Abstract

In this work we study different kind of interpolant operators over anisotropic finite elements. We obtain optimal order error estimates in $W^{1,p}$ with $p > 2$, for the $\mathcal{P}_1$-Lagrange interpolation, under the so called *maximum angle condition* for tetraedra. For $\mathcal{Q}_1$-isoparametric quadrilateral elements, we define a weak geometric condition which ensures optimal order error in H^1. This condition allows anisotropic elements and generalize all the previously known results. We present, also, a new $\mathcal{P}_1$-average interpolant operator which has optimal order in $W^{1,2}$, in 3D, for tetraedra under the *maximum angle condition*. In particular, this operator, has a better behaviour than the Lagrange interpolation. Finally we prove that the *maximum angle condition* for tetraedra gives neccesary and sufficient conditions to obtain optimal order error, in L^2, for the Raviart-Thomas interpolation. We show some applications of this result for certain mixed and nonconforming methods, both, for scalar elliptic problems, and the Stokes equations.

Key Words: Finite elements, Lagrange interpolation, Maximum angle condition, Raviart-Thomas interpolation, Average-interpolation, Isoparametric elements.

Resumen

En este trabajo estudiamos diferentes tipos de operadores de interpolación sobre elementos finitos anisotrópicos. Obtenemos estimaciones óptimas para el error, en la interpolación de Lagrange sobre $\mathcal{P}_1$ y en $W^{1,p}$ con $p > 2$, para tetraedros bajo la así llamada *condición del ángulo máximo*. Para la interpolación de Lagrange sobre $\mathcal{Q}_1$, en cuadriláteros, hallamos una condición geométrica muy poco restrictiva bajo la cual obtenemos estimaciones óptimas para el error en H^1. Esta condición admite elementos anisotrópicos y generaliza todos los resultados conocidos. También presentamos un nuevo interpolador de promedios sobre $\mathcal{P}_1$ y probamos que posee orden óptimo en $W^{1,2}$, en 3D, para tetraedros bajo la *condición del ángulo máximo*. En particular, posee un comportamiento mejor que el de Lagrange. Finalmente demostramos que la *condición del ángulo máximo* para tetraedros es necesaria y suficiente para obtener cotas óptimas del error en L^2 para la interpolación de Raviart-Thomas. Damos además algunas aplicaciones de este resultado para ciertos métodos mixtos y no-conformes, tanto para problemas escalares elípticos como para las ecuaciones de Stokes.

Palabras clave: Elementos finitos, Interpolación de Lagrange, Condición del ángulo máximo, Interpolación de Raviart-Thomas, Interpolación de promedios, Elementos isoparamétricos.

Agradecimientos

Este trabajo no hubiese sido posible sin una serie compleja de empeños propios y ajenos. La lista que aparece debajo intenta reconocer estos últimos con mi más sincero agradecimiento. Habrá, seguramente, injustas omisiones: adelanto mis disculpas a aquellos que debieran estar y no están.

Al Dr. Ricardo G. Durán, maestro y amigo. Por su confianza en mi persona. Por la responsabilidad con que asumió la dirección, tanto de este trabajo, como de mi formación profesional. Por haber compartido conmigo sus conocimientos, siempre sólidos y precisos, de ese modo llano, enemigo de oscuridades innecesarias, del que también espero haber aprendido un poco. Por el invariable respeto con que evaluó mis opiniones, acertadas o no. Por haber estado (aunque su modestia lo niegue) siempre un paso adelante.

A Javier Etcheverry , y Gabriela Armentano, por su compañerismo y amistad siempre vigente, y por las charlas enriquecedoras que hemos mantenido durante estos años de trabajo en común.

A Julio D. Rossi (Julín), amigazo y camarada de coautorías. Entre muchas (pero muchas) otras cosas, por sus obsesivas invitaciones al trabajo, que nunca admitieron negativas y que fueron, toda vez, un incentivo para seguir adelante.

A J. Fernández Bonder , por su compañerismo y amistad, y por las risas y el buen tino con que supo enfrentar las objeciones más serias.

A N. Wolanski, C. Lederman, D.Rial (Tico), C. Mariani, con quienes trabajé, aprendí, y me divertí en ecuaciones.

Al Departamento de Matemáticas en general (dejo rodar unos nombres, a riesgo de olvidar otros)

M. del C.Calvo, C. López, C.Cabrelli, C. Schiffini, R.Cossalter (Rudolf), J. Zilber, L.Gysing, F.Krongold, Sandra y M. Angélica, por haber contribuído con gestiones y/o consejos de diversa índole, con inalterable buen ánimo.

A la U.B.A. y a los desconocidos jurados y evaluadores que han apoyado la continuidad de mi beca durante los períodos de Iniciación y Perfeccionamiento, permitiendo la posibilidad material de este trabajo.

Índice General

0.1 Introducción

0.1.1 Aproximaciones de Galerkin

El estudio estrictamente teórico de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales provee, mayormente, resultados cualitativos de diversa índole, como ser propiedades de existencia, unicidad, regularidad, comportamiento asintótico etc. Sin embargo, solo en raras ocasiones brinda una solución explícita del problema en cuestión. Las aproximaciones de Galerkin, por su parte, proponen hallar una solución aproximada resolviendo un problema, generalmente algebraico y más sencillo que el original, en dimensión finita. De manera estándar esto se consigue llevando la ecuación diferencial a una forma variacional adecuada y que, en muchos casos de interés, puede resumirse abstractamente del siguiente modo

$$\text{Hallar} \;\; u \in H \;\; \text{tal que} \;\; a(u,v) = L(v) \;\; \text{para todo} \;\; v \in H \tag{1.1}$$

donde $L(.)$ y $a(.,.)$ representan formas lineales y bilineales respectivamente, continuas sobre un espacio de Hilbert H, que consideraremos dotado con cierto producto interno $< .,. >$.
La idea es, entonces, simplificar el problema (1.1) buscando una solución u_h en un nuevo espacio H_h. El problema aproximado toma la forma

$$\text{Hallar} \;\; u_h \in H_h \;\; \text{tal que} \;\; a(u_h,v_h) = L(v_h) \;\; \text{para todo} \;\; v_h \in H_h \tag{1.2}$$

y lo que interesa es, entonces, obtener una estimación del error $u - u_h$, que indique cuán buena resulta la solución aproximada. Veremos que para ello es de gran utilidad la así llamada ecuación del error, que, de verificarse la inclusión $H_h \subset H$, se escribe

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \;\; \text{para todo} \;\; v_h \in H_h \tag{1.3}$$

y se deduce fácilmente, reemplazando v por $v_h \in H_h \subset H$, en (1.1), y restando a esta ecuación la (1.2).
Notemos, antes de continuar, que (1.3) representa una relación de ortogonalidad característica de las proyecciones, de hecho, si $a(.,.)$ resulta simétrica y coerciva entonces u_h es precisamente la proyección ortogonal de u sobre H_h con el producto interno definido por $a(.,.)$.
De la ecuación del error (1.3) es fácil obtener cotas para $u - u_h$ en la norma $\|.\|$ dada por $< .,. >$. En efecto, para $v_h \in H_h$ arbitrario, resulta

$$\|u - u_h\|^2 \gamma \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq C\|u - u_h\|\|u - v_h\| \tag{1.4}$$

donde γ y C representan las constantes de coercividad y continuidad de la forma bilineal a. En particular, esto conduce al clásico Lema de Cea [10, 11], que se resume como

$$\|u - u_h\| \leq \frac{C}{\gamma} inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\| \tag{1.5}$$

Si, por otra parte, la forma $a(.,.)$ no fuera coerciva, cosa que sucede en muchas ocasiones de interés, como por ejemplo en el problema de Stokes, la cuenta previa no puede repetirse. Sin embargo, de verificarse la condición más débil

$$sup_{v_h \in H_h} \frac{a(w_h, v_h)}{\|v_h\|} \geq \gamma \|w_h\| \;\; \forall w_h \in H_h \tag{1.6}$$

para $\gamma > 0$, también llamada comunmente *condición inf-sup*, por ser equivalente a

$$inf_{w_h \in H_h} sup_{v_h \in H_h} \frac{a(w_h, v_h)}{\|w_h\| \|v_h\|} \geq \gamma > 0$$

puede obtenerse aún, un análogo del Lema de Cea debido a Babuska [5]. En efecto, para $w_h \in H_h$ se tiene de (1.6), (1.3) y la continuidad de a

$$\|w_h - u_h\| \gamma \leq sup_{v_h \in H_h} \frac{a(w_h - u_h, v_h)}{\|v_h\|} = sup_{v_h \in H_h} \frac{a(w_h - u, v_h)}{\|v_h\|} \leq C \|w_h - u\|$$

y entonces

$$\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|w_h - u_h\| \leq (1 + \frac{C}{\gamma}) \|u - w_h\| \tag{1.7}$$

pero por ser w_h arbitrario

$$\|u - u_h\| \leq (1 + \frac{C}{\gamma}) inf_{w_h \in H_h} \|u - w_h\| \tag{1.8}$$

Observemos que tanto a través de la ecuación (1.8), como de la ecuación (1.5) en el caso coercivo, resulta posible acotar el error del siguiente modo

$$\|u - u_h\| \leq \overline{C} inf_{w_h \in H_h} \|u - w_h\| \tag{1.9}$$

donde $\overline{C}$ depende de $\frac{C}{\gamma}$.

