^m u) \right\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq \frac{C}{R} \|u - T^m u\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C R^m |u|_{H^{m+1}(B_R(\eta_j) \cap \Omega)}$$

En virtud de (3.2.4) el primer término en el lado derecho de (3.2.14) satisface

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial y_k} - \frac{\partial T^m u}{\partial y_k} \right\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C R^m |u|_{H^{m+1}(B_R(\eta_j) \cap \Omega)}$$

la cual junto a las estimaciones anteriores provee el resultado deseado \square

Observación 3.2.1 Notemos que, como Ω está contenido en $\cup_{1 \leq j \leq l} B_R(\eta_j) \cap \Omega$ por el resultado obtenido en el Teorema 3.2.1 tenemos que

$$\|u - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^l \|u - \hat{u}\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C R^{m+1} \sum_{j=1}^l |u|_{H^{m+1}(B_{2R}(\eta_j) \cap \Omega)}.$$

Dado que, por hipótesis, el número de bolas que se solapan está acotado independientemente de R , existe una constante C tal que $\sum_{j=1}^l |u|_{H^{m+1}(B_{2R}(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C |u|_{H^{m+1}(\Omega)}$ y por ende, existe una constante C , independiente de R , tal que

$$\|u - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C R^{m+1} |u|_{H^{m+1}(\Omega)}. \text{ Análogamente a partir del resultado obtenido en el 3.2.2 tenemos que } \|\nabla(u - \hat{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq C R^m |u|_{H^{m+1}(\Omega)}.$$

Observación 3.2.2 Si bien hemos obtenido estimaciones de error sólo para la función y sus primeras derivadas, haciendo uso de los mismos argumentos y generalizando las hipótesis sobre la función de peso y las bases de Lagrange (por ejemplo que las k -ésimas derivadas tanto de la función de peso como de las funciones base de Lagrange puedan acotarse por $\frac{C}{R^k}$, con C independiente de R) podrían obtenerse estimaciones de error para derivadas de mayor orden.

3.3 Cotas de las bases de Lagrange

En los resultados obtenidos en las secciones 3.1 y 3.2 hemos supuesto que para cada $x \in \Omega$ las bases de Lagrange asociadas a los s puntos, $s = \dim \mathcal{P}_m$, pertenecientes a $\mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$, que existen en virtud de la propiedad 1), satisfacen las propiedades 4) y 5). En esta sección vamos a demostrar para $N = 2$ y $m = 1, 2$ que, para una distribución de puntos bastante general, las correspondientes bases de Lagrange satisfacen dichas propiedades.

Para llevar adelante nuestro análisis introducimos la siguiente definición:

Definición 3.3.1 Para cualquier $x \in \Omega$, sea T el triángulo de vértices $a^1, a^2, a^3 \in B_{\frac{R}{2}}(x)$ y sea ρ el diámetro de la mayor bola contenida en T . Vamos a decir que T satisface la condición de regularidad, i.e., T satisface la condición CR, con constante $\sigma > 0$ (independiente de R y ρ), si $\frac{R}{\rho} \leq \sigma$

El siguiente resultado, (ver por ejemplo [7]), nos proporciona una herramienta fundamental para llevar a cabo nuestras acotaciones. Para simplificar notación, nos referiremos al hiperplano $\{y : L(y) = 0\}$, con L función lineal, simplemente como hiperplano L .

Lema 3.3.1 Sea P un polinomio en N variables de grado $d \geq 1$ que se anula en un hiperplano L . Luego podemos escribir $P = LQ$, donde Q es un polinomio de grado $d - 1$.

Dem. Llamemos $\hat{y} = (y_1, \dots, y_{N-1})$, podemos mediante un cambio afín de coordenadas suponer que $L(\hat{y}, y_N) = y_N$ y el hiperplano $L(\hat{y}, y_N) = 0$ es el eje \hat{y} . En consecuencia $P(\hat{y}, 0) = 0$. Como P tiene grado d podemos escribir

$$P(\hat{y}, y_N) = \sum_{j=0}^d \sum_{|\hat{i}| \leq d-j} c_{i_j} \hat{y}^{\hat{i}} y_N^j$$

donde $\hat{i} = (\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{N-1})$, $|\hat{i}| = \hat{i}_1 + \dots + \hat{i}_{N-1}$, $i_k \in \mathbb{N}_0$. Como por hipótesis $P(\hat{y}, 0) = \sum_{|\hat{i}| \leq d} c_{i_j} \hat{y}^{\hat{i}} \equiv 0$ resulta $c_{i_0} = 0$ para $|\hat{i}| \leq d$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} P(\hat{y}, y_N) &= \sum_{j=1}^d \sum_{|\hat{i}| \leq d-j} c_{i_j} \hat{y}^{\hat{i}} y_N^j = y_N \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{|\hat{i}| \leq d-j} c_{i_j} \hat{y}^{\hat{i}} y_N^{j-1} \\ &= y_N Q = LQ \end{aligned}$$

donde Q es un polinomio de grado $d - 1$. \square

Vamos a considerar en primer lugar el caso $m = 1$.

Lema 3.3.2 Sea $m = 1$. Dado $x \in \Omega$, si existen puntos a^1, a^2, a^3 en $\mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$ tal que el triángulo T de vértices a^1, a^2, a^3 verifica la condición CR entonces, existe una constante $C = C(\sigma)$

tal que las bases de Lagrange l_i , $1 \leq i \leq 3$, asociadas con esos puntos satisfacen, $\forall y \in B_{2R}(x) \cap \Omega$

$$|l_i(y)| \leq C \tag{3.3.15}$$

$$\left| \frac{\partial l_i(y)}{\partial y_j} \right| \leq \frac{C}{R} \quad 1 \leq j \leq 2 \tag{3.3.16}$$

Dem. Sea T el triángulo de vértices a^1, a^2, a^3 y sea ρ el diámetro de la mayor bola contenida en T . Las bases de Lagrange pueden construirse fácilmente haciendo uso del Lema (3.3.1), pues, dado que $l_i(a^j) = \delta_{ij}$, para $1 \leq i, j \leq 3$ podemos escribir $l_i = \gamma_i L_i$ donde L_i es la recta a la que pertenecen los a^j con $j \neq i$, i.e, la recta a la que pertenece el lado del triángulo opuesto a a^i , y la constante γ_i se determina usando que $l_i(a^i) = 1$. Por un simple cálculo y usando que T satisface la condición CR puede verse que

$$\begin{aligned} |l_i(y)| &\leq C \frac{R^2}{\rho^2} \leq C(\sigma) \\ \left| \frac{\partial l_i(y)}{\partial y_j} \right| &\leq C \frac{R}{\rho^2} \leq \frac{C(\sigma)}{R} \quad 1 \leq j \leq 2 \quad \square \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso $m = 2$. Vamos a obtener cotas para las bases de Lagrange y sus primeras derivadas, como las que proponen las propiedades 4) y 5), para una distribución de puntos bastante general como se muestra en la Figura 1.

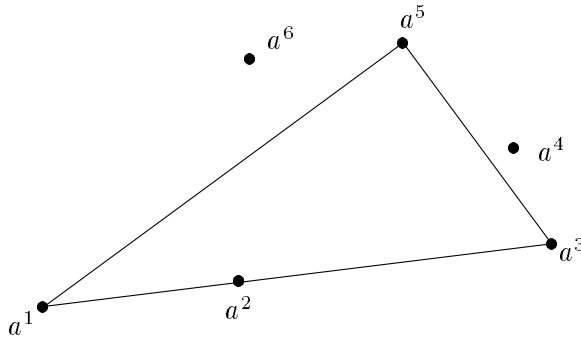


Figura 1

A fin de hacer nuestro análisis más sencillo vamos a considerar, en primer término, dos casos particulares de la situación mostrada en la Figura 1.

Lema 3.3.3 Sea $m = 2$. Dado $x \in \Omega$ supongamos que existen puntos $a^j, 1 \leq j \leq 6$ en $\mathcal{X}_R \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$ de tal forma que alguna de las dos siguientes situaciones se tiene

i) $a^j, 1 \leq j \leq 6$ distribuidos como se muestra en la Figura 2 y tales que los triángulos de vértices $\{a^1, a^2, a^6\}$, $\{a^2, a^3, a^4\}$ y $\{a^4, a^5, a^6\}$ satisfacen la condición CR

ii) $a^j, 1 \leq j \leq 6$ se distribuyen como indica la Figura 3 y los triángulos de vértices $\{a^1, a^2, a^6\}$, $\{a^2, a^3, a^4\}$, $\{a^4, a^5, a^6\}$ y $\{a^1, a^2, a^5\}$ satisfacen la condición CR.

Entonces, existe una constante $C = C(\sigma)$ tal que $\forall y \in B_{2R}(x) \cap \Omega$ las bases de Lagrange l_i asociadas a los puntos $a^i, 1 \leq i \leq 6$, satisfacen

$$\begin{aligned} |l_i(y)| &\leq C \\ \left| \frac{\partial l_i}{\partial y_j}(y) \right| &\leq \frac{C}{R} \quad 1 \leq j \leq 2 \end{aligned}$$

Dem. Sea $x \in \Omega$, consideremos el triángulo T de vértices a^1, a^3, a^5 contenido en la bola $B_{\frac{R}{2}}(x)$. Para simplificar notación, a la recta $\{y : L_{ij}(y) = 0\}$ a la cual pertenecen a^i y a^j la notaremos simplemente L_{ij} .

Supongamos primero que los puntos están en la situación mencionada en i). Sean a^2, a^4, a^6 los puntos que, respectivamente, están en L_{13}, L_{35}, L_{15} como se muestra en la Figura 2.

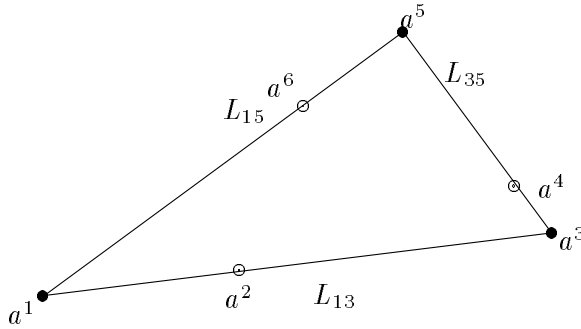


Figura 2

Vamos a demostrar el resultado solo para la base de Lagrange $l_1 \in \mathcal{P}_2$ la cual satisface $l_1(a^j) = \delta_{1j}, 1 \leq j \leq 6$, ya que, el mismo argumento puede ser usado para obtener las cotas para las otras bases.

A partir de que $l_1 \in \mathcal{P}_2$ y se anula en $a^3, a^4, a^5 \in L_{35}$ se sigue que, $l_1 = 0$ en L_{35} y usando el

Lema 3.3.1 podemos escribir $l_1 = L_{35}q_1$ donde $q_1 \in \mathcal{P}_1$. Pero l_1 se anula también en a^2 y a^6 los cuales no pertenecen a L_{35} , por lo tanto, $q_1 = 0$ en L_{26} y en consecuencia, usando nuevamente el Lema (3.3.1), $l_1 = cL_{35}L_{26}$ y como $l_1(a^1) = 1$ la constante c queda univocamente determinada. Mediante un simple cálculo podemos ver entonces que, $\forall y \in B_{2R}(x) \cap \Omega$

$$|l_1(y)| \leq c \frac{R^4}{(\text{area de } T_{135})(\text{area de } T_{126})} \quad (3.3.17)$$

$$\left| \frac{\partial l_1}{\partial y_j}(y) \right| \leq c \frac{R^3}{(\text{area de } T_{135})(\text{area de } T_{126})} \quad j = 1, 2$$

donde T_{ijk} denota el triángulo de vértices $\{a^i, a^j, a^k\}$.

Llamemos ρ_{ijk} al diámetro de la mayor bola contenida en T_{ijk} . Notemos que $\rho_{135} \geq \rho_{234}$ y como el triángulo T_{234} y el triángulo T_{126} satisfacen, por hipótesis, la condición CR, usando esto en (3.3.17) obtenemos las estimaciones deseadas.

Consideremos ahora la situación descripta en el caso ii). Notemos que usando el mismo argumento que utilizamos antes para el caso i), podemos construir $l_j \in \mathcal{P}_2$ tales que $l_j(a^i) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2, 4, 5, 6$, i.e, usando el Lema 3.3.1 podemos escribir $l_1 = c_1L_{35}L_{26}$, $l_2 = c_2L_{35}L_{16}$, $l_4 = c_4L_{13}L_{56}$, $l_5 = c_5L_{13}L_{46}$ y $l_6 = c_6L_{13}L_{35}$ donde las constantes c_j son determinadas a partir de que $l_j(a^j) = 1$. Por lo tanto, por el mismo argumento usado antes, si los triángulos de vértices $\{a^1, a^2, a^5\}$, $\{a^1, a^2, a^6\}$, $\{a^4, a^5, a^6\}$ y $\{a^2, a^3, a^4\}$, satisfacen la condición CR mediante un simple cálculo se puede ver que $|l_j| \leq C$ y $|\frac{\partial l_j}{\partial y_k}| \leq \frac{C}{R}$, para $k = 1, 2$ y $j = 1, 2, 4, 5, 6$.

No obstante el argumento usado hasta ahora falla cuando deseamos construir la base l_3 ya que, no podemos trazar una línea que incluya a 3 puntos, de los 6 dados, que sean diferentes de a^3 . Sin embargo, podemos fácilmente construir $b_3 \in \mathcal{P}_1$ independiente de $\{l_1, l_2, l_4, l_5, l_6\}$ de forma tal que $b_3(a^3) = 1$ y $b_3|_{L_{15}} = 0$ y mediante un simple cálculo concluir que $|b_3| \leq C$ y $|\frac{\partial b_3}{\partial y_k}| \leq \frac{C}{R}$, para $k = 1, 2$.

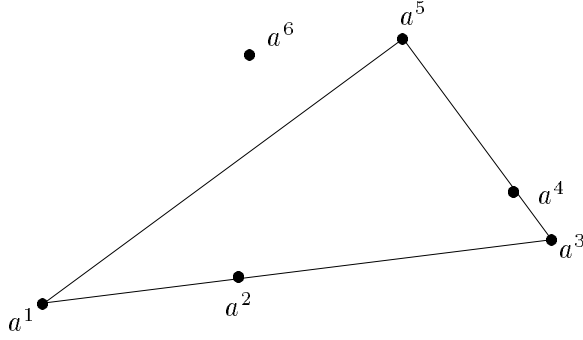


Figura 3

Notemos que, la base de Lagrange l_3 está dada por $l_3(y) = b_3(y) - \sum_{j=1, \dots, 6, j \neq 3} b_3(a^j)l_j(y)$, y en consecuencia se deduce inmediatamente que l_3 también satisface las cotas deseadas \square

Finalmente, vamos a demostrar que las bases de Lagrange asociadas a la distribución de puntos para el caso más general, como se muestra en la Figura 1, satisfacen las propiedades 4) y 5)

Lema 3.3.4 *Sea $x \in \Omega$, $m = 2$ y supongamos que existen puntos $a^j, 1 \leq j \leq 6$ en $B_{\frac{R}{2}}(x)$ como se muestra en la Figura 1 tales que los triángulos de vértices $\{a^1, a^2, a^5\}$, $\{a^4, a^5, a^6\}$, $\{a^1, a^2, a^6\}$, $\{a^2, a^3, a^4\}$ y $\{a^2, a^3, a^5\}$ satisfacen la condición CR luego, existe una constante $C = C(\sigma)$ tal que $\forall y \in B_{2R}(x) \cap \Omega$ las bases de Lagrange $l_i, 1 \leq i \leq 6$ asociadas a los puntos $a^j, 1 \leq j \leq 6$ satisfacen*

$$\begin{aligned} |l_i(y)| &\leq C \\ \left| \frac{\partial l_i}{\partial y_j}(y) \right| &\leq \frac{C}{R} \quad 1 \leq j \leq 2 \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Dem. Por el mismo argumento utilizado en el Lema anterior las bases de Lagrange $l_j \in \mathcal{P}_2$, $4 \leq j \leq 6$ pueden escribirse como $l_4 = c_4 L_{13} L_{56}$, $l_5 = c_5 L_{13} L_{46}$, y $l_6 = c_6 L_{13} L_{45}$, donde las constantes c_j se determinan usando que $l_j(a^j) = 1$, $4 \leq j \leq 6$.

Usando nuevamente el resultado del Lema 3.3.1 podemos construir $b_1, b_2 \in \mathcal{P}_1$ de la forma $b_1 = c_1 L_{35}$ y $b_2 = c_2 L_{15}$ donde las constantes c_j se determinan imponiéndoles que $b_j(a^j) = 1$, $1 \leq j \leq 2$. Con esta construcción resulta que $\{b_1, b_2, l_4, l_5, l_6\}$ son independientes y satisfacen la acotaciones deseadas si los triángulos de vértices $\{a^1, a^2, a^5\}$, $\{a^4, a^5, a^6\}$, $\{a^1, a^2, a^6\}$ y $\{a^2, a^3, a^4\}$ satisfacen la condición CR.

Necesitamos ahora construir b_3 de forma tal que resulte independiente de las otras, i.e, quere-

mos ver que existe $b_3 \in \mathcal{P}_2$ con $b_3(a^3) = 1$ tal que la siguiente matriz resulta nosingular.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3(a^1) & 0 & 0 & 0 \\ b_1(a^2) & 1 & b_3(a^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2(a^3) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1(a^4) & b_2(a^4) & b_3(a^4) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3(a^5) & 0 & 1 & 0 \\ b_1(a^6) & b_2(a^6) & b_3(a^6) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que esta matriz resultará nosingular si la submatriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3(a^1) \\ b_1(a^2) & 1 & b_3(a^2) \\ 0 & b_2(a^3) & 1 \end{pmatrix}$$

es nosingular.

Dado T el triángulo de vértices $\{a^1, a^3, a^5\}$ consideramos F la transformación afín que manda \hat{T} en T , i.e, $F(\hat{T}) = T (y_1, y_2) = F(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$, donde \hat{T} es el triángulo de referencia que se muestra en la Figura 4.

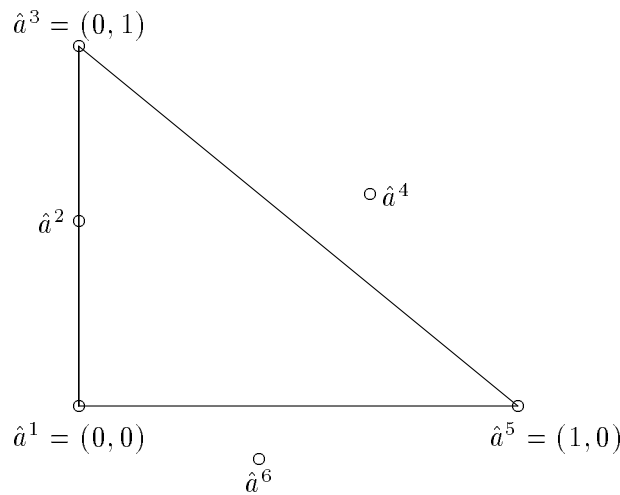


Figura 4

A fin de facilitar los cálculos para obtener b_3 trabajaremos en el triángulo de referencia \hat{T} . En este caso las correspondientes bases \hat{b}_1 y \hat{b}_2 estan dadas por $\hat{b}_1(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = 1 - \hat{y}_1 - \hat{y}_2$ y $\hat{b}_2(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = \frac{\hat{y}_2}{\hat{a}_2^2}$, con $\hat{a}^2 = (0, \hat{a}_2^2)$ (observemos que si los triángulos de vértices $\{\hat{a}^1, \hat{a}^2, \hat{a}^5\}$ y $\{\hat{a}^2, \hat{a}^3, \hat{a}^5\}$ satisfacen la condición CR, lo cual se sigue del hecho de que los triángulos de vértices $\{a^1, a^2, a^5\}$ y $\{a^2, a^3, a^5\}$ la satisfacen, \hat{a}_2^2 es diferente de 0 y 1). Vamos a tomar $\hat{b}_3 \in \mathcal{P}_2$ tal que $\hat{b}_3|_{L_{15}} = 0$, $\hat{b}_3(\hat{a}^3) = 1$

independiente de las otras. Un simple cálculo muestra que podemos seleccionar $\hat{b}_3(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = \hat{y}_2^2$ y en consecuencia $b_3 = \hat{b}_3 \circ F^{-1}$, i.e, $b_3(y_1, y_2) = \hat{b}_3(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$.

A partir de que el triángulo de vértices $\{a^1, a^2, a^5\}$ satisface la condición de regularidad, el triángulo de vértices $\{a^1, a^3, a^5\}$ también la cumple y en consecuencia la base b_3 está acotada independientemente de R .

Finalmente, podemos obtener las bases de Lagrange l_1, l_2, l_3 simplemente como una combinación lineal de b_1, b_2, b_3, l_4, l_6 donde los coeficientes de la combinación resultan acotados por una constante que depende de σ y la demostración concluye \square

Observación 3.3.1 *Es cierto que la hipótesis de tener tres puntos alineados, como supone la distribución de puntos que consideramos en la Figura 1, puede parecer bastante restrictiva. Sin embargo, es importante notar que como las bases de Lagrange son continuas respecto de los puntos de interpolación las cotas obtenidas deberán mantenerse si tenemos puntos que tengan una distribución suficientemente próxima a la que se muestra en la Figura 1.*

Capítulo 4

El método de cuadrados mínimos continuos con peso variable

En este Capítulo presentaremos un método de aproximación, el cual hemos dado en llamar método de cuadrados mínimos continuos con peso variable (el que denotaremos de ahora en más CMLS), para el cual obtendremos estimaciones, tanto en L^∞ como en L^2 , del error cometido al aproximar la función y sus derivadas. Explicaremos, además como el método puede ser aprovechado para resolver ecuaciones diferenciales.

4.1 Descripción del método

El método CMLS puede describirse de la siguiente manera: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un conjunto abierto, acotado y con borde Lipschitz y sea u la función que deseamos aproximar. Denotamos, como antes, \mathcal{P}_m el conjunto de todos los polinomios en N variables de grado menor o igual a m y $\{p_1, \dots, p_s\}$ una base de \mathcal{P}_m con $s = \dim \mathcal{P}_m$. Dado $R > 0$, consideramos Φ_R una función con soporte en $\overline{B_R(0)}$ tal que $0 \leq \Phi_R \leq 1$. Para cada $x \in \Omega$ sea $P^c(x, y) = \sum_{j=1}^s \alpha_j^c(x) p_j(y)$ donde los coeficientes α_j^c , $1 \leq j \leq s$ son elegidos de forma tal que minimizan

$$J_x^c(\alpha) = \int_{\Omega} \Phi_R(x - z) (u(z) - P^c(x, z))^2 dz \quad (4.1.1)$$

Definimos el aproximante a u como $\hat{u}^c(x) = P^c(x, x) = \sum_{j=1}^s \alpha_j^c(x) p_j(x)$.

Vamos a enunciar las propiedades que supondremos sobre la función de peso Φ_R :

1. $\exists c_0 > 0$ tal que $\Phi_R(z) \geq c_0$, $\forall z \in B_{\frac{R}{2}}(0)$.
2. $\Phi \in C^1(B_R(0)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, y $\|\nabla \Phi_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{c_1}{R}$.

donde c_0 y c_1 son constantes independientes de R .

En primer lugar notemos que, si Φ_R satisface la propiedad 1) podemos definir para cada $x \in \Omega$ el producto interno

$$\langle f, g \rangle_x = \int_{\Omega} \Phi_R(x-z)f(z)g(z)dz \quad (4.1.2)$$

con la correspondiente norma asociada $\|f\|_x^2 = \langle f, f \rangle_x$. Luego, a partir de la teoría clásica de cuadrados mínimos, existe un único $P^c(x, \cdot)$ que minimiza $\|u - P\|_x$ sobre todos los $P \in \mathcal{P}_m$ ([12],[18],[20]) y por ende \hat{u}^c está bien definido.

Teorema 4.1.1 *Si Φ_R satisface la propiedad 1) cualquiera sea $x \in \Omega$ existe un único $P^c(x, \cdot) \in \mathcal{P}_m$ para el cual $\|u - P^c(x, \cdot)\|_x \leq \|u - P\|_x$ cualquiera sea $P \in \mathcal{P}_m$.*

Observación 4.1.1 *Observemos que, para cada $x \in \Omega$ si derivamos $J_x^c(\alpha)$ respecto de α_j obtenemos*

$$\int_{\Omega} \Phi_R(x-y)P(x,y)p_j(y)dy = \int_{\Omega} \Phi_R(x-y)u(y)p_j(y)dy \quad 1 \leq j \leq s$$

Como $P^c(x, y) = \sum_{i=1}^s \alpha_i^c(x)p_i(y)$ reemplazando en la expresión anterior arriamos al siguiente sistema

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i^c(x) \int_{\Omega} \Phi_R(x-y)p_i(y)p_j(y)dy = \int_{\Omega} \Phi_R(x-y)u(y)p_j(y)dy \quad 1 \leq j \leq s$$

i.e, $\alpha^c(x) = (\alpha_1^c(x), \dots, \alpha_s^c(x))$ es la solución del sistema $A(x)\alpha^c(x) = b(x)$ con

$$(A(x))_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_R(x-y)p_i(y)p_j(y)dy \quad b_j(x) = \int_{\Omega} \Phi_R(x-y)u(y)p_j(y)dy \quad 1 \leq i, j \leq s$$

Observación 4.1.2 *Para analizar la regularidad de \hat{u}^c , basta con ver cual es la regularidad de los coeficientes α_j^c , $1 \leq j \leq s$. Dado que α^c es la solución del sistema mencionado en la Observación anterior, es claro que si $\Phi_R \in C^l$ entonces α^c también, y por ende \hat{u}^c será tan regular como lo sea Φ_R .*

4.2 Estimaciones de error

Nuestro propósito es establecer como aproxima \hat{u}^c y sus derivadas a u y las derivadas de u . En principio vamos a suponer que la función a aproximar u está en $W^{m+1, \infty}(\Omega)$ (depués consideraremos el caso en que u sea menos regular, digamos $u \in H^{m+1}(\Omega)$).

Llamamos $f * g$ a la convolución de f con g , i.e,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(z)g(x-z)dz$$

Por C_0^∞ denotaremos las funciones en C^∞ con soporte compacto. Para llevar a cabo nuestro análisis de error vamos a hacer uso del siguiente resultado de Calderón y Zygmund [9], el cual nos proporciona una de las herramientas fundamentales para llevar adelante nuestras estimaciones. Por completitud incluiremos aquí la demostración.