De lo visto se desprende que basta hallar un operador de interpolación o de proyección Π sobre el espacio H_h

$$\Pi : H \to H_h$$

para escribir

$$\|u - u_h\| \leq \overline{C} \|u - \Pi(u)\|$$

con $\overline{C}$ como en (1.9), y reducir el análisis del error $u - u_h$ al estudio del error de interpolación o de proyección $u - \Pi(u)$.

La construcción del operador Π depende de la naturaleza de los espacios H y H_h que aparecen en las formulaciones variacionales. En los problemas prácticos H suele ser un espacio de Sobolev (digamos, por ejemplo, funciones de $L^2(\Omega)$ con derivadas distribucionales en $L^2(\Omega)$) o algún otro similar como $H(div, \Omega)$, $H(rot, \Omega)$ (campos en L^2 con divergencia o rotor en L^2) etc., y resulta entonces conveniente tomar H_h como algún espacio adecuado de elementos finitos. Como H_h depende de cada H en particular, no vamos a explicitar, en esta introducción, los detalles de construcción de estos espacios. La idea general consiste en seleccionar cierto tipo de elementos, digamos, por ejemplo, triangulares si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, construir una triangulación $\mathcal{T}$ admisible (debe verificar ciertos requisitos [10, 11]) del espacio Ω, y si se pretende que $H_h \subset H$, suele elegirse H_h como el espacio de funciones en H que restringidas a cada elemento $K \in \mathcal{T}$ resulta ser polinomial de cierto grado. El subíndice h se asocia, en este contexto, al diámetro máximo de los elementos de $\mathcal{T}$. Precisamente, cuando H_h es del tipo que mencionamos, existe una teoría muy completa [11, 10] para acotar de un modo sistemático $u - \Pi(u)$ para operadores Π de tipo muy general. Sin embargo, es bien sabido que a través de este enfoque la estimación para $\|u - \Pi(u)\|$ depende de ciertas características de los elementos utilizados. En efecto, para asegurar cotas de error uniformes, en una familia de elementos, se requiere de la así llamada *condición de regularidad*. Esto es, si h_K y ρ_K representan el diámetro exterior e interior, respectivamente, de un elemento genérico K en dicha familia, entonces

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \text{con } \sigma \quad \text{independiente de K} \tag{1.10}$$

En oposición a los regulares, los elementos se dicen anisotrópicos cuando no verifican (1.10), y por ende, en estos últimos, no puede estimarse el error $u - \Pi(u)$ a través del método general que hemos mencionado. Estos elementos, sin embargo, resultan de gran utilidad cuando se aproximan soluciones de ecuaciones en derivadas parciales que poseen un comportamiento muy diferente en distintas direcciones. En efecto, un ahorro importante del esfuerzo computacional puede lograrse si se refina la malla solo en las direcciones en las que la solución varía rápidamente, pero es fácil ver en este caso, que los elementos no van respetar en general la condición (1.10) uniformemente.

En esta tesis abordamos la cuestión de como reemplazar (1.10) por condiciones menos restrictivas y obtener todavía estimaciones óptimas para el error en varios tipos de operadores de interpolación en dimensión 2 y 3.

0.1.2 Resumen de resultados obtenidos

El Capítulo 1 está dedicado a la interpolación de Lagrange. En la Sección 1.1, hacemos un repaso del enfoque clásico utilizado para tratar el error en elementos lineales y en donde se aprecia el rol que juega (1.10). Con esta metodología, esta condición no puede, en general, eliminarse. En la Sección 1.2 brindamos ciertos resultados (en particular los Lemas 1.2.2, 1.2.1) que resultarán clave para tratar errores de interpolación evitando la hipótesis (1.10) y damos además, como aplicación, un resultado, ya clásico [6, 24], que consiste en estimaciones óptimas del error en H^1, para la interpolación de Lagrange, en triángulos que verifican la así llamada *condición del ángulo máximo*, esto es, ángulos interiores del elemento acotados por una constante menor que π. También vemos, hacia el final de esa sección, las razones que impiden extender a dimensión 3 tales argumentos a menos que se aumente la regularidad de las funciones a interpolar, y precisamente a este tema dedicamos la Sección 1.3, que comienza citando ciertos contraejemplos [34] que muestran la necesidad de (1.10) para acotar el error en $W^{1,2}$ en 3D. Después comentamos los resultados conocidos para funciones más regulares. Por un lado, en [25], puede verse que para funciones en $W^{2,\infty}$, la interpolación con elementos lineales sobre tetraedros posee orden óptimo, para el error en $W^{1,\infty}$, y para toda una familia de elementos que contiene, además de los elementos regulares, a una cantidad importante de elementos anisotrópicos. Esta familia se caracteriza a través de una generalización a 3D de la *condición del ángulo máximo* y requiere que los tetraedros posean los ángulos entre las caras, y dentro de las caras, acotados por una constante menor que π (aclaremos de paso que esta condición fue bautizada con el mismo nombre que su correlato bidimensional). La demostración dada en [25], sin embargo, no sirve para funciones menos regulares, lo que representa un impedimento importante. En efecto, la regularidad "a priori" es, en la mayoría de las ecuaciones en derivadas parciales (para el caso elíptico ver por ejemplo [8, 20]), mucho menor que $W^{2,\infty}$, lo que torna inaplicable el resultado dado en [25], en muchos casos de importancia. En esta linea, en [18], se demuestran estimaciones óptimas en 3D para $W^{2,p}$ con $p > 2$, y para una clase de tetraedros que, además de los regulares, contiene también elementos anisotrópicos. Es interesante destacar que la constante dada en la estimación del error en [18] se deteriora cuando $p \to 2$ en completo acuerdo con los contrajemplos de [34]. La clase para la cual resultan válidas estas estimaciones fué definida en [34] y no estaba clara la relación entre esta y la determinada por la *condición del ángulo máximo*. El primer aporte original de esta tesis consiste en una caracterización concisa de ambas clases, lo que nos permite demostrar, entre otras cosas, que la segunda es realmente mayor que la primera. Además, todavía dentro de la Sección 1.3 utilizamos la caracterización mencionada para obtener un nuevo aporte original que consiste en extender los resultados obtenidos en [18] a la clase de elementos definidos por la *condición del ángulo máximo*, esto es, damos estimaciones óptimas sobre elementos lineales para la interpolación de Lagrange sobre tetraedros en $W^{1,p}$ con $p > 2$ y con una constante que degenera si $p \to 2$.

En lo que resta del Capítulo 1 estudiamos estimaciones del error para la interpolación en elementos cuadriláteros isoparamétricos. Estos elementos gozan de gran popularidad entre los ingenieros y lo que pueda demostrarse de ellos tendrá un gran alcance en las aplicaciones prácticas. Por otro lado, el tratamiento del error es más delicado que en elementos lineales, pues la transformación al dominio de referencia ya no es ni siquiera polinomial [11]. De todos modos con técnicas que siguen de cerca a las utilizadas para el caso lineal, puede, todavía, estimarse [11, 15] el error de interpolación. En la Sección 1.4 damos un resumen de esta metodología con la intención de evaluar el rol que juega (1.10) en cada caso. Para elementos que no verifican (1.10), no había demasiado demostrado, comentamos, sin embargo, en la Sección 1.5, los resultados obtenidos en [37, 38]. Allí los autores muestran que puede evitarse dicha hipótesis si los cuadriláteros no "distan mucho" de ser rectangulares. Las secciones restantes del Capítulo 1 se dedican a mostrar nuestros resultados en este caso. En particular, demostramos cotas óptimas para el error bajo una condición muy general que hemos llamado *condición de descomposición regular*, y que exige que el cuadrilátero pueda dividirse por medio de su diagonal mayor (o por cualquiera de ambas si resultasen comparables) en dos triángulos que verifiquen la *condición del ángulo máximo*. Esta condición, además de ser muy sencilla , define una clase de elementos que contiene a todos aquellos para los que se conocían cotas óptimas y más aún, como mostramos en los ejemplos, admite casos para los que no existían resultados conocidos. También se desprende, en particular (nuestro resultado es mucho más fuerte) que la *condición de ángulo máximo* para los cuadriláteros es suficiente (al igual que en triángulos) para obtener estimaciones óptimas del error.