Teorema 4.2.1 *Existe una función $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$, i.e, φ infinitamente diferenciable con soporte en $\overline{B_1(0)}$, tal que cualquiera sea $P \in \mathcal{P}_m$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\epsilon^N} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) P(y) dy = P(x)$$

i.e, $P = P * \varphi_\epsilon$ donde $\varphi_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^N} \varphi\left(\frac{z}{\epsilon}\right)$

Dem. Consideremos la clase de todas las funciones infinitamente diferenciables $\varphi(x)$ con soporte en $|x| \leq 1$, i.e, $C_0^\infty(B_1(0))$, y sea V el espacio vectorial de los puntos ξ_α , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq |\alpha| \leq m$. Definimos la aplicación lineal

$$T : C_0^\infty(B_1(0)) \longrightarrow V$$

como

$$T(\varphi) = \xi_\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) x^\alpha dx$$

donde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$. Si la aplicación T no es suryectiva, i.e, la imagen de T no es todo el espacio V , entonces debe existir algún elemento en el ortogonal a la imagen de T , i.e, existen números η_α , $0 \leq |\alpha| \leq m$, no todos nulos, tales que

$$\sum \eta_\alpha \xi_\alpha = 0 = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \sum \eta_\alpha x^\alpha dx = 0$$

cualquiera sea φ . En particular esto se tiene para cualquier φ de la forma $\varphi = \psi \sum \eta_\alpha x^\alpha$ con ψ función infinitamente diferenciable con soporte en $|x| \leq 1$ positiva para $|x| < 1$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) \left| \sum \eta_\alpha x^\alpha \right|^2 dx = 0$$

lo que implica que $\sum \eta_\alpha x^\alpha = 0$ para cualquier x con $|x| < 1$ y en consecuencia, $\eta_\alpha = 0$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, arrivando así a una contradicción. Luego, la imagen de T es V , i.e, dado cualquier elemento ξ_α de V , existe una función $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ tal que $\xi_\alpha = T(\varphi)$, en particular existe φ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) x^\alpha dx = 0, \quad 0 < |\alpha| \leq m$$

Dado cualquier polinomio Q de grado $\leq m$, es claro que si elegimos φ en esas condiciones resulta que $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z) Q(z) dz = Q(0)$ y en consecuencia haciendo el cambio de variables $z = \frac{x-y}{\epsilon}$ y reemplazando $Q(z)$ por $Q(z) = P(x - \epsilon z)$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\epsilon^N} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) P(y) dy = P(x)$$

y la demostración concluye \square

Observación 4.2.1 *Notemos que el resultado anterior también se tiene si consideramos las funciones φ infinitamente diferenciables pero con soporte en la intersección de la bola de radio 1 con un cono abierto con vértice en el origen.*

Teorema 4.2.2 *Sea $u \in W^{m+1,\infty}(\Omega)$ y para cada $x \in \Omega$ consideremos $P^c(x, \cdot)$ como antes, si Φ satisface las propiedades 1) y 2) entonces existe una constante C independiente de R tal que $\forall y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$*

$$|D_y^\beta(u(y) - P^c(x, y))| \leq CR^{m+1-|\beta|} \|D^{m+1}u\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)} \leq CR^{m+1-|\beta|} \|D^{m+1}u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad 0 \leq |\beta| \leq k$$

y en consecuencia $\forall x \in \Omega$

$$|u(x) - \hat{u}^c(x)| \leq CR^{m+1} \|D^{m+1}u\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)} \leq CR^{m+1} \|D^{m+1}u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Dem. Sea $x \in \Omega$, como Ω tiene borde Lipschitz para R chico podemos suponer que, cualquiera sea $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ existe un cono abierto con vértice en y y de amplitud γ , independiente de y , tal que la intersección del cono con $B_{\frac{R}{4}}(y)$, la cual llamaremos $\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)$, está contenida en Ω (ver, por ejemplo, [17]). Dado que $u \in W^{m+1,\infty}(\Omega)$, para cada $x \in \Omega$ y cualquiera sea $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ podemos construir $T(x, y)$ el polinomio de Taylor, asociado a u , centrado en x de grado $\leq m$, i.e.,

$$T(x, y) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} D^\beta u(x) (y - x)^\beta$$

En vista del Teorema 4.2.1 y la observación 4.2.1, existe una función infinitamente diferenciable ψ_R con soporte en $\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(0)$ definida por $\psi_R(w) = (\frac{1}{R})^N \psi(\frac{w}{R})$ con $\psi \in C_0^\infty(\mathcal{C}_1(0))$ tal que, cualquiera sea $Q \in \mathcal{P}_m$, $Q = Q * \psi_R$, i.e., $Q(y) = \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) \psi_R(y - z) dz = \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} Q(z) \psi_R(y - z) dz$.

Sea $Q(y) = P^c(x, y) - T(x, y)$, como Q es un polinomio de grado $\leq m$. Luego

$$|Q(y)| \leq \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |P^c(x, z) - u(z)| |\psi_R(y - z)| dz + \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |u(z) - T(x, z)| |\psi_R(y - z)| dz \quad (4.2.3)$$

Consideremos ahora el primer término en el lado derecho de (4.2.3) aplicando la desigualdad de Schwartz tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |P^c(x, z) - u(z)| |\psi_R(y - z)| dz \leq \left(\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |P^c(x, z) - u(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |\psi_R(y - z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.4)$$

Como $\psi \in C_0^\infty(\mathcal{C}_1(0))$ existe una constante C tal que

$$\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |\psi_R(y - z)|^2 dz \leq \frac{C}{R^{2N}} \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} dz = C \frac{1}{R^N}$$

Usando esto en (4.2.4) y el hecho de que $\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y) \subset B_{\frac{R}{4}}(y) \cap \Omega \subset B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \Omega$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |P^c(x, z) - u(z)| |\psi_R(y - z)| dz \leq CR^{-\frac{N}{2}} \left(\int_{B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \Omega} |P^c(x, z) - u(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

A partir de que Φ_R satisface la propiedad 1), i.e, existe una constante $c_0 > 0$, independiente de R , tal que $\Phi_R(z) \geq c_0$ para $z \in B_{\frac{R}{2}}(0)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \Omega} |P^c(x, z) - u(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C \left(\int_{B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \Omega} |P^c(x, z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\int_{B_R(x) \cap \Omega} |P^c(x, z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Como $P^c(x, \cdot)$ es el polinomio en \mathcal{P}_m que minimiza $J_x^c(\alpha)$ tenemos que cualquiera sea $P \in \mathcal{P}_m$.

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x) \cap \Omega} |P^c(x, z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz &= \int_{\Omega} |P^c(x, z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \\ &\leq \int_{\Omega} |P(z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \\ &= \int_{B_R(x) \cap \Omega} |P(z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \end{aligned}$$

En particular se tiene para $P(z) = T(x, z)$ y entonces resulta que

$$\left(\int_{B_R(x) \cap \Omega} |P^c(x, z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{B_R(x) \cap \Omega} |T(x, z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

Como por hipótesis $0 \leq \Phi_R \leq 1$ se sigue que

$$\left(\int_{B_R(x) \cap \Omega} |T(x, z) - u(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{B_R(x) \cap \Omega} |T(x, z) - u(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definimos la función $N_R u(x)$ como

$$N_R u(x) = \frac{1}{R^{m+1}} \left(\frac{1}{R^N} \int_{B_R(x) \cap \Omega} |T(x, z) - u(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

En consecuencia, para el primer término del lado derecho de (4.2.3), existe una constante C , independiente de R , tal que

$$\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |P^c(x, z) - u(z)| |\psi_R(y - z)| dz \leq C R^{m+1} N_R u(x) \quad (4.2.5)$$

Consideremos ahora el segundo término del lado derecho de (4.2.3). Usando la desigualdad de Schwartz y el hecho de que ψ está acotada tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |u(z) - T(x, z)| |\psi_R(y - z)| dz &\leq \left(\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |u(z) - T(x, z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |\psi_R(y - z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C R^{-\frac{N}{2}} \left(\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |u(z) - T(x, z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C R^{-\frac{N}{2}} \left(\int_{B_R(x) \cap \Omega} |u(z) - T(x, z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y por ende

$$\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |u(z) - T(x, z)| |\psi_R(y - z)| dz \leq CR^{m+1} N_R u(x) \quad (4.2.6)$$

Usando (4.2.5) y (4.2.6) en (4.2.3) resulta que

$$|P^c(x, y) - T(x, y)| \leq CR^{m+1} N_R u(x) \quad (4.2.7)$$

y en consecuencia para cualquier $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ existe una constante C , independiente de R , tal que

$$|P^c(x, y) - u(y)| \leq CR^{m+1} N_R u(x) + |T(x, y) - u(y)| \quad (4.2.8)$$

En particular tomando $y = x$ concluimos que

$$|P^c(x, x) - u(x)| = |P^c(x, x) - T(x, x)| \leq CR^{m+1} N_R u(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (4.2.9)$$

Notemos que $D_y^\beta Q = D_y^\beta(Q * \psi_R) = Q * D_y^\beta \psi_R$, i.e.,

$$\begin{aligned} D_y^\beta Q(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} Q(z) D_y^\beta \psi_R(y - z) dz = R^{-N-|\beta|} \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} Q(z) (D^\beta \psi)\left(\frac{y-z}{R}\right) dz \\ &= R^{-N-|\beta|} \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} (P^c(x, z) - T(x, z)) (D^\beta \psi)\left(\frac{y-z}{R}\right) dz \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

En vista de que $\psi \in C_0^\infty(\mathcal{C}_1(0))$ y (4.2.7) existe una constante C tal que, cualquiera sea β , $0 \leq |\beta| \leq k$ se tiene que

$$\begin{aligned} |D_y^\beta(u(y) - P^c(x, y))| &\leq |D_y^\beta(u(y) - T(x, y))| + |D_y^\beta(T(x, y) - P^c(x, y))| \\ &\leq |D_y^\beta(u(y) - T(x, y))| + CR^{m+1-|\beta|} N_R u(x) \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Como $u \in W^{m+1, \infty}(\Omega)$ y T es el polinomio de Taylor de grado menor o igual que m , cualquiera sea $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ (podemos suponer que el segmento que une x con y está contenido en $B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ para R chico) se tiene que

$$N_R u(x) \leq C \|D^{m+1} u\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)}$$

y dado que para cualquier función u sabemos que la derivada del polinomio de Taylor de grado m de u es el polinomio de Taylor de grado $m-1$ de la derivada de u , se tiene además que

$$|D_y^\beta(u(y) - T(x, y))| \leq CR^{m+1-|\beta|} \|D^{m+1} u\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega)}$$

Usando esto en (4.2.9) y (4.2.11) concluye la demostración. \square

Observación 4.2.2 *En el teorema anterior hemos establecido que dado $x \in \Omega$ para cualquier $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ se tiene que*

$$|D_y^\beta(u(y) - P^c(x, y))| \leq CR^{m+1-|\beta|} \|D^{m+1} u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad 0 \leq |\beta| \leq k$$

Como $P^c(x, y) = \sum_{j=1}^s \alpha_j^c(x) p_j(y)$ entonces $D_y^\beta P^c(x, y) = \sum_{j=1}^s \alpha_j^c(x) D^\beta p_j(y)$, dado que la estimación se tiene para cualquier $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ en particular se tiene para $y = x$ y en consecuencia

$$|D^\beta u(x) - \sum_{j=1}^s \alpha_j^c(x) D^\beta p_j(x)| \leq C R^{m+1-|\beta|} \|D^{m+1} u\|_{L^\infty(B_R(x) \cap \Omega)}$$

Tenemos entonces, hasta ahora, estimaciones del error cometido al aproximar u por \hat{u}^c y $D^\beta u$ por $\sum_{j=1}^s \alpha_j^c D^\beta p_j$ en lugar de aproximarlas por $D^\beta \hat{u}^c$.

Antes de proceder con las estimaciones de error para las derivadas hagamos la siguiente observación

Observación 4.2.3 Supongamos que u está definida en todo \mathbb{R}^N (recordemos que si $u \in W^{m+1, \infty}(\Omega)$ entonces, u puede extenderse a \mathbb{R}^N con la misma regularidad en vista de que Ω tiene borde Lipschitz) y sea, para cada $x \in \Omega$, $P(u, x, y) = \sum_{j=1}^s \alpha_j(x) p_j(y)$ donde los coeficientes α_j , $1 \leq j \leq s$ son elegidos de forma tal que minimizan

$$J_x(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_R(x-z)(u(z) - P(u, x, z))^2 dz$$

con Φ_R como antes. Definimos el aproximante a u como $P(u, x, x) = \sum_{j=1}^s \alpha_j(x) p_j(x)$ entonces, en este caso se tiene que,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(P(u, x, x)) = P\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, x, x\right) \quad 1 \leq j \leq s \quad (4.2.12)$$

i.e, la derivada del aproximante es el aproximante de la derivada.

Dado que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (P(u, x, y) - u(y)) q(y) \Phi_R(x-y) dy = 0$$

cualquiera sea $q \in \mathcal{P}_m$, (4.2.12) se demuestra, básicamente, usando esta relación de ortogonalidad en $x_h = (x_1, \dots, x_j+h, \dots, x_N)$ y haciendo el cambio de variables $y \rightarrow y_h = (y_1, \dots, y_j+h, \dots, y_N)$ lo que conduce a concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (P(u, x_h, y_h) - u(y_h)) q(y) \Phi_R(x-y) dy = 0$$

cualquiera sea $q \in \mathcal{P}_m$ y en consecuencia

$$P\left(\frac{u(x_h) - u(x)}{h}, x, x\right) = \frac{P(u, x_h, x_h) - P(u, x, x)}{h}$$

y la demostración concluye tomando límite para $h \rightarrow 0$.

Este argumento falla en nuestro caso pues al considerar \int_Ω en lugar de $\int_{\mathbb{R}^N}$ al hacer el cambio de variables podría modificarse el conjunto de integración a un conjunto no contenido en Ω .

El resultado que nos proporciona el siguiente Lema nos permitirá establecer el orden con que aproximan las primeras derivadas de \hat{u}^c a las primeras derivadas de u .

Lema 4.2.1 Sea $u \in W^{m+1,\infty}(\Omega)$ y para cada $x \in \Omega$ consideremos $P^c(x, \cdot)$ como antes, si Φ_R satisface las propiedades 1) y 2) entonces existe una constante C independiente de R tal que $\forall y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$

$$\left| \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial x_j} \right| \leq C R^m \|D^{m+1}u\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)}, \quad 1 \leq j \leq N$$

Dem. Vamos a hacer la demostración para el caso $j = 1$, dado que para los otros valores de j es análoga. Sea $x \in \Omega$ tomemos $h > 0$ suficientemente pequeño de manera que $(x_1 + h, \dots, x_N) \in \Omega$ para simplificar notación llamamos x_h a $(x_1 + h, \dots, x_N)$. Por el mismo argumento usado en la demostración del Teorema 4.2.2 existe $\psi_R \in C_0^\infty$ con soporte en $\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(0)$ tal que cualquiera sea $Q \in \mathcal{P}_m$, $Q = Q * \psi_R$. Para cada $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$, definimos $Q(y) = P^c((x_1 + h, \dots, x_N), y) - P^c(x, y) = P^c(x_h, y) - P^c(x, y)$. Como Q es un polinomio en y de grado menor o igual que m se tiene que

$$Q(y) = \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} Q(z) \psi_R(y - z) dz$$

con $\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y) \subset \Omega$. Luego usando la desigualdad de Schawrtz y el hecho de que $\psi_R(w) = \frac{1}{(\frac{R}{4})^N} \psi(\frac{w}{\frac{R}{4}})$ con ψ acotada, independientemente de R , tenemos que

$$\begin{aligned} |Q(y)| &\leq \int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |Q(z)| |\psi_R(y - z)| dz \\ &\leq \frac{C}{R^{\frac{N}{2}}} \left(\int_{\mathcal{C}_{\frac{R}{4}}(y)} |Q(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{R^{\frac{N}{2}}} \left(\int_{B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \Omega} |Q(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Usando esta acotación y el hecho de que Φ_R satisface la propiedad 1) tenemos que

$$|Q(y)|^2 \leq \frac{C}{R^N} \int_{B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \Omega} |Q(z)|^2 dz \leq \frac{C}{R^N} \int_{B_{\frac{R}{2}}(x) \cap \Omega} |Q(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz \leq \frac{C}{R^N} \int_{\Omega} |Q(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Q(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz &= \int_{\Omega} (P^c(x_h, z) - u(z))(P^c(x_h, z) - P^c(x, z)) \Phi_R(x - z) dz \\ &\quad + \int_{\Omega} (u(z) - P^c(x, z))(P^c(x_h, z) - P^c(x, z)) \Phi_R(x - z) dz \end{aligned}$$

En vista de que $P^c(x, \cdot)$ es la proyección ortogonal de u sobre el espacio \mathcal{P}_m respecto del producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$, sabemos que, $\langle u - P^c(x, \cdot), P \rangle_x = 0$ cualquiera sea $P \in \mathcal{P}_m$ en particular se tiene para $P = Q$ y en consecuencia

$$\int_{\Omega} |Q(z)|^2 \Phi_R(x - z) dz = \int_{\Omega} (P^c(x_h, z) - u(z)) Q(z) \Phi_R(x - z) dz$$

Para h suficientemente chico existe η tal que $\Phi_R(x - z) = \Phi_R(x_h - z) - h \frac{\partial \Phi_R}{\partial x_1}(\eta - z)$ y usando que $\langle u - P^c(x_h, \cdot), P \rangle_{x_h} = 0$ cualquiera sea $P \in \mathcal{P}_m$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (P^c(x_h, z) - u(z)) Q(z) \Phi_R(x - z) dz &= h \int_{\Omega} (u(z) - P^c(x_h, z)) Q(z) \frac{\partial \Phi_R}{\partial x_1}(\eta - z) dz \\ &\leq h \int_{\Omega} |u(z) - P^c(x_h, z)| |Q(z)| \left| \frac{\partial \Phi_R}{\partial x_1}(\eta - z) \right| dz \end{aligned}$$

Sabemos que $\frac{\partial \Phi_R}{\partial x_1}$ tiene soporte contenido en $\overline{B_R(0)}$ luego la integral se reduce a aquellos puntos $z \in B_R(\eta) \cap \Omega \subset B_{R+h}(x_h) \cap \Omega$, como además Φ_R satisface la propiedad 2) tenemos que

$$\int_{\Omega} (P^c(x_h, z) - u(z))Q(z)\Phi_R(x - z)dz \leq C \frac{h}{R} \int_{B_{R+h}(x_h) \cap \Omega} |u(z) - P^c(x_h, z)||Q(z)|dz$$

En (4.2.7) demostramos que dado $x_h \in \Omega$, $|T(x_h, z) - P^c(x_h, z)| \leq CR^{m+1}N_R u(x_h)$ cualquiera sea $z \in B_{\frac{R}{4}}(x_h) \cap \Omega$. En vista de que $T(x_h, z) - P^c(x_h, z)$ es un polinomio en z , la estimación se tiene también para $z \in B_{\frac{3}{2}R}(x_h) \cap \Omega$ (ver Observación 4.2.4) y en consecuencia

$$|u(z) - P^c(x_h, z)| \leq |u(z) - T(x_h, z)| + CR^{m+1}N_R u(x_h)$$

cualquiera sea $z \in B_{\frac{3}{2}R}(x_h) \cap \Omega$. Como nos interesa estimar para h chico podemos suponer que $B_{R+h}(x_h) \cap \Omega \subset B_{2R}(x) \cap \Omega$ luego

$$\begin{aligned} \int_{B_{R+h}(x_h)} |u(z) - P^c(x_h, z)||Q(z)|dz &\leq CR^{m+1}N_R u(x_h) \int_{B_{2R}(x) \cap \Omega} |Q(z)|dz \\ &+ \int_{B_{R+h}(x_h)} |u(z) - T(x_h, z)||Q(z)|dz \\ &\leq CR^{m+1}N_R u(x_h) \int_{B_{2R}(x) \cap \Omega} |Q(z)|dz \\ &+ CR^{\frac{N}{2}} \left(\int_{B_{R+h}(x_h)} |u(z) - T(x_h, z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \|Q\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \\ &\leq CR^{m+1+N} N_{\frac{3}{2}R} u(x_h) \|Q\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \end{aligned}$$

Usando nuevamente que Q es un polinomio, existe una constante C que dependerá solo de N tal que $\|Q\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)} \leq C \|Q\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega)}$ (ver nuevamente Observación 4.2.4) y por lo tanto

$$|Q(y)|^2 \leq CR^m h N_{\frac{3}{2}R} u(x_h) \|Q\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega)}$$

cualquiera sea $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ y en consecuencia

$$\|Q\|_{L^\infty(B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega)} \leq CR^m h N_{\frac{3}{2}R} u(x_h)$$

y por ende

$$\frac{|Q(y)|}{h} \leq CR^m N_{\frac{3}{2}R} u(x_h) \quad (4.2.13)$$

Usando que $N_{\frac{3}{2}R} u(x_h) \leq \|D^{m+1}u\|_{L^\infty(B_{\frac{3}{2}R}(x_h) \cap \Omega)} \leq \|D^{m+1}u\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)}$, la demostración concluye tomando $h \rightarrow 0$. \square

Observación 4.2.4 Dado $x \in \Omega$ y Q un polinomio de grado menor o igual que m para el cual se tiene que existe $E = E(R)$ tal que cualquiera sea $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$,

$$|Q(y)| \leq E(R)$$

Luego existe una constante γ , independiente de R y de Q , tal que cualquiera sea $y \in B_{\frac{3}{2}R}(x) \cap \Omega$

$$|Q(y)| \leq \gamma E(R)$$

Esto puede verse simplemente considerando s ($s = \dim \mathcal{P}_m$) puntos en $B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$, llamemoslos ξ_1, \dots, ξ_s , seleccionados tal que las bases de Lagrange $(l_j)_{1 \leq j \leq s}$, asociadas a esos puntos, están acotadas en $B_{\frac{3}{2}R}(x) \cap \Omega$ por una constante c_L independiente de R . Luego

$$|Q(y)| \leq \sum_{j=1}^s |Q(\xi_j) l_j(y)| \leq s c_L E(R) \leq \gamma E(R)$$

Corolario 4.2.1 Sea $u \in W^{m+1, \infty}(\Omega)$ y sea $\hat{u}^c(x) = P^c(x, x)$ la aproximación a u dada por CMLS, si Φ satisface las propiedades 1) y 2) entonces existe una constante C independiente de R tal que para cualquier $x \in \Omega$

$$|\nabla(u(x) - \hat{u}^c(x))| \leq C R^m \|D^{m+1} u\|_{L^\infty(B_{2R}(x) \cap \Omega)}$$

Dem. Dado que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} P^c(x, x) = \left\{ \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial x_j} + \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial y_j} \right\} \Big|_{y=x} \quad (4.2.14)$$

es suficiente estimar $|\frac{\partial u(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial x_j} - \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial y_j}|$, $\forall y \in B_R(x) \cap \Omega$. Luego, el resultado se tiene como una consecuencia del Teorema 4.2.2 y el Lema 4.2.1. \square

El Teorema 4.2.2 junto con el Corolario 4.2.1 proveen estimaciones de error en L^∞ para la función y sus primeras derivadas suponiendo que $u \in W^{m+1, \infty}(\Omega)$. Sean $\{\eta_1, \dots, \eta_l\}$ puntos en Ω tales que $\Omega \subset \cup_{1 \leq j \leq l} B_R(\eta_j)$ y la cantidad de bolas que se superponen esta acotada por una constante C_η independiente de R , nuestro interés es ahora obtener estimaciones en $L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)$, $1 \leq j \leq l$, del error cometido al aproximar la función y sus primeras derivadas, por el aproximante y sus primeras derivadas con menos requerimiento de regularidad de la función u , esto es $u \in H^{m+1}(\Omega)$.

Corolario 4.2.2 Sea $u \in H^{m+1}(\Omega)$ y sea $\hat{u}^c(x) = P^c(x, x)$ la aproximación a u dada por CMLS, si Φ satisface las propiedades 1) y 2) entonces existe una constante C independiente de R tal que

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}^c\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} &\leq C R^{m+1} |u|_{H^{m+1}(B_{2R}(\eta_j) \cap \Omega)} \\ \|\nabla(u - \hat{u}^c)\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} &\leq C R^m |u|_{H^{m+1}(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)} \end{aligned}$$

Dem. Como $u \in H^{m+1}(\Omega)$ es claro que en este caso podría no tener sentido definir el polinomio de Taylor para u como hicimos en la demostración del Teorema 4.2.2 y el Corolario 4.2.1. Consideremos entonces T un polinomio de grado menor o igual que m el cual satisface

$$\|u - T\|_{H^k(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)} \leq C R^{m+1-k} |u|_{H^{m+1}(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)} \quad 0 \leq k \leq m \quad (4.2.15)$$

Una posible elección para T está dada por, [7],

$$T(y) = \frac{1}{|B|} \int_B T(z, y) dz$$

donde $B \subset B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega$ de forma tal que $B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega$ es estrellado respecto de B (la existencia de una bola B en tales condiciones puede suponerse para R chico dado que Ω tiene borde Lipschitz) y $T(z, y)$ denota el polinomio de Taylor para u de grado menor o igual que m centrado en z evaluado en y (otra posible elección de T puede verse en [34]). Siguiendo la demostración del Teorema 4.2.2 pero usando T en lugar de considerar el polinomio de Taylor, y por ende tomando $N_R u(x)$ como

$$N_R u(x) = \frac{1}{R^{m+1}} \left(\frac{1}{R^N} \int_{B_R(x) \cap \Omega} |T(z) - u(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

tenemos que cualquiera sea $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$

$$|u(y) - P^c(x, y)| \leq C R^{m+1} N_R u(x) + |T(y) - u(y)|$$

y en consecuencia

$$\|u - \hat{u}^c\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)}^2 \leq C R^{2(m+1)} \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} N_R u(x)^2 dx + C \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} |u(x) - T(x)|^2 dx$$

en vista de que

$$N_R u(x) = R^{-(m+1+\frac{N}{2})} \|u - T\|_{L^2(B_R(x) \cap \Omega)} \leq R^{-(m+1+\frac{N}{2})} \|u - T\|_{L^2(B_{2R}(\eta_j) \cap \Omega)}$$

cualquiera sea $x \in B_R(\eta_j) \cap \Omega$, la primer estimación se tiene usando (4.2.15).

Para obtener la estimación de error para las derivadas notemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial P^c(x, x)}{\partial x_k} \right)^2 dx &\leq C \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial y_k} \Big|_{y=x} \right)^2 dx \\ &+ C \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left(\frac{\partial P^c(x, y)}{\partial x_k} \Big|_{y=x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Consideremos, en primer lugar, el segundo término del lado derecho de (4.2.16). Siguiendo la demostración del Lema 4.2.1 pero tomando T en lugar de considerar el polinomio de Taylor, si llamamos $x_h = (x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_N)$ y $Q(y) = P^c(x_h, y) - P^c(x, y)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left(\frac{|Q(x)|}{h} \right)^2 dx &\leq C R^{2(m+1)} \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} N_{\frac{3}{2}R} u(x_h)^2 dx \\ &\leq C \|u - T\|_{L^2(B_{\frac{3}{2}R}(x_h) \cap \Omega)} \leq C \|u - T\|_{L^2(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)} \end{aligned}$$

Tomando limite para $h \rightarrow 0$ y usando (4.2.15) tenemos que

$$\int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left(\left| \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial x_k} \right|_{y=x} \right)^2 dx \leq C R^{2(m+1)} |u|_{H^{m+1}(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)}$$

Analicemos ahora el primer término del lado derecho de (4.2.16). y notemos que

$$\int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial y_k} \Big|_{y=x} \right)^2 dx \leq C \|u - T\|_{H^1(B_R(\eta_j) \cap \Omega)}^2 + \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial y_k} \Big|_{y=x} \right)^2 dx \quad (4.2.17)$$

Dado cualquier $x \in B_R(\eta_j) \cap \Omega$ y cualquiera sea $y \in B_{\frac{R}{4}}(x) \cap \Omega$ por el mismo razonamiento usado en (4.2.11) tenemos que $|D_y^\beta(T(y) - P^c(x, y))| \leq CR^{-|\beta|+m+1} N_R u(x)$. Como el resultado se tiene para cualquier y , en particular se tiene para $y = x$ y resulta que

$$\int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial P^c(x, y)}{\partial y_k} \Big|_{y=x} \right)^2 dx \leq CR^{2m} \int_{B_R(\eta_j) \cap \Omega} N_R u(x)^2 dx$$

Por lo tanto usando que T satisface (4.2.15) se sigue que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial \hat{u}^c}{\partial x_k} \right\|_{L^2(B_R(\eta_j) \cap \Omega)} \leq CR^m |u|_{H^{m+1}(B_{3R}(\eta_j) \cap \Omega)}$$

como deseabamos. \square

Observación 4.2.5 *Notemos que, como Ω está contenido en $\cup_{1 \leq j \leq l} B_R(\eta_j) \cap \Omega$ por el resultado obtenido en el Corolario 4.2.2 y por el mismo argumento que utilizamos en la Observación 3.2.1 del capítulo 3 se tiene que existe una constante C , independiente de R , tal que*

$$\|D^\beta(u - \hat{u}^c)\|_{L^2(\Omega)} \leq CR^{m+1-|\beta|} |u|_{H^{m+1}(\Omega)} \quad |\beta| \leq 1$$

.

4.3 La aplicación de CMLS a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales

En la sección anterior hemos establecido estimaciones del error cometido al aproximar u y sus derivadas por \hat{u}^c y las derivadas de \hat{u}^c . Es claro que para obtener la aproximación mediante CMLS es necesario calcular ciertas integrales que involucran a u . Nuestro propósito es presentar una alternativa de como se podría utilizar el método CMLS para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales.