El Capítulo 2 está dedicado a exponer la siguiente contribución de este trabajo, esto es, a la construcción de un interpolador de promedios que resultará tener error de orden óptimo sobre elementos anisotrópicos. Previo a ello, comenzamos en la Sección 2.1 introduciendo la clásica interpolación de Clément [13], que inaugura las interpolaciones de promedios y donde aparece, sin embargo, (1.10) como condición necesaria para acotar el error. Por otro lado demostramos, a posteriori, que el operador de promedios que construímos resulta tener error de orden óptimo en $W^{1,2}$ toda vez que posea orden óptimo la interpolación de Lagrange en en el espacio más regular $W^{1,\infty}$. En particular para tetraedros bajo la *condición del ángulo máximo*. Como consecuencia, este interpolador de promedios posee un comportamiento mejor que el de Lagrange que, en vista de los contraejemplos de [34], fracasa sobre esta clase. Potencialmente, además, los operadores de promedios pueden utilizarse en espacios con muy poca regularidad lo que les da un amplio espectro de aplicaciones allí donde no se pueda interpolar puntualmente. En efecto, para que la interpolación de Lagrange tenga sentido en $W^{s,p}$, debe ser $s > \frac{n}{p}$, donde n representa la dimensión del espacio, pues en tal caso es válida la inclusión de Sobolev $W^{s,p} \subset \mathcal{C}_0$ y son posibles las evaluaciones puntuales. En particular, por ejemplo, para el problema de Stokes, se utilizan interpoladores de promedios, el que construimos nosotros posee orden óptimo también en estos casos.

Finalmente, en el Capítulo 3, estudiamos la interpolación de Raviart-Thomas (de aquí en más RT), sobre el espacio homónimo de grado más bajo. El espacio de Raviart-Thomas [7, 19, 30] se construye como una aproximación del espacio $H(div)$ (campos en L^2 con divergencia distribucional en L^2) que resulta ser el adecuado para la formulación variacional de ciertos métodos mixtos. Dedicamos entonces la Sección 3.2 a estimar el orden del error de interpolación en L^2 a través de las técnicas clásicas, esto es, vía la transformada de Piola [7, 11] y cambiando de variables al dominio de referencia. Adelantemos que, con este método, aparece (1.10) como una hipótesis necesaria. Es por ello que proponemos posteriormente y en las Secciones 3.4, 3.5, un tratamiento alternativo del error que representa otro aporte original de este trabajo. En efecto, obtendremos estimaciones óptimas para el error en L^2 en triángulos y tetraedros que verifican la *condición del ángulo máximo* utilizando para ello la caracterización de estos elementos que brindamos en la Sección 1.3. Nuestros argumentos difieren en 2D y en 3D. La razón de esto es que si bien la demostración en 2D es más directa y puede extenderse a 3D sin problemas, requiere, en este último caso, restricciones innecesarias sobre la geometría de los tetraedros. Por otro lado, la demostración alternativa en 3D, da condiciones necesarias y suficientes para obtener estimaciones óptimas para el error, lo que muestra que estos resultados no pueden mejorarse. Veremos, también, que el enfoque usado en 2D, para triángulos, se aplica a elementos rectangulares anisotrópicos (tanto en 2D como en 3D), pues la constante que aparece en la estimación es independiente del cociente de las longitudes de las aristas. Daremos, además, en la Sección 3.3, un par de aplicaciones de los resultados obtenidos. La primera surge inmediatamente del análisis clásico del error para la formulación mixta de Raviart-Thomas de operadores elípticos de segundo orden. En efecto, es bien sabido [16, 30] que dicho error puede acotarse en términos de la interpolación RT y por ende obtendremos convergencia para elementos anisotrópicos en esta formulación mixta. La segunda aplicación resulta más importante aún y concierne a las ecuaciones de Stokes, en particular demostramos la convergencia del método mixto, no conforme, de Crouzeix y Raviart [14] utilizando elementos anisotrópicos. Hasta ahora no existían resultados para el problema de Stokes con este tipo de elementos, ya que el análisis estándar requiere la condición de regularidad (1.10). En efecto, se sabe que en la formulación mixta velocidad-presión deben elegirse cuidadosamente los espacios de elementos finitos [7, 19], ya que la constante de estabilidad $\gamma > 0$ que aparece en la condición inf-sup (1.6) debe ser independiente de h. En contra de lo que ocurre con la coercividad, la condición inf-sup no se hereda de H a $H_h \subset H$, y si bien esta se verifica en la combinación $H = H^1 - L^2$ [7, 19], no ocurre lo propio con, digamos, $H_h = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_0$ (aproximaciones lineales-constantes, en cada elemento, para $H^1 - L^2$) que resulta inestable. Este mal se remedia, usualmente, enriqueciendo el espacio de las velocidades, lo que permite acotar γ uniformemente, aunque, en la mayoría de los casos, bajo la hipótesis (1.10). El incremento del espacio de velocidades puede lograrse agregando ciertas funciones cuadráticas a $\mathcal{P}_1$ [7, 19] o tomando un espacio todavía lineal, pero no conforme, es decir, ya no más en H^1. En esto último consiste el método de Crouzeix y Raviart. En este caso es fácil ver que la constante de estabilidad es independiente de la forma de los elementos, sin embargo, el análisis que hemos realizado en la Subsección 0.1.1 no se aplica pues ya no es cierta la inclusión $H_h \subset H$. Así el segundo miembro de la ecuación del error (1.3) ya no es cero en general, apareciendo, en cambio, ciertos términos llamados de consistencia que usualmente se estiman utilizando una vez más (1.10). Vamos a dar entonces una demostración alternativa para tratar dichos términos, acotándolos a través del error de la interpolación de Raviart-Thomas, lo que nos permitirá obtener convergencia sobre elementos bajo la *condición del ángulo máximo*. Como hemos comentado no existían resultados similares para el problema de Stokes, peor aún, para el así llamado mini-element se han mostrado [31] ejemplos numéricos sencillos, en 2D, que devienen inestables cuando no se verifica (1.10). Esto evidencia que (1.10) no siempre es, para las aproximaciones discretas del problema de Stokes, un mero requisito técnico.

Para finalizar este resumen queremos observar que los resultados presentados en este trabajo aparecen en [1, 2]. El primero de ellos concentra la caracterización de los elementos que verifican la *condición del ángulo máximo* y lo expuesto en el Capítulo 3. Los resultados para cuadriláteros están en [2]. Lo obtenido para la interpolación de Lagrange en 3D más lo que aparece en el Capítulo 2 forma parte de un trabajo en preparación.

Capítulo 1

Interpolación de Lagrange

1.1 Elementos lineales sobre triángulos regulares

Algunas definiciones preliminares:

De las siguientes definiciones, algunas serán útiles solo en un capítulo posterior, aunque conviene brindarlas aquí para evitar repeticiones innecesarias más adelante.
Denotaremos con letra minúscula las funciones escalares, con minúsculas también pero en **negrita** las funciones vectoriales y finalmente los campos tensoriales con **negrita** mayúscula. Para $n = 2$ (*resp.: n=3*), y un triángulo genérico (*resp.: un tetraedro*) $K \subset \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{p}_0$ denotaremos un vértice (arbitrario a menos que señalemos lo contrario), con $\mathbf{v}_i$ ($\|\mathbf{v}_i\| = 1$) y l_i , $1 \leq i \leq n$ (con $n = 2$ o 3) las direcciones y longitudes de los lados (*resp.: aristas*) concurrentes en $\mathbf{p}_0$ respectivamente. Podemos así escribir $K = c.c.\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 + l_i\mathbf{v}_i\}_{1\leq i\leq n}$, con *c.c.* representando la cápsula convexa. Al elemento de referencia $\hat{K}$ lo definimos como $\hat{K} = c.c.\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ donde $\mathbf{e}_i$ representan los vectores canónicos. Con h_K y ρ_K denotaremos el diámetro exterior e interior de K respectivamente, es decir, el menor de los diámetros de las circunferencias circunscriptas al elemento, para el primer caso, y el mayor de las inscriptas para el segundo. Llamaremos $F : \hat{K} \to K$ a la transformación *afín* $F(\hat{x}) = B\hat{x} + \mathbf{p}_0$ donde la matriz B queda definida por $B\mathbf{e}_i = l_i\mathbf{v}_i$. A una función dada w, definida en K, le vamos a asociar otra función $\hat{w}$ definida en $\hat{K}$ en la forma usual en elementos finitos: $\hat{w} = w \circ F$. Con $\|.\|_{m,p,K}$, y $|.|_{m,p,K}$ denotaremos las normas y seminormas, respectivamente, en los espacios de Sobolev $W^{m,p}(K)$, esto es funciones de $L^p(K)$ con m derivadas distribucionales en $L^p(K)$. Si bien usaremos la mayoría de las veces $p = 2$, habrá ciertas excepciones, por lo cual preferimos que figure p indicado en el subíndice. Además, para $p = 2$ usaremos la notación $W^{m,2}(K) = H^m(K)$ y en todos los casos omitiremos el K cuando no resulte necesario explicitarlo. Destinaremos $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i}$ para denotar la derivada en la dirección de $\mathbf{v}_i$ tanto para funciones escalares como vectoriales. Con $\mathcal{P}_l$ (resp. $\mathcal{P}_l(K)$), denotaremos el conjunto de los polinomios de grado a lo sumo l (resp. sobre K). La interpolación de Lagrange sobre $\mathcal{P}_1$ (no haremos uso de grados más altos) se define a través de las funciones básicas $\hat{\phi}_i \in \mathcal{P}_1(\hat{K})$ $0 \leq i \leq n$ que verifican $\hat{\phi}_i(\hat{\mathbf{p}}_j) = \delta_i^j$ con $\hat{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{p}}_j = \mathbf{e}_j$. Si $\hat{u} \in H^2(\hat{K})$, se toma $\hat{\Pi}(\hat{u}) = \sum_{i=0}^{n} \hat{u}(\hat{\mathbf{p}}_i)\hat{\phi}_i$, que no es otra cosa que la función lineal que interpola a $\hat{u}$ en los vértices de $\hat{K}$. Conviene observar que la regularidad requerida $\hat{u} \in H^2(\hat{K})$, asegura en dimensión 2 y 3, por un teorema clásico de inmersión, que $\hat{u} \in \mathcal{C}^0(\hat{K})$, y entonces tienen sentido las

evaluaciones $\hat{u}(\hat{\mathbf{p}}_i)$. Ahora para un K cualquiera y para una $u \in H^2(K)$, la interpolación lineal puede escribirse como $\Pi(u) = \hat{\Pi}(u \circ F) \circ F^{-1} = \hat{\Pi}(\hat{u}) \circ F^{-1}$. Por lo tanto tomando $\phi_i = \hat{\phi}_i \circ F^{-1}$ como funciones básicas sobre K, la interpolación se expresa $\Pi(u) = \sum_{i=0}^{n} u(\mathbf{p}_i)\phi_i$, donde los $\mathbf{p}_i$ representan ahora los correspondientes vértices de K. Note que estas funciones básicas ϕ_i son también lineales, debido a que es afín el cambio de variables, esto hará bastante más sencillo el tratamiento de esta interpolación que la correspondiente isoparamétrica sobre cuadriláteros (ver Sección 1.4). Finalmente consideraremos constantes aquellas magnitudes que dependan solo de la dimensión o de cierto dominio fijo, y usaremos en general C para denotarlas, aunque éstas cambien línea a línea, con la salvedad de aquellas que puedan calcularse explícitamente y/o que resulten de particular importancia.

Nuestro propósito inmediato para esta sección consiste en dar una demostración de la estimación del error (1.11) que aparece más adelante y que es el resultado clásico para la interpolación de Lagrange sobre elementos finitos lineales [10, 11].

Comenzamos entonces con el así llamado Lema de Bramble-Hilbert

Lema 1.1.1 *Existe una constante $C = C(K)$ tal que para toda $u \in H^2(K)$*

$$inf_{p \in \mathcal{P}(K)} \|u - p\|_{2,2,K} \leq C|u|_{2,2,K} \tag{1.1}$$

Dem. Consideremos $\{f_i\}_{0 \leq i \leq n}$ una base del espacio dual de $\mathcal{P}_1(K)$. Por estar en dimensión finita las f_i resultan continuas con la norma de $H^2(K)$ y podemos entonces (Hahn-Banach) suponerlas definidas sobre todo $H^2(K)$. Por dualidad se tiene también que dichas f_i verifican la siguiente propiedad $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{P}) \qquad Dado \;\; p \in \mathcal{P}_1(K), \;\; f_i(p) = 0 \;\; \forall i \;\; 0 \leq i \leq n \;\; si \;\; y \;\; solo \;\; si \;\; p = 0.$$

Demostremos ahora:

$$\|u\|_{2,2,K} \leq C(|u|_{2,2,K} + \sum_{i=0}^{n} |f_i(u)|) \qquad \forall u \in H^2(K) \tag{1.2}$$

para ello supongamos que la desigualdad no se verifica para ninguna constante C, y elijamos entonces una sucesión $u_j \in H^2(K)$ tal que $\|u_j\|_{2,2,K} = 1$ y además

$$|u_j|_{2,2,K} + \sum_{i=0}^{n} |f_i(u_j)| \to 0 \tag{1.3}$$

Ahora bien, por estar u_j esta acotada en $H^2(K)$ existe una subsucesión, que seguimos indicando u_j, convergente, en H^1, a cierta u, $u \in H^1(K)$, pero por otro lado se tiene de (1.3) que $|u_j|_{2,2,K} \to 0$ de donde resulta que además u_j converge en $H^2(K)$. De estas observaciones se infiere que $u \in H^2(K)$, y $|u|_{2,2,K} = 0$. Notemos que esto último nos dice en particular que $u \in \mathcal{P}_1(K)$, y volviendo una vez más a (1.3), tenemos que $f_i(u) = lim_{j \to \infty} f_i(u_j) = 0 \; \forall i \; 1 \leq i \leq n$ por lo que usando la propiedad $(\mathcal{P})$ debe ser $u = 0$, en contra de la condición $\|u_j\|_{2,2,K} = 1$. Esto prueba (1.2).

Para finalizar la demostración notemos que por definición de espacio dual podemos elegir un $q \in \mathcal{P}_1(K)$ tal que $f_i(u+q) = 0$ para $1 \leq i \leq n$, y por lo tanto de (1.2) resulta

$$inf_{p\in\mathcal{P}_1(K)}\|u-p\|_{2,2,K} \leq \|u+q\|_{2,2,K} \leq C|u|_{2,2,K} \tag{1.4}$$

que es lo propuesto en el Lema. □

Observación 1.1.1 *Como ya hemos mencionado este Lema vale en forma más general [10, 11]. De hecho nos hemos restringido a polinomios de grado uno y al espacio $W^{2,2} = H^2$ porque no haremos uso de otra versión.*

Observación 1.1.2 *Se puede construir [10] explícitamente un polinomio p de grado k que verifique $\|u-p\|_{k+1,K} \leq C(K)|u|_{k+1,K}$, lo que da una demostración alternativa del Lema previo. Este polinomio se obtiene promediando el desarrollo de Taylor de orden adecuado de la función u.*

Observación 1.1.3 *En el próximo Lema, así como en el resto de la Tesis, vamos a necesitar el uso de normas matriciales. Salvo indicación contraria, y dada una matriz M, vamos a denotar con $\|M\|$ la norma 2 de la matriz en cuestión. Es decir que si $B \subset \mathbb{R}^n$ es la bola unitaria con la norma vectorial $\| \ \|_2$ (norma euclídea), entonces $\|M\| = sup_{v\in B}\|M(v)\|_2$. Por supuesto toda otra norma es equivalente a esta, y a los efectos de hacer acotaciones puede cambiarse una por otra salvando una constante multiplicativa.*

Lema 1.1.2 *Sea $K = F(\hat{K})$, para cada $u \in H^m(K)$ definimos como antes $\hat{u} = u \circ F$, entonces $\hat{u} \in H^m(\hat{K})$ y además existe una constante que depende solo de la dimensión y de m tal que*

$$|\hat{u}|_{m,2,\hat{K}} \leq C\|B\|^m det(B)^{-1/2}|u|_{m,2,K}$$

donde, como ya se ha mencionado, B es la matriz que aparece en la definición de F, y también se tiene análogamente

$$|u|_{m,2,K} \leq C\|B^{-1}\|^m det(B)^{1/2}|\hat{u}|_{m,2,\hat{K}}$$

Dem. Inmediata haciendo cambio de variables. □

Observación 1.1.4 *Dos dominios culesquiera D y D' tales que $D = F(D')$ para cierta trnasformación afín invertible, suelen llamarse afinmente equivalentes. Notar que el lema previo vale en general para cualquier par de dominios que verifiquen esta condición. De hecho haremos uso más adelante de esta versión general.*

En el siguiente Lema se buscan cotas para $\|B\|$ y $\|B^{-1}\|$, dichas cotas conducen de forma natural a la condición de regularidad. Sin embargo como veremos posteriormente dicha condición resultará demasiado restrictiva.