Para cada $x \in \Omega$ consideremos $\hat{u}^c(x) = P^c(x, x) = \sum_{k=1}^s \alpha_k^c(x) p_k(x)$ la aproximación obtenida usando CMLS. Por lo mencionado en la Observación 4.1.1 sabemos que $\alpha^c(x) = (\alpha_1^c(x), \dots, \alpha_s^c(x))$ es la solución del sistema $A(x)\alpha^c(x) = b(x)$ con

$$(A(x))_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_R(x-y) p_i(y) p_j(y) dy \quad b_j(x) = \int_{\Omega} \Phi_R(x-y) u(y) p_j(y) dy \quad 1 \leq i, j \leq s$$

Es claro entonces que, necesitamos aproximar el valor de b_j , para ello consideremos $P_I(u, x, \cdot)$ el polinomio de grado $\leq m$ que interpola a u en s puntos $\{\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}\} \in B_R(x) \cap \Omega$ luego,

$$b_j(x) = \int_{\Omega} \Phi_R(x-y) u(y) p_j(y) dy = \int_{B_R(x) \cap \Omega} \Phi_R(x-y) u(y) p_j(y) dy$$

podemos aproximarlo por

$$\begin{aligned}\tilde{b}_j(x) &= \int_{B_R(x) \cap \Omega} \Phi_R(x-y) P_I(u, x, y) p_j(y) dy \\ &= \sum_{k \in \{j_i\}} \left(\int_{B_R(x) \cap \Omega} \Phi_R(x-y) l_k(y) p_j(y) dy \right) u(\xi_k) \\ &= \sum_{k \in \{j_i\}} a_j^k(x) u(\xi_k)\end{aligned}$$

Si definimos $a_j^k(x) = 0$ para aquellos k distintos de j_1, \dots, j_s , podemos escribir $\tilde{b}_j(x) = \sum_{k=1}^n a_j^k(x) u(\xi_k)$ y para cada $x \in \Omega$ resolvemos el sistema $A(x)\tilde{\alpha}(x) = \tilde{b}(x)$.

Construimos entonces una aproximación a u de la forma $\tilde{u}(x) = \tilde{P}^c(x, x) = \sum_{j=1}^s \tilde{\alpha}_j(x) p_j(x)$. Llamemos $\mathbf{p}^t = (p_1(x), \dots, p_s(x))$ y $\mathbf{a}^k = (a_1^k, \dots, a_s^k)^t$ entonces

$$\begin{aligned}\tilde{P}^c(x, x) &= \mathbf{p}(x)^t A^{-1}(x) \tilde{b} = \sum_{k=1}^n \mathbf{p}(x)^t A^{-1}(x) a^k(x) u(\xi_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_k(x) u(\xi_k)\end{aligned}\tag{4.3.18}$$

Observemos que para cada $x \in \Omega$, $\beta_k(x) = 0$ para aquellos k distintos de j_1, \dots, j_s , y por ende solo el valor de u en $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}$ tendrá influencia al considerar $\tilde{u}(x)$.

Dada una ecuación diferencial

$$Lu = f \text{ en } \Omega$$

con condiciones de borde

$$Bu = g \text{ en } \partial\Omega$$

con L y B operadores lineales, nos proponemos encontrar una aproximación a u de la forma $u_R = \sum_{j=1}^n \beta_j a_j$ con β_j como se definió en (4.3.18). El método de colocación, como ya hemos mencionado en Capítulos anteriores, consiste en imponerle a u_R que satisfaga la ecuación diferencial y las condiciones de borde, en ciertos puntos $\{z_1, \dots, z_n\} \in \bar{\Omega}$, i.e,

$$\begin{aligned}Lu_R|_{x=z_i} &= f(z_i) \quad z_i \in \Omega \\ Bu_R|_{x=z_i} &= g(z_i) \quad z_i \in \partial\Omega\end{aligned}$$

Arribando de esta manera a un sistema de n ecuaciones con n incógnitas a_1, \dots, a_n .

$$L_R a = F_R$$

donde L_R es una matriz de $n \times n$ tal que $(L_R)_{ij} = L(\beta_j(x))|_{x=z_i}$ si $z_i \in \Omega$ y $(L_R)_{ij} = B(\beta_j(x))|_{x=z_i}$ si $z_i \in \partial\Omega$ y F_R es un vector con componentes $f(z_i)$ o $g(z_i)$ según $z_i \in \Omega$ o $z_i \in \partial\Omega$.

La convergencia de este tipo de métodos se establece, como hemos mencionado anteriormente, a partir de la estabilidad y la consistencia del esquema resultante. Nuestras estimaciones de error junto con estimaciones del error cometido al aproximar b_j por \tilde{b}_j son las que proveerían la consistencia del método propuesto, y la estabilidad deberá analizarse para cada caso en particular.

Capítulo 5

Experimentos Numéricos

En este Capítulo vamos a presentar distintos ejemplos de la aplicación de MLS y CMLS a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Dentro de las características sobresalientes de este tipo de métodos se destaca la posibilidad de elegir funciones de peso apropiadas para cada problema, es en este aspecto en el que haremos hincapié. Con el propósito de ejemplificar como se puede aprovechar esta ventaja nos ocuparemos de la aplicación de estos métodos a la resolución numérica de la ecuación de convección - difusión.

5.1 El caso unidimensional

A lo largo de esta sección consideraremos el problema de resolver numéricamente la ecuación de convección-difusión

$$\begin{aligned} -u'' + bu' &= 0, \text{ en } (0, 1) \\ u(0) &= 0 \quad u(1) = 1 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

para diferentes valores de la constante $b > 0$.

5.1.1 Aplicaciones del método MLS

En el Capítulo 1 hemos descripto distintas alternativas de aplicación de MLS a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Como hemos mencionado anteriormente podemos elegir la función de peso Φ_R de manera de producir efectos convenientes en la aproximación. Como es sabido ([25], [31]), si el método de elementos finitos standard (tomando puntos equiespaciados y funciones lineales a trozos) es usado para resolver la ecuación (5.1.1) es necesario considerar mallas suficientemente finas $h \leq \frac{2}{b}$, donde h es el tamaño de la malla, para que no aparezcan oscilaciones. Por otro lado, si se aplica el método MLS es posible elegir Φ_R de forma tal de incorporar el carácter no-simétrico del problema cuando la convección domina y en consecuencia, introducir cierta clase de up-wind para el caso en que b es grande a fin de evitar la presencia de oscilaciones.

Aproximaciones de Galerkin

Vamos a presentar dos ejemplos que ejemplifican el uso de MLS como método de Galerkin para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Recordemos que dado el problema variacional: Hallar $u \in V \subset H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V$$

con a una forma bilineal, continua y coerciva en V y L un operador lineal y continuo, podemos usar MLS para definir aproximaciones de Galerkin como se explicó en la sección 1.2.1 del Capítulo 1.

Consideraremos entonces $V_R = span\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$, donde $\beta_j, 1 \leq j \leq n$ son las funciones base definidas en (1.1.6). Sabemos que si $\Phi_R \in C^1(B_R(0)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ luego $\beta_j \in H^1(\Omega)$ y en consecuencia podemos definir la aproximación de Galerkin $u_R \in V_R$ como

$$u_R(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j(x) u_j$$

donde u_1, \dots, u_n es la solución al sistema

$$\sum_{j=1}^n a(\beta_j, \beta_k) u_j = L(\beta_k), \quad 1 \leq k \leq n$$

Además por el Lema de Céa ([7], [10]), y los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 tenemos que :

$$\|u - u_R\|_V \leq \frac{c}{\gamma} \min_{v \in V_R} \|u - v\|_V \leq \frac{c}{\gamma} \|u - \hat{u}\|_V \leq CR^m \|u^{m+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (5.1.2)$$

y en virtud de los resultados de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2 tenemos también que existe C tal que

$$\|u - u_R\|_V \leq \frac{c}{\gamma} \|u - \hat{u}\|_V \leq CR^m |u|_{H^{m+1}(\Omega)} \quad (5.1.3)$$

donde c es la constante de continuidad y γ es la constante de coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ en V . En particular tenemos que, u_R converge a u cuando $R \rightarrow 0$.

Consideremos ahora una forma equivalente para la ecuación de convección-difusión (5.1.1) Sea $\tilde{u}(x) = u(x) - x$ luego tenemos que,

$$\begin{aligned} -\tilde{u}'' + b\tilde{u}' &= -b \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

El problema variacional es entonces hallar $\tilde{u} \in V = H_0^1(0, 1)$, tal que:

$$a(\tilde{u}, v) = L(v), \forall v \in V$$

donde

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, v) &= \int_0^1 \tilde{u}' v' + \int_0^1 b \tilde{u}' v \\ L(v) &= - \int_0^1 b v \end{aligned}$$

Es sabido que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva y continua [31] en consecuencia, las estimaciones de error (5.1.2) y (5.1.3) se tienen (con la constante C dependiendo de b).

Para $R > 0$ vamos a considerar la siguiente función de peso

$$\Phi_R(z) = \begin{cases} \frac{e^{\delta_1 (\frac{z}{R})^2} - e^{\delta_1}}{1 - e^{\delta_1}} & -R < z < 0 \\ \frac{e^{\delta_2 (\frac{z}{R})^2} - e^{\delta_2}}{1 - e^{\delta_2}} & 0 \leq z < R \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (5.1.5)$$

donde δ_1 y δ_2 son constantes que elegiremos dependiendo del valor de b . Vamos a considerar dos casos, $b = 1$ y $b = 20$. En ambos casos elegiremos puntos equiespaciados y el cálculo de las integrales se realizará generando una partición adecuada del intervalo de integración y calculando la integral en cada intervalito mediante la regla del punto medio. En el primer caso, $b = 1$, la convección y la difusión son del mismo orden y por lo tanto no es necesario hacer up-wind. La finalidad de este ejemplo es simplemente chequear el orden de convergencia que predijimos. Por ‘refinar’ entendemos reducir el valor de R agregando puntos de forma tal de preservar la configuración inicial. Podemos tomar, por ejemplo, $\delta_1 = \delta_2 = 1$ que corresponde a elegir una función de peso simétrica como se muestra en la Figura 5.1. En la Figura 5.2 mostramos, comparativamente, la solución exacta y la solución aproximada usando MLS con $n = 5$ puntos equiespaciados y $m = 1$. En la Figura 5.3 y la Figura 5.4 mostramos el orden del error, en términos de R , en la aproximación de la función y sus derivadas en norma L^∞ (para mayor claridad se graficó usando escala logarítmica, i.e, graficamos el logaritmo del error en función del logaritmo de R). Observamos que, se obtuvo orden óptimo en L^∞ para la aproximación tanto de u como de u' , i.e el orden esperado cuando se aproxima usando polinomios de grado 1. En particular se tiene el orden de convergencia en H^1 que predijimos.

El caso $b = 20$ es esencialmente distinto pues en este caso, la convección es dominante y por lo tanto, elegimos una función de peso no-simétrica tomando $\delta_1 = -30$ y $\delta_2 = 1$ como se muestra en la Figura 5.5. A fin de establecer comparaciones, en las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se muestran los resultados que se obtienen, en este caso, cuando se utiliza elementos finitos lineales standard, el método usual de up-wind de diferencias finitas y MLS respectivamente para $n=5$, y en las Figuras 5.9, 5.10 y 5.11 para $n=10$. Como es sabido el primer método presenta oscilaciones (que para evitarlas deberíamos trabajar con mallas más finas). Aunque no lo hemos demostrado, es de esperar que MLS permita introducir up-wind preservando el orden de convergencia cuadrático cuando $R \rightarrow 0$. En este sentido observemos que, si bien el método de diferencias finitas con up-wind al igual que MLS no presenta oscilaciones, la aproximación usando MLS es claramente mejor.

Colocación

Otra alternativa para la aplicación de MLS para resolver ecuaciones diferenciales es usar Colocación, como se explicó en la sección 1.2.2. Por la Observación 1.1.4 sabemos que si $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ luego las funciones base β_j están en $C^2(\Omega)$. Tomemos $m = 2$, a partir de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 tenemos demostrada la consistencia del método. Consideramos el caso $b = 20$ e intentamos introducir up-wind eligiendo una función de peso no-simétrica, como definimos a continuación y

cuyo gráfico se muestra en la Figura 5.12 con $\delta_1 = -30$ y $\delta_2 = 1$.

$$\Phi_R(z) = \begin{cases} \frac{e^{\delta_1(\frac{z}{R})^4} - e^{\delta_1}}{1 - e^{\delta_1}} (1 - (\frac{z}{R})^2)^4 & -R < z < 0 \\ \frac{e^{\delta_2(\frac{z}{R})^4} - e^{\delta_2}}{1 - e^{\delta_2}} (1 - (\frac{z}{R})^2)^4 & 0 \leq z < R \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (5.1.6)$$

En las Figuras 5.13 y 5.14 mostramos las aproximaciones obtenidas tomando puntos equiespaciados en los casos $n = 8$ y $n = 15$ respectivamente. Nuevamente podemos observar la ausencia de oscilaciones.

Fórmulas de Diferencias

Como explicamos anteriormente (ver sección 1.2.3 del Capítulo 1) el método MLS puede ser usado para generar fórmulas de diferencias finitas de la siguiente manera: Para cada $x \in \Omega$, sea $\mathbf{a}(x) = (a_k(x))_{1 \leq k \leq m+1}$ el que se obtiene minimizando $\sum_{j=1}^n \Phi(x - \xi_j) (u_j - \sum_{k=1}^{m+1} a_k(x) \frac{(\xi_j - x)^{k-1}}{(k-1)!})^2$ i.e \mathbf{a} es la solución al sistema

$$\mathbf{P}\mathbf{W}(x)\mathbf{P}^t \mathbf{a} = \mathbf{P}\mathbf{W}(x)\mathbf{u}$$

donde \mathbf{P} es una matriz de $m + 1 \times n$ cuya j -ésima fila es $\mathbf{p}_j = (p_j(\xi_1), \dots, p_j(\xi_n))$ con $p_j(y) = \frac{(y-x)^{j-1}}{(j-1)!}$, $\mathbf{u} = (u(\xi_1), \dots, u(\xi_n))^t$ y $\mathbf{W}(x)$ es la matriz diagonal de $n \times n$, $\mathbf{W}(x) = \text{diag}(\Phi_R(x - \xi_1), \dots, \Phi_R(x - \xi_n))$.

El método propone aproximar $u^{(k)}(x)$ por $a_{k+1}(x)$, $1 \leq k \leq m + 1$. y usando esta aproximación en la ecuación (5.1.4) se obtiene un esquema de diferencias finitas cuya consistencia está demostrada por el Teorema 2.2.3. La ventaja de este tipo de esquemas, a diferencia de Colocación, es que nos evitamos el cálculo de las derivadas de los coeficientes $a_k(x)$.

En la Figura 5.15 mostramos la aproximación obtenida para el caso $b = 20$ tomando $n = 8$, puntos equiespaciados, $m = 2$ y la función de peso definida en (5.1.6) con los mismos valores de δ_1 y δ_2 que utilizamos al aplicar colocación para este caso.

5.1.2 Ejemplo de aplicación de CMLS

Para los mismos ejemplos tratados en la sección anterior, mostramos los resultados obtenidos al aplicar CMLS a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales con la técnica que se mencionó en la sección (4.3) del Capítulo 4. En la Figura 5.16 presentamos el resultado obtenido para el caso $b = 1$ y en la Figuras 5.17 y 5.18 los resultados obtenidos para $b = 20$ con $n = 8$ y $n = 15$ puntos equiespaciados respectivamente. En ambos casos se utilizó la función de peso definida en 5.1.5 con los mismos parámetros de δ_1 y δ_2 que se utilizaron previamente, al aproximar mediante MLS, dependiendo del valor de b .

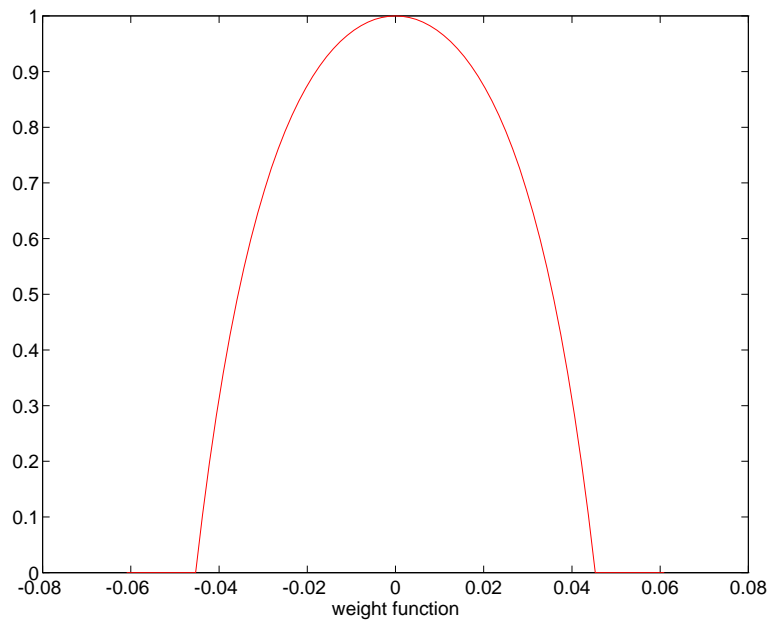


Figura 5.1: Función de peso simétrica

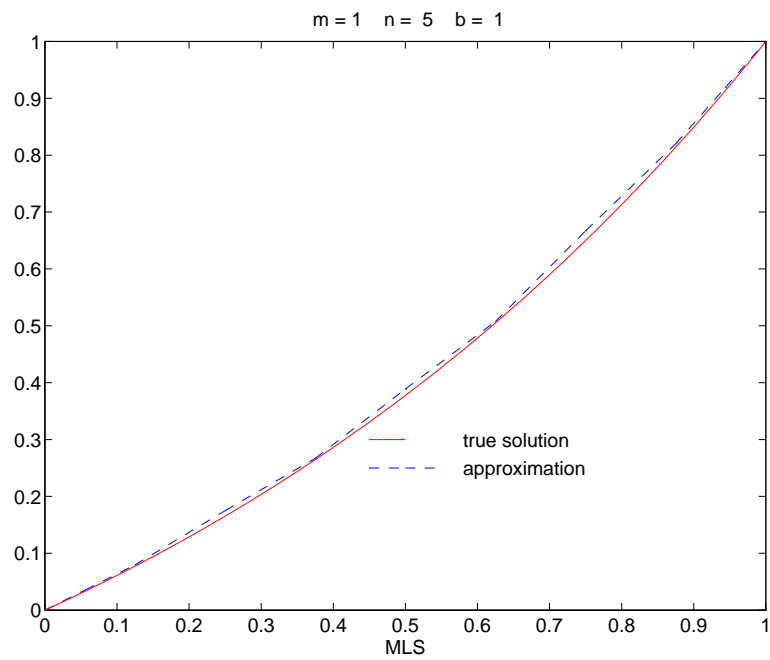


Figura 5.2: Solución exacta vs Solución por MLS

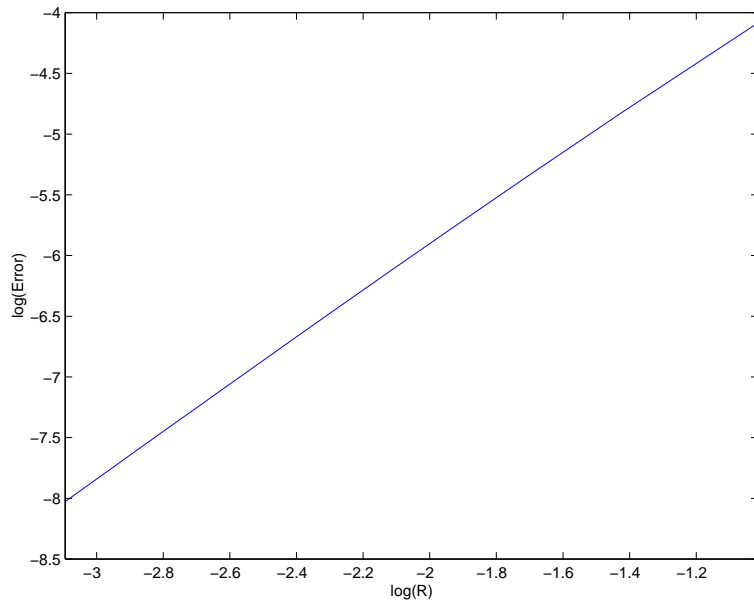


Figura 5.3: $\|u - u_R\|_{L^\infty(\Omega)} = O(R^2)$

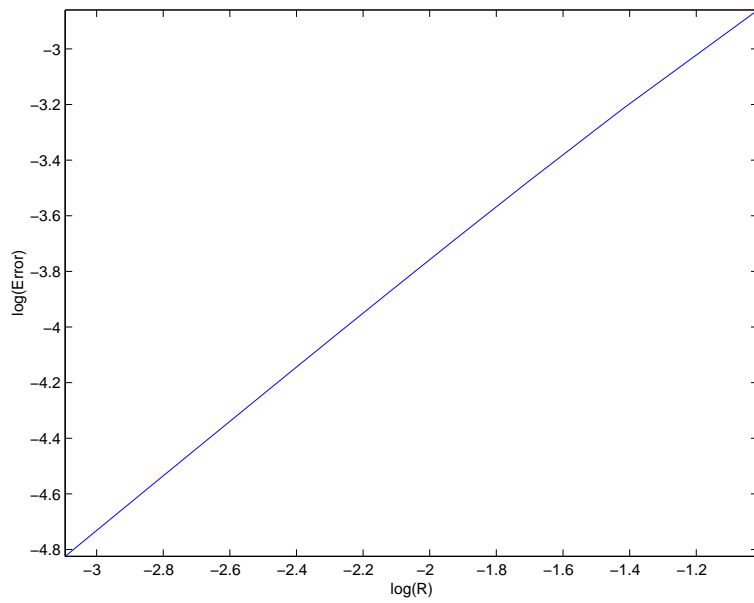


Figura 5.4: $\|u' - u'_R\|_{L^\infty(\Omega)} = O(R)$

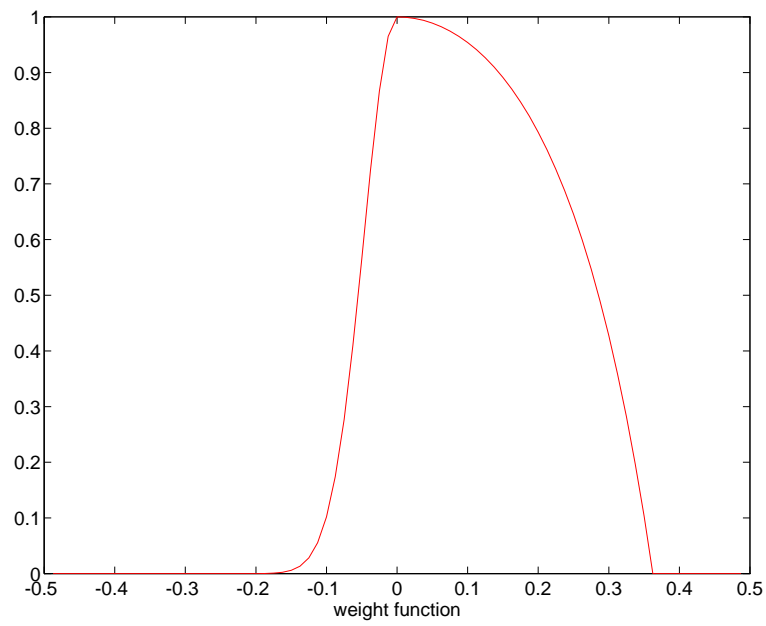


Figura 5.5: Função de peso no-simétrica

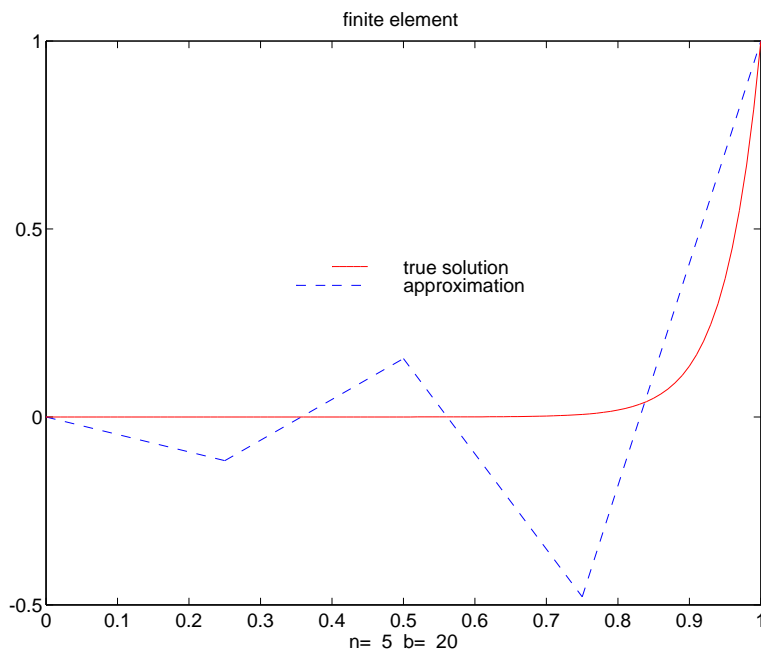


Figura 5.6: Solución exacta vs Solución por elementos finitos

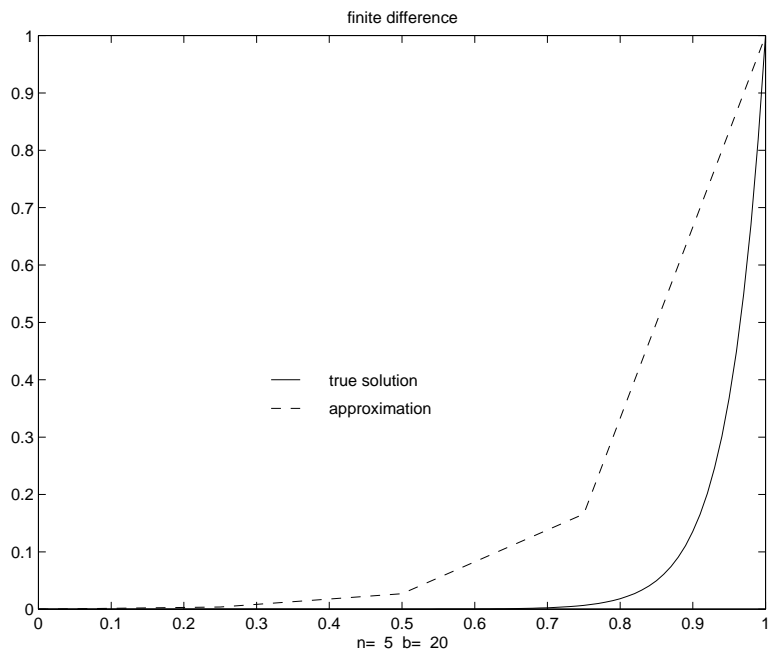


Figura 5.7: Solución exacta vs Solución por diferencias finitas upwind

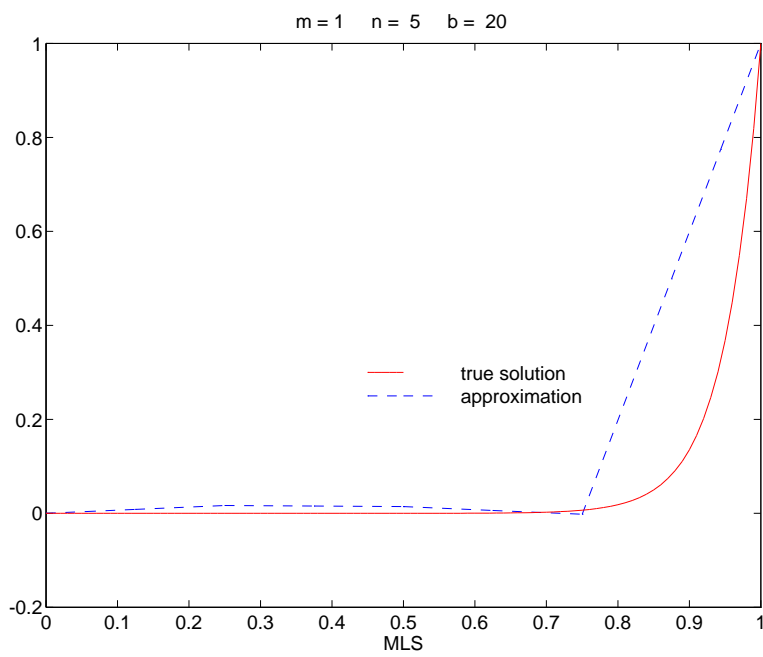


Figura 5.8: Solución exacta vs Solución por MLS

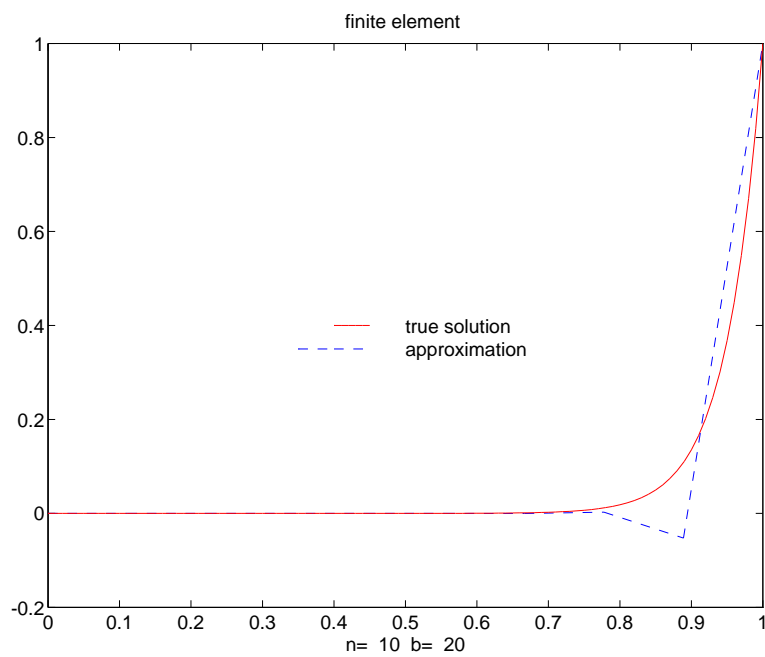