Proposición 1.1.1 *Sea K un triángulo o un tetraedro arbitrario, y $K = F(\hat{K})$, entonces*

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}} \qquad \|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K}$$

Dem. Basta considerar $\|B\| = \frac{1}{\rho_{\hat{K}}} sup_{\|\psi\|=\rho_{\hat{K}}} \|B(\psi)\|$. Por definición de $\rho_{\hat{K}}$ existen $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{K}$ tales que $\hat{x} - \hat{y} = \psi$, en consecuencia $\|B(\psi)\| = \|F(\hat{x}) - F(\hat{y})\| \leq h_K$, de donde se obtiene la primer desigualdad propuesta. La otra sigue análogamente. □

Teorema 1.1.1 *Sea K un triángulo o un tetraedro, y $u \in H^2(K)$. Para $m = 0, 1$, se tienen la siguientes estimaciones*

$$\|u - \Pi(u)\|_{m,2,K} \leq C\|B\|^{2-m}\|B^{-1}\|^m \|u\|_{2,2,K} \tag{1.5}$$

donde C depende solo de $\hat{K}$.

Dem. Se demuestra primero para el dominio de referencia y después se cambia de variables.
Observemos que el operador $\hat{\Pi} : H^m(\hat{K}) \to H^2(\hat{K})$ con $m = 0, 1$ resulta continuo.
En efecto, consideremos $\hat{u} \in H^2(\hat{K})$ entonces

$$\|\hat{\Pi}(\hat{u})\|_{m,2,\hat{K}} \leq \sum_{i=1}^{n} |\hat{u}(p_i)| \|\hat{\phi}_i\|_{m,2,\hat{K}} \leq C(\hat{K})\|\hat{u}\|_{0,\infty,\hat{K}} \leq C(\hat{K})\|\hat{u}\|_{2,2,\hat{K}} \tag{1.6}$$

donde hemos utilizado en la última desigualdad la inclusión de Sobolev $H^2(\hat{K}) \subset \mathcal{C}^0(\hat{K})$, que resulta válida para dimensión 2 y 3.
Ahora bien, para todo $\hat{p} \in \mathcal{P}_1(\hat{K})$ tenemos $\Pi(\hat{p}) = \hat{p}$ y de allí

$$\hat{u} - \Pi(\hat{u}) = (I - \Pi)(\hat{u} + \hat{p}) \qquad \forall \hat{u} \in H^2(K) \tag{1.7}$$

donde I representa la inclusión $I : H^2(\hat{K}) \to H^m(\hat{K})$. De (1.7), la continuidad de Π y de I y el Lema 1.1.1 obtenemos

$$|\hat{u} - \hat{\Pi}(\hat{u})|_{m,2,\hat{K}} \leq \|I - \hat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(H^2(\hat{K}), H^m(\hat{K}))} inf_{\hat{p} \in \mathcal{P}_1(\hat{K})} \|\hat{u} + \hat{p}\|_{2,2,\hat{K}} \leq C(\hat{K})|\hat{u}|_{2,2,\hat{K}} \tag{1.8}$$

que es (1.5) con $K = \hat{K}$.
Ahora se considera

$$\hat{u} - \hat{\Pi}(\hat{u}) = (u - \Pi(u)) \circ F = (u - \Pi(u))\hat{}$$

así que cambiando variables se tiene del Lema 1.1.2

$$|u - \Pi(u)|_{m,2,K} \leq C\|B^{-1}\|^m |detB|^{1/2} |\hat{u} - \hat{\Pi}(\hat{u})|_{m,2,\hat{K}} \tag{1.9}$$

del mismo Lema 1.1.2

$$|\hat{u}|_{2,2,\hat{K}} \leq C\|B\|^2 |detB|^{-1/2} |u|_{2,2,K} \tag{1.10}$$

y de (1.8), (1.9), (1.10) se deduce (1.5). □

Como Corolario inmediato de este Teorema y de la Proposición 1.1.1 tenemos la desigualdad clásica de interpolación:

$$\|u - \Pi(u)\|_{m,K} \leq C\frac{h_K^{2-m}}{\rho_K^m}\|u\|_{2,K} \tag{1.11}$$

Dos hechos aparecen claramente: el primero es que si $m = 0$ la estimación permanecerá uniforme independientemente de la geometría de los elementos en cuestión, el segundo es que el control de la seminorma con $m = 1$ puede asegurarse *a priori* si requerimos una cota para $\frac{h_K}{\rho_K}$. Pero esta última no es otra que la condición de regularidad que será propicio definir después de la siguiente

Observación 1.1.5 *Para un elemento fijo K, será fijo también el cociente $\frac{h_K}{\rho_K}$, y por ello requerir una cota uniforme para este numero carece de sentido. Sin embargo, y en lo que sigue, con K designaremos, dependiendo del contexto, tanto a un elemento fijo, como a uno cualquiera de una familia dada.*

Definición 1.1.1 *Diremos que el elemento K (vea la observación previa) es regular si existe $\sigma > 0$ independiente de K tal que*

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \tag{1.12}$$

Destaquemos además que la condición analítica expresada en la Definición precedente puede caracterizarse geométricamente en *elementos triangulares* a través de la así llamada condición de ángulo mínimo.

Definición 1.1.2 *Diremos que el triángulo K satisface la condición de ángulo mínimo con constante $\theta > 0$, o abreviadamente $mac(\theta)$ si los ángulos interiores de K son mayores o iguales que θ.*

En 1976 dos trabajos simultáneos [6, 24] demuestran que esta condición de ángulo mínimo, que según vimos es suficiente para tener estimaciones óptimas con una constante acotada uniformemente, puede reemplazarse por otra, esta vez no solo suficiente sino también necesaria, que requiere una cota superior para los ángulos de la familia de triángulos.
En oposición a la anterior esta condición fué bautizada del ángulo maximo, nosotros la definimos también sobre cuadriláteros porque nos va a resultar útil más tarde.

Definición 1.1.3 *Diremos que un triángulo K (resp. un cuadrilátero) satisface la condición de ángulo máximo con constante $\psi < \pi$, o abreviadamente $MAC(\psi)$, si los ángulos de K son menores o iguales que ψ.*

Observación 1.1.6 *Si bien la condición del ángulo mínimo es equivalente a la regularidad de los elementos, la del ángulo máximo por su parte es compatible con elementos anisotrópicos. Un ejemplo sencillo consiste en tomar un triángulo rectángulo K con catetos de longitud h y 1. Haciendo $h \to 0$ se ve que $\frac{h_K}{\rho_K} \to \infty$ aunque K verifica $MAC(\pi/2)$.*

En la siguiente sección vamos a mostrar como reemplaza esta condición a la anterior.

1.2 Elementos lineales en triángulos anisotrópicos

Los resultados enunciados en los Lemas 1.2.1 y 1.2.2 no son otra cosa que la clásica desigualdad de Poincaré, y una generalización de ella escrita de un modo conveniente para nuestros propósitos. Trataremos al mismo tiempo la versión para tetraedros, no solo por ser idéntica a la demostración para triángulos, sino porque además haremos uso de la misma en otros contextos.

Observación 1.2.1 *La constante de Poincaré C y el primer autovalor no nulo μ_2 para el Laplaciano con condiciones de Neumann homogéneas verifican la identidad $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}$. En [32] se da la cota explícita $\mu_2 \geq \frac{\pi^2}{D^2}$ sobre cualquier dominio convexo con D el diámetro de dicho dominio. Note que esta cota es independiente de la dimensión del espacio y de la forma del dominio. En particular si consideramos que el diámetro de $\hat{K} = \sqrt{2}$ para $n = 2, 3$, tendremos en estos casos $C \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.*

Lema 1.2.1 *Sea $n = 2$ (resp.: n=3), $K \subset \mathbb{R}^n$ un triángulo (resp.: tetraedro), $\mathbf{v}_i$ y l_i con $1 \leq i \leq n$ las direcciones unitarias ($\|\mathbf{v}_i\| = 1$) y las longitudes de n de sus lados (resp.: aristas) concurrentes en un vértice, digamos $\mathbf{p}_0$. Sea también $w \in H^1(K)$ una función con promedio cero sobre K, entonces*

$$\|w\|_{0,2,K} \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^{n} l_j \| \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_j} \|_{0,K} \tag{2.13}$$

$$\|w\|_{0,2,K} \leq \frac{h_K}{\pi} |w|_{1,K} \tag{2.14}$$

Dem. Notemos que la segunda desigualdad es precisamente la desigualdad de Poincaré (vea la Observación 1.2.1). Para demostrar entonces la primera notemos que al ser F afín, se tiene que w tiene promedio cero sobre K, si y solo si lo tiene $\hat{w}$ sobre $\hat{K}$. Luego invocamos (2.14) para la función $\hat{w}$ en el elemento de referencia $\hat{K}$, cambiamos variables y observamos que como el jacobiano es constante sale de las integrales simplificandose en ambos lados de la desigualdad. Finalmente la identidad $\frac{\partial \hat{w}}{\partial e_i} = l_i \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_i}$ nos da (2.13). □

Antes de continuar vamos a necesitar una versión muy útil del teorema de traza donde la constante de continuidad se acota explícitamente sobre triángulos y tetraedros. La demostración es sencilla pero la omitimos por brevedad [33].

Teorema 1.2.1 *Sea $n = 2$ (resp.: n=3), $K \subset \mathbb{R}^n$ un triángulo (resp.: tetraedro), y S uno de sus lados (resp.: caras), entonces para toda $u \in H^1(K)$*

$$\|u\|_{0,2,S} \leq \{n \frac{|S|}{|K|}\}^{1/2} \{\|u\|_{0,2,K} + h_K |u|_{1,K}\} \tag{2.15}$$

donde $|S|$ y $|K|$ representan las medidas de S y K respectivamente.

Observación 1.2.2 *Es inmediata la extensión de este teorema a cuadriláteros Q. En efecto, basta considerar uno de los triángulos, digamos $T \subset Q$, que resultan de dividir Q por una diagonal y que tenga por uno de sus lados a S. Entonces por una aplicación directa del Teorema 1.2.1 sobre T, se tiene*

$$\|u\|_{0,2,S} \leq \{\frac{|Q|}{|T|}\}^{1/2} \{n \frac{|S|}{|Q|}\}^{1/2} \{\|u\|_{0,2,Q} + h_K |u|_{1,Q}\} \tag{2.16}$$

Note que en esta desigualdad hemos hecho aparecer el factor $\{\frac{|Q|}{|T|}\}^{1/2}$. No es dificil construir una familia de cuadriláteros para los que este cociente no permanezca acotado. Sin embargo si, por ejemplo, Q es un paralelogramo, resulta $\{\frac{|Q|}{|T|}\} = 2$.

En el próximo Lema observamos que basta con que la función u tenga promedio cero en uno de los lados del triángulo para obtener una desigualdad del tipo (2.13).
Utilizaremos además la notación $u_K = \frac{1}{K}\int_K u dx$, y $u_S = \frac{1}{S}\int_S u ds$.

Lema 1.2.2 *Sea $n = 2$ (resp. $n = 3$) $K \subset \mathbb{R}^n$ un triángulo (resp.: tetraedro) y S cualquiera de sus lados (resp.: caras) concurrentes en un vértice $\mathbf{p}_0$. Sea $w \in H^1(K)$ una función con promedio cero sobre S, entonces, con la notación del Lema 1.2.1 se tiene*

$$\|w\|_{0,2,K} \leq \sqrt{2}C_1\{\sum_{j=1}^{n} l_j \|\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_j}\|_{0,2,K}\} \tag{2.17}$$

$$\|w\|_{0,2,K} \leq C_1 h_K |w|_{1,2,K} \tag{2.18}$$

donde $C_1 = n^{1/2} + \frac{1+n^{1/2}}{\pi}$

Dem. Como en el Lema 1.2.1, será suficiente demostrar la segunda desigualdad ya que la otra se obtiene de esta con $K = \hat{K}$ y cambiando de variables.
Consideremos

$$\|w\|_{0,2,K} \leq \|w - w_K\|_{0,2,K} + \|w_K\|_{0,2,K} \tag{2.19}$$

notemos que el primer sumando de la derecha tiene promedio cero sobre K, lo que implica que puede acotarse vía el Lema 1.2.1

$$\|w - w_K\|_{0,2,K} \leq \frac{h_K}{\pi}|w|_{1,2,K} \tag{2.20}$$

expresión en la que hemos usado el hecho de que w_K es constante y no figura por ende en las derivadas del miembro derecho.
En lo que respecta al segundo sumando de (2.19) tenemos por hipótesis que $w_S = 0$ y entonces

$$\|w_K\|_{0,2,K} = \|w_K - w_S\|_{0,2,K} = |w_K - w_S||K|^{1/2} \tag{2.21}$$

pues $w_K - w_S$ es constante.
Por otro lado $w_S = \frac{1}{|S|}\int_S w ds$, y entonces

$$|w_K - w_S| = |\frac{1}{|S|}\int_S w_K ds - \frac{1}{|S|}\int_S w ds| \leq \frac{1}{|S|}\int_S |w_K - w| ds \leq \frac{1}{|S|^{1/2}}\|w_K - w\|_{0,2,S} \tag{2.22}$$

donde en la última expresión hemos usado la desigualdad de Schwartz. Pero por el Teorema 1.2.1 se tiene

$$\frac{1}{|S|^{1/2}}\|w_K - w\|_{0,2,S} \leq \{n\frac{1}{|K|}\}^{1/2}\{\|w_K - w\|_{0,2,K} + h_K|w|_{1,2,K}\} \tag{2.23}$$

y entonces de (2.21), (2.22), (2.23) y una vez más el Lema 1.2.1 resulta

$$\|w_K\|_{0,2,K} \leq n^{1/2}h_K(1 + \frac{1}{\pi})|w|_{1,2,K} \tag{2.24}$$

la demostración finaliza de (2.19), (2.20) y (2.24). $\square$.

Observación 1.2.3 *El Lema 1.2.2 fué utilizado en dimensión 2 en [6]. La demostración que allí aparece se hace por compacidad en el elemento de referencia y después cambiando variables. Nuestra versión explota la expresión explicíta de las constantes en la desigualdad de Poincaré y en la versión del teorema de traza dada por el Teorema 1.2.1.*

Como ya hemos dicho tomando $m = 0$ en (1.11) resulta óptima la estimación del error en L^2 independientemente de la forma de K. Por ende basta ver el caso $m = 1$ que según anticipamos es válido con una constante que degenera si el ángulo máximo de K se aproxima π.
Para demostrar esto consideremos los siguientes resultados elementales.

Lema 1.2.3 *Sea K un triángulo con $MAC(\psi)$. Sean $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ sus ángulos interiores, entonces $2(\pi - \psi) \leq \alpha_3 \leq \psi$.*

Dem. Que $\alpha_3 \leq \psi$ sigue por definición de $MAC(\psi)$. Por otro lado $\alpha_3 = 2\pi - \alpha_2 - \alpha_1 \geq 2\pi - 2\alpha_2 \geq 2\pi - 2\psi$ de donde se obtiene directamente lo propuesto. □

Observación 1.2.4 *De la desigualdad Schwartz se tiene para cada x $|\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_i}(x)|^2 = |\nabla w(x).\mathbf{v}_i|^2 \leq \|\nabla w(x)\|_2^2$, pues $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, y de allí*

$$\|\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_i}\|_{0,2,K} \leq |w|_{1,2,K}$$

Vamos a necesitar, sin embargo, cotas inversas durante la demostración del siguiente teorema, es decir que nos preguntamos como puede controlarse la seminorma $|w|_{1,2,K}$ a través de las normas $\|\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_i}\|_{0,2,K}$. Desde luego, este control debe depender de cuán "linealmente independientes" sean los vectores $\mathbf{v}_i$. Para hacer la cuenta más precisa consideremos dos vectores unitarios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, θ el ángulo entre ellos, y M la matriz construida con dichos vectores como filas. Se tiene evidentemente que, por un lado, $|M_{i,j}| \leq 1$ $\forall i,j$, y por otro $|det(M)| = sen(\theta)$. De aquí sigue facilmente que $|M_{i,j}^{-1}| \leq \frac{1}{sen(\theta)}$ $\forall i,j$. Por lo tanto, usando una vez más $\nabla w.\mathbf{v}_i = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_i}$, resulta

$$|w|_{1,2,K} \leq \frac{2^{3/2}}{sen(\theta)}\{\|\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_1}\|_{0,2,K} + \|\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_2}\|_{0,2,K}\} \tag{2.25}$$

Finalmente podemos acotar el error de interpolación en términos del ángulo máximo de un elemento triangular K.