Figura 5.9: Solución exacta vs Solución por elementos finitos

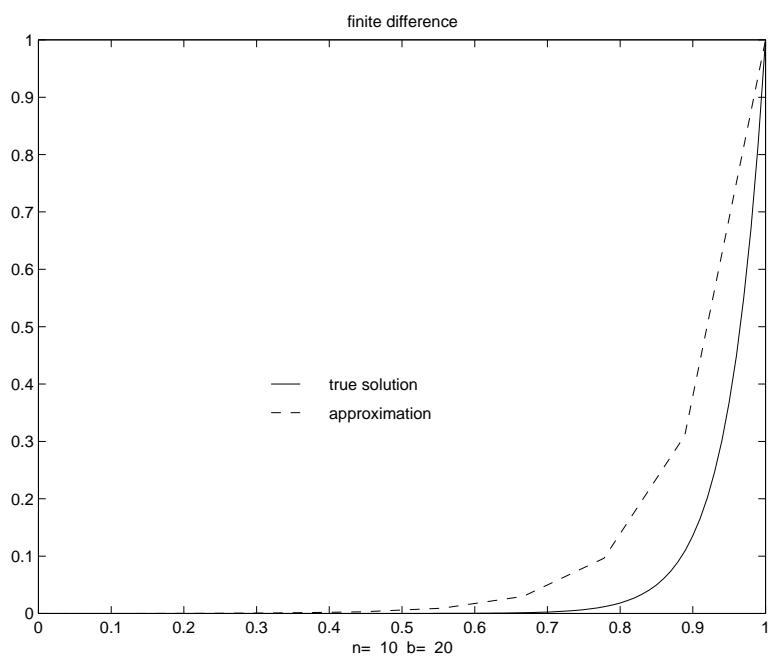


Figura 5.10: Solución exacta vs Solución por diferencias finitas upwind

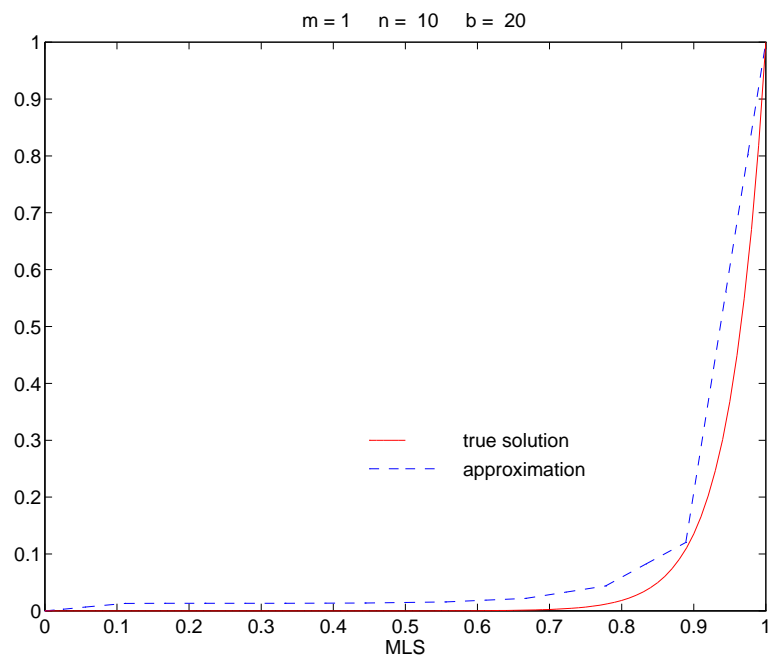


Figura 5.11: Solución exacta vs Solución por MLS

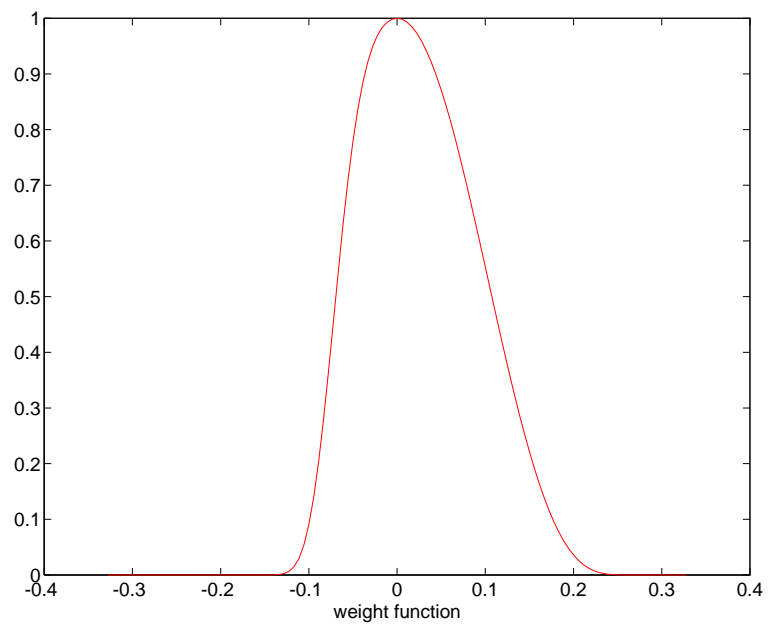


Figura 5.12: Función de peso

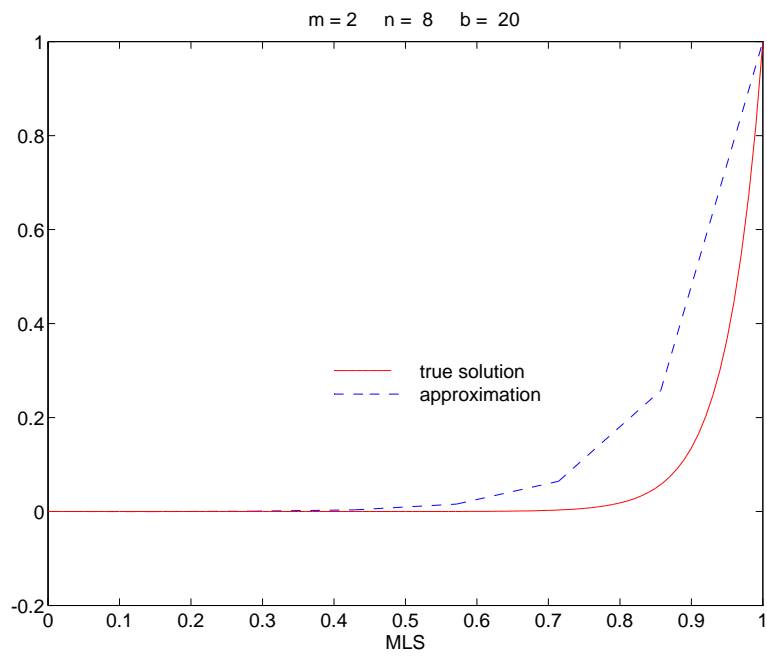


Figura 5.13: Solución exacta vs Solución usando colocación

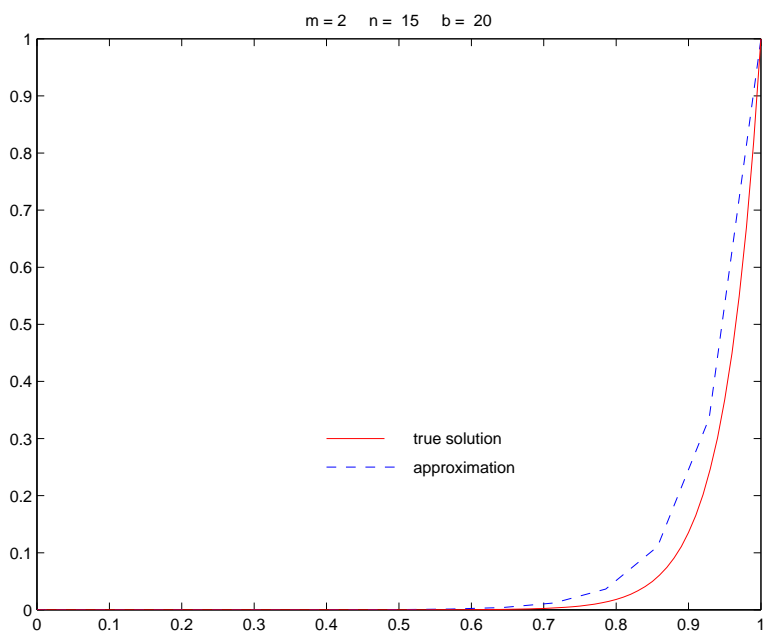


Figura 5.14: Solución exacta vs Solución usando colocación

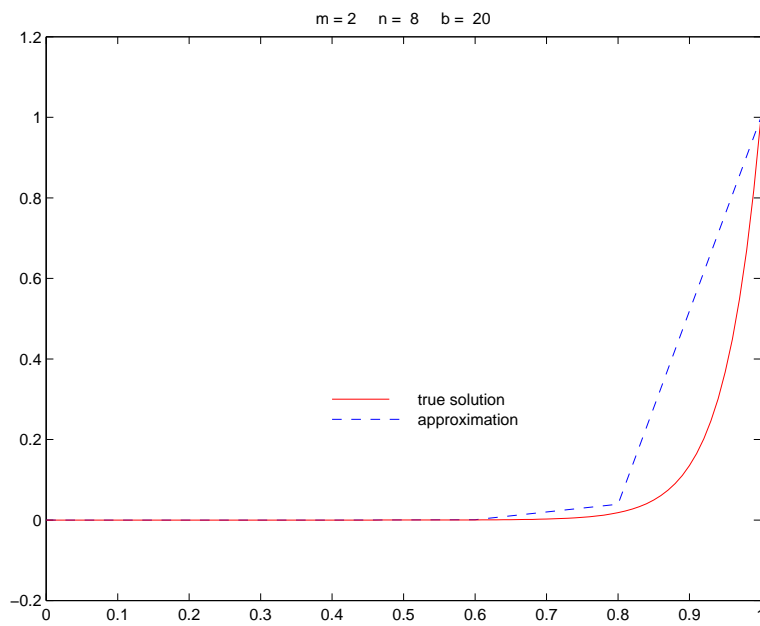


Figura 5.15: Solución exacta vs Solución aproximada

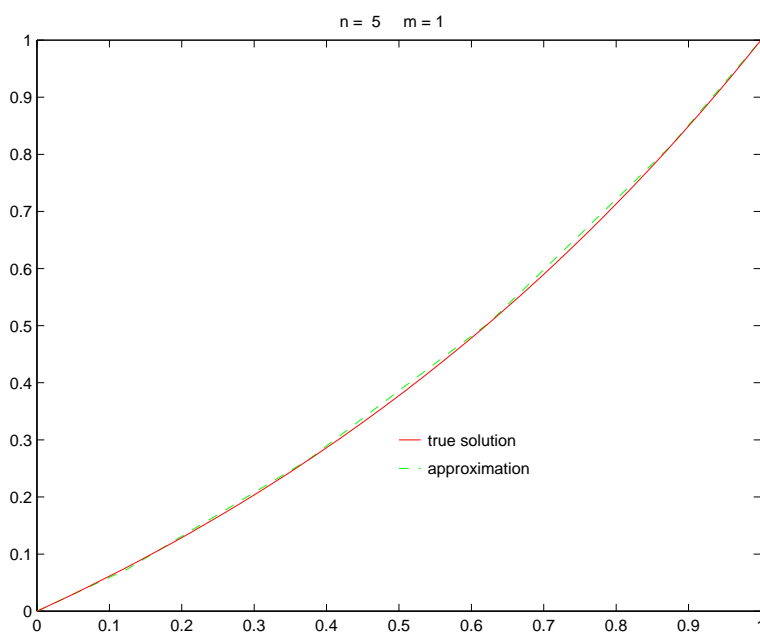


Figura 5.16: Solución exacta vs Solución usando CMLS

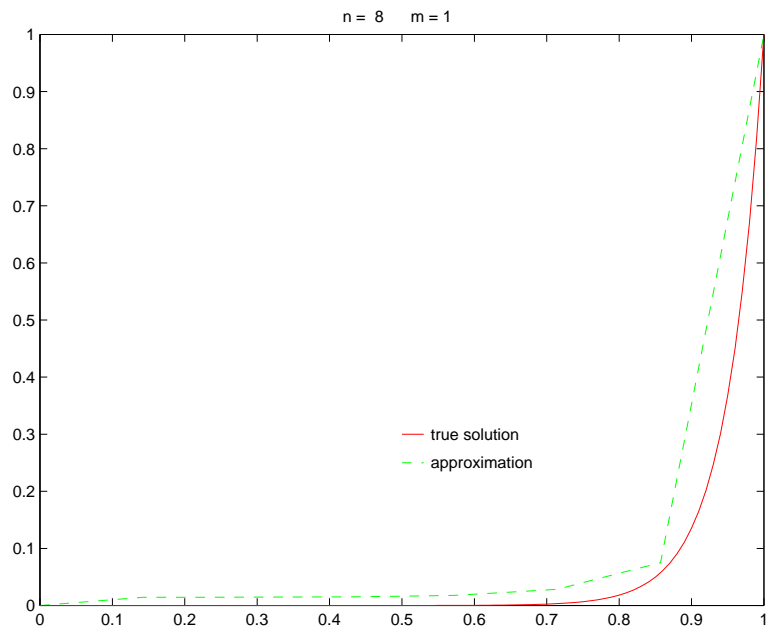


Figura 5.17: Solución exacta vs Solución usando CMLS

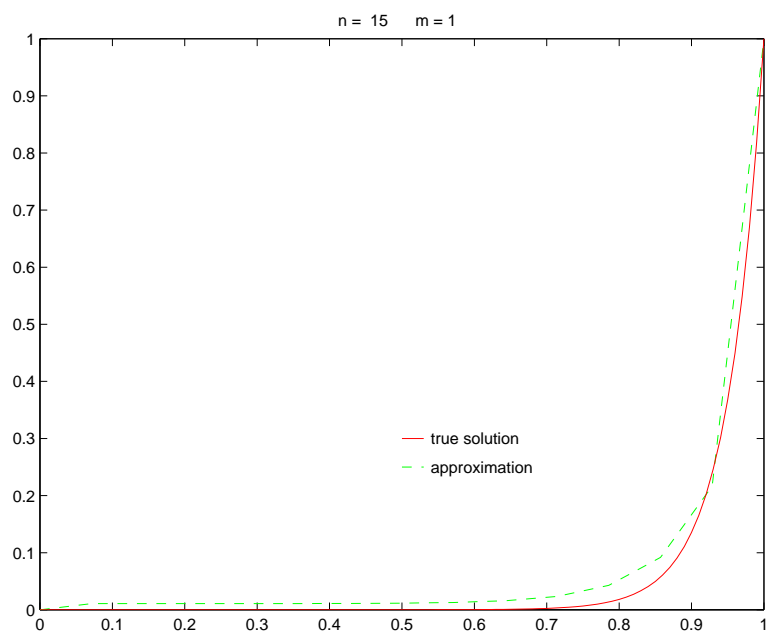


Figura 5.18: Solución exacta vs Solución usando CMLS

5.2 El caso bidimensional

En esta sección nos ocuparemos del problema de convección-difusión en el caso bidimensional:

$$\begin{aligned} -\Delta u + b\nabla u &= 0, \text{ en } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u|_{\partial\Omega} &= g(x) \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

con

$$g(x, y) = \begin{cases} x e^{\frac{b_1}{2}(x-1)}(e^{r_1} - e^{r_2}) & y = 1 \\ e^{r_1 y} - e^{r_2 y} & x = 1 \\ 0 & \text{en } x = 0 \text{ e } y = 0, \end{cases}$$

donde $r_1 = \frac{b_2 - \|b\|}{2}$ y $r_2 = \frac{b_2 + \|b\|}{2}$.