Teorema 1.2.2 *Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un triángulo con $MAC(\psi)$ entonces para toda $u \in H^2(K)$ se tiene*

$$|u - \Pi(u)|_{1,2,K} \leq C_2(\psi) h_K |u|_{2,2,K} \tag{2.26}$$

donde $C_2(\psi) = 2^{5/2} C_1 min\{\frac{1}{sen(\psi)}, \frac{1}{sen(2(\pi-\psi))}\}$

Dem. Sea $\mathbf{P}_0$ el vértice de mayor ángulo de K (que llamaremos θ) $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ las direcciones unitarias de los lados concurrentes en $\mathbf{P}_0$. Como $u - \Pi(u)$ se anula en los vértices resulta que $w = \frac{\partial(u-\Pi(u))}{\partial \mathbf{v}_i}$

tiene promedio cero sobre el correspondiente lado, que llamaremos S_i, entonces del Lema 1.2.2 y notando que las derivadas segundas de $\Pi(u)$ se anulan se tiene

$$\|\frac{\partial(u-\Pi(u))}{\partial \mathbf{v}_i}\|_{0,2,K} \leq C_1 h_K |u|_{2,2,K} \tag{2.27}$$

de esta ecuación, en conjunto con (2.25) (tomando $w = u - \Pi(u)$) y observando las cotas obtenidas en el Lema 1.2.3 para el ángulo $\theta = \theta_3$ resulta (2.26). □

Observación 1.2.5 *Uno está tentado a repetir el argumento para el error de interpolación en tetraedros. Sin embargo, si bien la derivada del error tiene promedio cero sobre las aristas del elemento K, la restricción de una función arbitraria de H^1 a una linea no tiene sentido en $\mathbb{R}^3$ (es un caso límite de los teoremas de trazas). En efecto, si se observa el Lema 1.2.2 se ve que en $\mathbb{R}^3$ se puede reemplazar "lado" por "cara", y no por "arista". Esta última propiedad es la que permitiría generalizar los resultados a 3d para la interpolación de Lagrange sobre elementos no regulares. Existen, sin embargo, contraejemplos sobre ciertos elementos anisotrópicos [34] mostrando que no se trata solamente de una dificultad técnica. En la sección siguiente observaremos que la generalización es posible siempre y cuando se aumente la regularidad de la función u. Más precisamente probaremos orden óptimo en $W^{1,p}$ $p > 2$ para una amplia clase de elementos no regulares.*

1.3 Interpolación de Lagrange en dimensión 3

A lo largo de esta sección, $K \subset \mathbb{R}^3$ representará para nosotros un tetraedro genérico. Además utilizaremos la notación definida al comienzo de la Sección 1.1.

Según hemos visto, la ecuación (1.11), nos da cotas óptimas uniformes para el error de interpolación siempre que supongamos la condición de regularidad (ver Definición 1.1.1) sobre el elemento K. Vimos también que en dimensión 2 dicha condición puede reemplazarse por la condición del ángulo máximo (ver Definición 1.1.3). En esencia la demostración utilizaba el hecho de que existieran dos lados del triángulo K "uniformemente" linealmente independientes, más las cotas del Lema 1.2.2. Una pregunta surge entonces naturalmente: que condición podría reemplazar a la regularidad en dimensión 3 conservando orden óptimo?. Por un lado debido a las limitaciones del Lema 1.2.2 mencionadas en la Observación 1.2.5 deberíamos incrementar la regularidad de la función u a interpolar, por el otro parece razonable requerir que el elemento posea tres aristas "uniformemente" linealmente independientes. En [25], Krizek define una condición de ángulo máximo para tetraedros

Definición 1.3.1 *Diremos que un tetraedro satisface la "condición del ángulo máximo" con una constante $\overline{\psi} < \pi$, o más brevemente $MAC(\overline{\psi})$, si los ángulos dentro de las caras y los ángulos entre las caras de K están acotados por arriba por $\overline{\psi}$.*

y demuestra cotas óptimas para el error en $W^{1,\infty}$ en la interpolación de lagrange con una constante que depende solo del ángulo máximo $\overline{\psi}$.
Su demostración se basa una vez más en observar que bajo esta condición existen tres aristas

"uniformemente" linealmente independientes, y trabajando en norma infinito el argumento se simplifica notablemente. En efecto, llamando $\omega = u - \Pi(u)$, donde Π es la interpolación de Lagrange de grado 1, se tiene que $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}_i}(q) = 0$ para cierto q en la arista que posee la dirección dada por $\mathbf{v}_i$, de allí resulta que para todo $p \in K$ se puede escribir

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}_i}(p) = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}_i}(p) - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}_i}(q) = \int_q^p \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta\partial\mathbf{v}_i}(s)ds \tag{3.28}$$

donde η es la dirección del segmento que une p y q. Pero entonces es inmediato que

$$\|\frac{u - \Pi(u)}{\partial\mathbf{v}_i}\|_{0,\infty,K} = \|\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}_i}\|_{0,\infty,K} \leq h\|\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}_i}\|_{1,\infty,K} = h|u|_{1,\infty,K} \tag{3.29}$$

que es en escencia el resultado que obtiene Krizek.

Observación 1.3.1 *En [25], el autor demuestra que una familia de tetraedros que verifique la condición de regularidad (1.12) satisface también la "condición del ángulo máximo" con una constante uniforme $\overline{\psi}$ (esto también se deduce fácilmente de nuestros resultados, vea la Observación 1.3.6). Es fácil ver, sin embargo, que la familia que aparece en la Figura 1*a)*, con longitudes arbitrarias r_1, r_2, r_3, no puede ser regular (elija por ejemplo $r_1 = r_3 = h^2$, y $r_2 = h$), pero satisface uniformemente la "condición del ángulo máximo". Análogas consideraciones subsisten para la familia de la Figura 1*b)*.

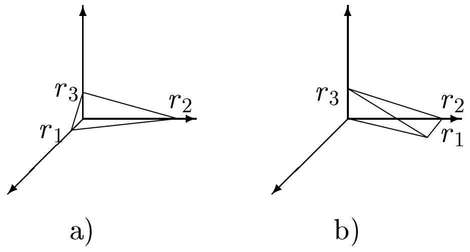

Figura 1

Cabe preguntarse entonces si es necesaria tanta regularidad para obtener estimaciones óptimas del error de interpolación. Está claro que no es posible aplicar de un modo directo el mismo argumento de Krizek para $p \neq \infty$. Como adelantamos en las secciones previas, Shenk en [34], muestra contraejemplos para $p = 2$, en particular ve que tomando $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = \epsilon \to 0$, en un elemento como el de la Figura 1 a), no existe ninguna constante C independiente de ϵ tal que

$$|u - \Pi(u)|_{1,2,K} \leq Ch|u|_{2,2,K}$$

para toda $u \in H^2(K)$. Sin embargo, aumentando el grado de los polinomios (grado mayor o igual a 2), y la regularidad de u, encuentra estimaciones óptimas para la familia de elementos dados precisamente por los de la Figura 1 a), y es fácil demostrar, a partir de esto, que entonces también habrá estimaciones óptimas para todos los elementos que estén en la clase dada en la siguiente

Definición 1.3.2 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un tetraedro. Diremos que pertenece a la N-clase de Shenk si y solo si existen, una transformación afín F y un $\overline{K} = c.c.\{\mathbf{0}, r_i\mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$ con $r_i > 0$ arbitrarios (como en la Figura 1a)) tales que, $F(x) = Bx + p$, $F(\overline{K}) = K$, y la matriz B que aparece en la F verifica $\kappa(B) < N$ (con κ denotamos el número de condición).*

En vista del contraejemplo mencionado, parecía entonces inevitable el camino elegido por Shenk ya que no puede esperarse orden óptimo para el error en H^1. Sin embargo en [18], Durán, valiéndose de la versión del teorema de traza en $W^{1,p}$ dado en el Lema 1.3.1 demuestra (en el Teorema 1.3.1 usaremos la técnica expuesta en [18] por ello no entramos aquí en detalles) estimaciones óptimas en $W^{1,p}$, $p > 2$, para polinomios de grado uno y para tetraedros de la forma $\overline{K} = c.c.\{\mathbf{0}, r_i\mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$ con $r_i > 0$ arbitrarios, y por ende para toda N-clase de Shenk.

Lema 1.3.1 *Sea $y = (y_1, y_2) \subset \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ y $f(y,t)$ tal que $sop(f) \subset B(0,M)$ y $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ con $3 > p > 2$. Entonces existe $C = C(M)$ pero independiente de p tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(0,0,t)|^p dt \leq \frac{C}{(p-2)^{\frac{p}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_y f(y,t)|^p dydt \tag{3.30}$$

Dem. La omitimos por brevedad, ver [18]. □

La constante en la estimación que se obtiene en [18] se desprende de la dada en este lema y por ende se deteriora para p cercano a 2, en conformidad con el contrajemplo citado.

Observación 1.3.2 *Por el teorema standard de extensión en $W^{1,p}$ el Lema 1.3.1 puede utilizarse en el elemento de referencia $\hat{K} = c.c.\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$, o en cualquier otro dominio fijo, aunque, desde luego, la constante dependerá de dicha elección.*

En esta sección demostraremos esencialmente dos cosas, que en realidad las estimaciones del error pueden extenderse a la familia de elementos bajo $MAC(\overline{\psi})$, y que esta condición es realmente más débil que la necesaria para pertenecer a alguna $N-clase$ de Shenk. Para ver ambas cosas hay que dar una caracterización analítica (antes que geométrica) de la *condición del ángulo máximo*, y contrariamente a la anterior, una caracterización geométrica (antes que analítica) de la clase de Shenk.