La solución exacta a este problema se muestra en la Figura 5.19

Nuestro interés es obtener aproximaciones a la solución de la ecuación (5.2.7) usando MLS. Nuevamente deseamos elegir una función de peso apropiada (que tenga presente la asimetría del problema) a fin de evitar la presencia de oscilaciones. Se planteaba el problema de generalizar a más dimensiones la idea de up-wind del caso unidimensional. Inspirados en este caso proponemos la siguiente función de peso: $\Phi_R(x_1, x_2) = \tilde{\Phi}_R(x_1)\tilde{\Phi}_R(x_2)$ donde $\tilde{\Phi}_R$ es la que utilizamos en el caso unidimensional i.e

$$\tilde{\Phi}_R(z) = \begin{cases} \frac{e^{-a(\frac{z}{R})^2} - e^{-a}}{1 - e^{-a}} & \text{si } -R < z < 0 \\ \frac{e^{(\frac{z}{R})^2} - e}{1 - e} & \text{si } 0 \leq z < R \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

La elección del parámetro a dependerá de b_1 al considerar $\tilde{\Phi}_R(x_1)$ y de b_2 al considerar $\tilde{\Phi}_R(x_2)$ Se realizaron experimentos numéricos tomando $b = (1, 20)$, la correspondiente función de peso se muestra en la Figura 5.21.

Para los experimentos numéricos que se detallan a continuación tomamos una malla uniforme con 5 nodos en cada dirección. En la Figura 5.20 se muestra la aproximación obtenida utilizando la aproximación usual por diferencias finitas para las derivadas segundas y diferencias centradas para las de primer orden, como es sabido se observan oscilaciones. En la Figura 5.22 mostramos los resultados obtenidos usando MLS, nuestra elección de la función de peso, adecuada a las características del problema, evita la presencia de oscilaciones.

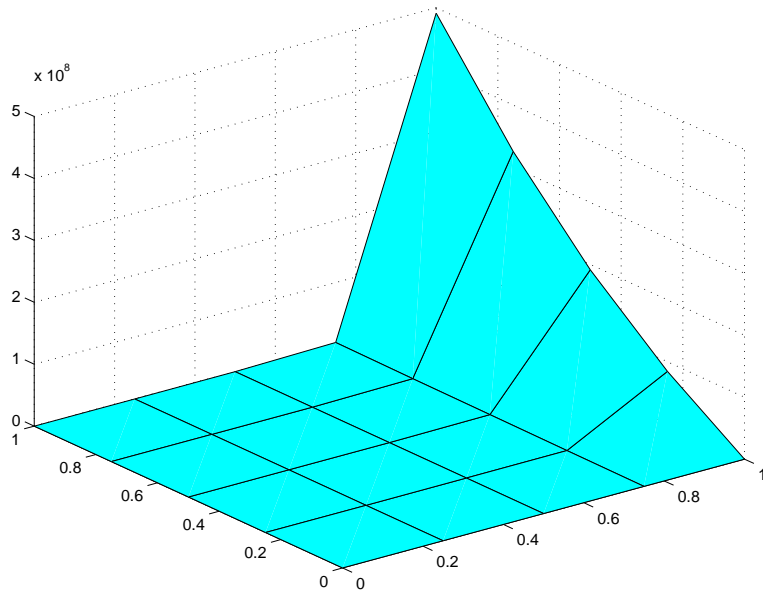


Figura 5.19: Solución de la ecuación de convección-difusión

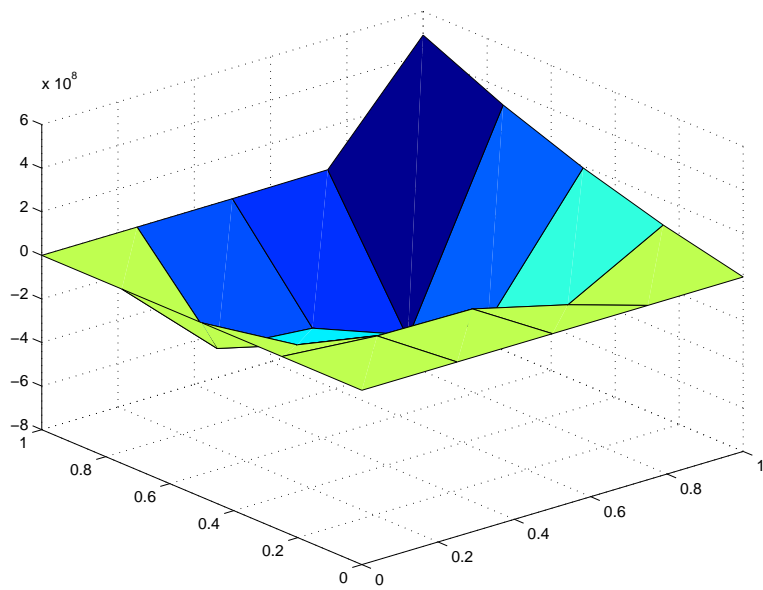


Figura 5.20: Solución por diferencias finitas

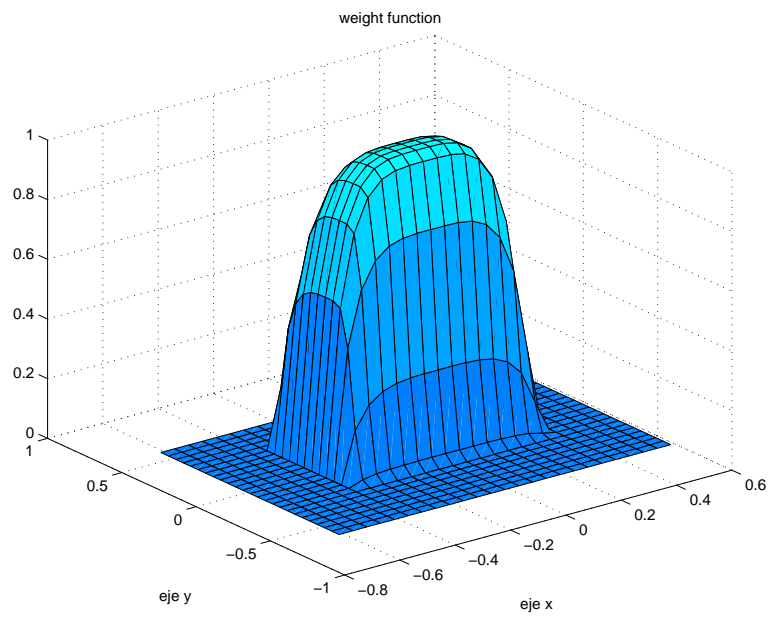


Figura 5.21: función de peso

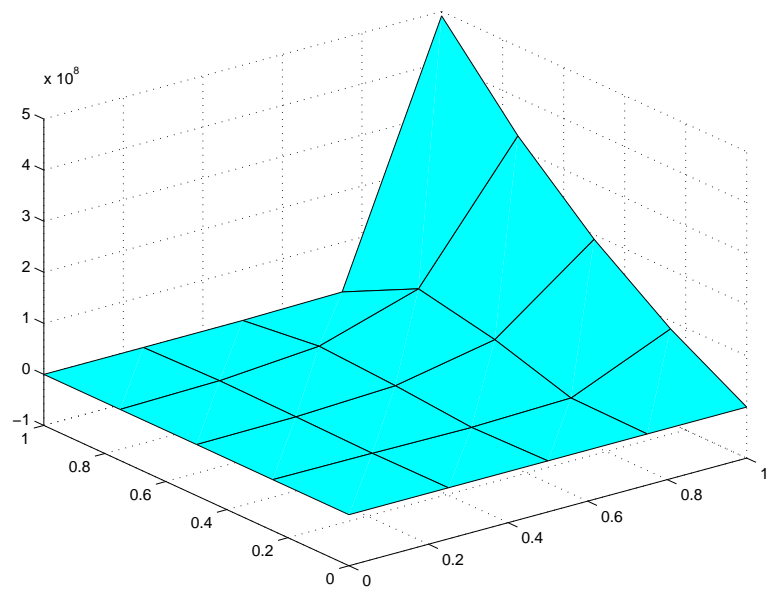


Figura 5.22: Solución usando MLS

Bibliografía

- [1] Armentano M. G., Durán R. G. *Error estimates for moving least square approximations*, submitted (1999).
- [2] Armentano M. G. *Error estimates in Sobolev Spaces for moving least square approximations*, submitted (1999).
- [3] Babuska, I. *Error bounds for finite element method*, Numer. Math., 16, 322-333, (1971).
- [4] Babuska, I. and Melenk J. M. *The partition of unity method*, International Journal for numerical methods in engineering, 40, 727-758, (1997).
- [5] Belytschko T. Lu Y.Y., Gu L. *A new implementation of the element free Galerkin method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 113, 397-414 (1994).
- [6] Belytschko T., Krysl P. *Element-free Galerkin method: Convergence of the continuous and discontinuous shape functions*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 148, 257-277 (1997).
- [7] Brenner S. C. and Scott L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, (1994).
- [8] Brezis, H. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, (1983).
- [9] Calderón A. P. and Zygmund A. *Local properties of solution of elliptic partial differential equations*, Studia Mathematica, 171-225 (1961).
- [10] Ciarlet P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, (1978).
- [11] Colominas I., Mar Chao, Navarrina F. and Casteleiro M. *Application of Meshless Method to the analysis and design of Grounding Systems*, Proceedings of 'Fourth World Congress on Computationas Mechanics', Argentina, (1998)
- [12] Conte S. D. and C. deBoor *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, (1980).
- [13] Dolbow J., Belytschko T. *Numerical Integration of the Galerkin weak form in meshfree method*, Computational Mechanics, 23, 219-230 (1999)
- [14] Dupont T., Scott R. *Polynomial approximation of function in Sobolev Spaces*, Mathematics of Computation, 34, 441-463 (1980).

- [15] Durán R. G. *On polynomial approximation in Sobolev Spaces*, SIAM J. Numer. Anal., 20, 985-988 (1983).
- [16] Fleming M, Chu Y. A., Moran B, and Belytschko T. *Enriched element free Galerkin methods for crack tip fields*, International Journal for numerical methods in engineering, 40, 1483-1504, (1997).
- [17] Grisvard P. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, (1985).
- [18] Johnson L. W., Riess R. D. *Numerical Analysis*, Addison-Wesley, (1982).
- [19] Johnson, C. *Numerical Solution of partial differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, Cambridge, (1987)
- [20] Kincaid D., Cheney W. *Análisis Numérico*, Addison Wesley Iberoamericana, (1994)
- [21] Lancaster, P. Salkauskas K. *Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods*, Mathematics of Computation,37,141-158 (1981).
- [22] Levin, D. *The approximation power of moving least-squares*, Mathematics of Computation,67,1335-1754 (1998).
- [23] Marano M. *Mejor Aproximación Local*, Tesis de Doctorado en Matemáticas - U. N. de San Luis, (1986).
- [24] Melenk J. M. and Babuska I. *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 139, 289-314 (1996).
- [25] Morton K. W. *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, Chapman & Hall, (1996)
- [26] Motzkin, T. S. and Walsh J. L. *Polynomials of best approximation on a real finite point set*, Trans. Amer. Math. Soc.,91, 231-245 (1959).
- [27] Oñate E., Idelsohn S. and Zienkiewicz O. C. *Finite point method in computational mechanics*, CIMNE, report, (1995).
- [28] Orkisz J. *Meshless Finite Difference Method I. Basic Approach*, Proceedings of 'Fourth World Congress on Computational Mechanics', Argentina,(1998)
- [29] Orkisz J. *Meshless Finite Difference Method II. Adaptive Approach*, Proceedings of 'Fourth World Congress on Computational Mechanics', Argentina, (1998)
- [30] Rice, J. R. *Best approximation and interpolating functions*, Trans. Amer. Math. Soc.,101, 477-498 (1961).
- [31] Roos H. G., Stynes M. and Tobiska L. *Numerical Methods for Singularity Perturbed Differential Equations*, Springer, (1996).
- [32] Shepard D. *A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced points*, Proc. A.C.M Natl. Conf. ,517-524 (1968).

- [33] Taylor R., Zienkiewicz O. C., Oñate E., and Idelsohn S. *Moving least square approximations for the solution of differential equations*, CIMNE, report, (1995).
- [34] Verfurth R. *A note on polynomial approximation in Sobolev Spaces*, Rairo M^2AN , 33, 715-719, (1999).