Comenzaremos ocupandonos primero de la $N-clase$ de Shenk. Veamos, pues, para empezar, la siguiente

Definición 1.3.3 *Diremos que el tetraedro K satisface la "propiedad del vértice regular" con una constante $\overline{c} > 0$ si K posee un vértice $\mathbf{p}_0$ tal que $|det\ M| \geq \overline{c} > 0$, donde M es la matriz construida con $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2,3$ como filas o columnas (estamos utilizando la notación dada al pricipio de la Sección 1.1, es decir que los $\mathbf{v}_i$ son los vectores unitarios con la dirección de las aristas concurrentes en $\mathbf{p}_0$).*

Observación 1.3.3 *Los tetraedros recién definidos poseen una clara interpretación geométrica. Son aquellos que poseen un vértice con tres aristas "uniformemente" linealmente independientes.*

Veamos ahora un lema sencillo que nos permitirá demostrar luego que la clase de Shenk es equivalente a la de los elementos definidos por la *propiedad del vértice regular*.

Lema 1.3.2 *Sea $M \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz cuyas filas (o columnas) F_i, $1 \leq i \leq 3$ verifican $c_1 \leq \|F_i\| \leq c_2$ para ciertas constantes $0 < c_i$ y para cierta norma $\| \quad \|$. Entonces si $\kappa(M) < N$ debe ser $|det(M)| > c$ para $c = c(c_i, N)$ pero independiente de M.*

Dem. Ante todo observemos que por equivalencia de normas siempre se puede suponer, modificando si hiciera falta los c_i, que $c_1 \leq \|F_i\|_1 \leq c_2$. Análogamente podemos considerar que es la condición en norma infinito la que verifica $\kappa_\infty(M) < N$. Supongamos ahora que no es cierta la afirmación hecha en el Lema, existen entonces c_1, c_2, N como en la hipótesis y una familia M_n de matrices que verifican $|det(M_n)| \leq \frac{1}{n}$, $\kappa_\infty(M_n) \leq N$, y $c_1 \leq \|F_i^n\|_1 \leq c_2$, donde F_i^n representa la fila $i - esima$ de la matriz M_n. Por estar las respectivas filas acotadas en norma podemos extraer una subsucesión de matrices, que seguimos llamando M_n, tal que $\|M_n - M\|_\infty = max_{1\leq i\leq 3}\|F_i^n - F_i\|_1 \to 0$ para cierta matriz M de filas F_i (note que hemos utilizado la propiedad de que para toda matriz M se tiene $\|M\|_\infty = max_{1\leq i\leq 3}\{\|F_i\|_1\}$) que además verifican también $c_1 \leq \|F_i\|_1 \leq c_2$ aunque sin embargo deba ser $det(M) = 0$.

Consideremos entonces la bien conocida identidad

$$\frac{1}{\kappa_\infty(B)} = inf\{\frac{\|B - A\|_\infty}{\|B\|_\infty}, \quad con \quad A \in \mathcal{S}\} \tag{3.31}$$

donde $\mathcal{S}$ representa el conjunto de las matrices singulares, y de donde se desprende, por ser $det(M) = 0$

$$\frac{\|M_n\|_\infty}{\|M_n - M\|_\infty} \leq \kappa_\infty(M_n) \leq N \tag{3.32}$$

pero del hecho que $\|M_n\|_\infty = max_{1\leq i\leq 3}\{\|F_i^n\|_1\} \geq c_1 > 0$, más la ecuación (3.32) tenemos

$$\frac{c_1}{\|M_n - M\|_\infty} \leq \kappa_\infty(M_n) \leq N \tag{3.33}$$

en contra de $\|M_n - M\|_\infty \to 0$, lo que finaliza la demostración. Para probar la misma propiedad reemplazando filas por columnas basta trabajar con la traspuesta M^t o repetir el argumento con el numero de condición en norma 1. $\square$

Observación 1.3.4 *Obviamente las cotas requeridas sobre las filas de la matriz M no pueden ser removidas, en efecto, basta considerar el contraejemplo dado por $M = hI$, con I la matriz identidad. Se tiene $\kappa(M) = 1$, y $det(M) = h^3 \to 0$ si $h \to 0$.*

Ahora podemos demostrar

Lema 1.3.3 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un tetraedro. Si K esta en la $N -$ clase de Shenk entonces posee la propiedad del vértice regular con cierta constante $c = c(N) > 0$. Recíprocamente, si posee dicha propiedad existe $N = N(c)$ tal que K esta en la $N -$ clase de Shenk.*

Dem. Si K está en la clase de Shenk, entonces existen $r_i > 0$, $1 \leq i \leq 3$, y una matriz B tales que $\kappa_\infty(B) \leq N$ (una vez más usamos el hecho de que las condiciones en dos normas cualesquiera son equivalentes), $K = F(\overline{K})$, con $F(x) = Bx + \mathbf{p}_0$, $\overline{K} = c.c.\{\mathbf{0}, r_i\mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$. Como dicha transformación lleva el origen al vértice $\mathbf{p}_0$, consideremos los vectores $\mathbf{v}_i$ unitarios, con las direcciones dadas por las aristas de longitud, digamos, l_i, concurrentes en $\mathbf{p}_0$. Se tiene evidentemente

$$B(\mathbf{e}_i) = \frac{l_i}{r_i}\mathbf{v}_i = \alpha_i\mathbf{v}_i \tag{3.34}$$

donde hemos llamado $\alpha_i = \frac{l_i}{r_i}$. Entonces $\alpha_i > 0$, y

$$det(M) = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}det(B) \tag{3.35}$$

donde M es la de la Definición 1.3.3. Además nada cambia reemplazando en (3.35), B por su traspuesta B^t, por lo que consideraremos que $F_i = \alpha_i\mathbf{v}_i$ es la fila $i - esima$ de B. Para ver que K satisface la propiedad del vértice regular basta acotar $det(M)$ por debajo. Pero por un lado, de (3.34) podemos suponer que $max_{1\leq i\leq 3}\{\alpha_i\} = 1$ pues la condición de una matriz no cambia si se la multiplica por un escalar arbitrario. Por otro lado tampoco perdemos generalidad si suponemos $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 = 1$. Construyamos entonces la matriz singular S que difiere de B en que la fila correspondiente a $\alpha_1\mathbf{v}_1$ es nula. Por la propiedad enunciada en (3.31) debe ser

$$\|B\|_\infty \leq \|B - S\|_\infty\kappa_\infty(B) \leq 3N\alpha_1 \tag{3.36}$$

pues $\|\mathbf{v}_1\|_2 = 1$, pero por otro lado $\|B\|_\infty \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, pues $\|\mathbf{v}_3\|_2 = 1$. De aquí y de (3.36) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{3}3N} \leq \alpha_1 \tag{3.37}$$

entonces la matriz B posee las filas $F_i = \alpha_i\mathbf{v}_i$ con la propiedad

$$c_1 = \frac{1}{N} \leq \|F_i\|_1 \leq c_2 = 3 \tag{3.38}$$

y por ser $\kappa(B) \leq N$ podemos utilizar el lema previo. De allí, más la ecuación (3.35) sigue que $|det(M)| \geq c > 0$ donde $c = c(c_i, N) = c(N)$. Con lo que demostramos que K posee la propiedad del vértice regular.
La recíproca es mas sencilla. En efecto, sea $\mathbf{p}_0$ el vértice que define los tres vectores unitarios $\mathbf{v}_i$, $\|\mathbf{v}_i\|_2 = 1$, tales que la correspondiente matriz M que los tiene por filas verifica $|det(M)| \geq c$. Entonces por estar los coeficientes de dicha matriz acotados digamos por uno, debe ser $\|M\|_\infty \leq 3$, análogamente la matriz de cofactores verifica $\|cof(M)\|_\infty \leq 6$ pero entonces $\kappa_\infty(M) \leq \frac{18}{c}$. Llamando l_i a las longitudes de las aristas correspondientes a las direcciones $\mathbf{v}_i$ y haciendo $B = M$ es inmediato que $F(x) = Bx + \mathbf{p}_0$ transforma el tetraedro $\overline{K} = c.c.\{\mathbf{0}, l_i\mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$ en K con lo que finaliza la demostración. $\square$

Observación 1.3.5 *Con esta caracterización geométrica a la mano, es inmediato demostrar que la familia de elementos de la Figura 1* b) *no pertenece a ninguna $N-$ clase de Shenk, para N independiente de r_i. En efecto, tomando $r_2 = 1$, $r_1 = r_3 = h$ puede verse facilmente que no hay ningún "vértice regular".*

Ahora buscaremos una caracterización analítica de la *condición del ángulo máximo*. Comencemos con ciertos lemas previos, el primero es muy sencillo y su demostración puede verse en [25].

Lema 1.3.4 *Sea K un tetraedro bajo $MAC(\overline{\psi})$. Dado un vértice arbitrario $\mathbf{p}$ de K, sean $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3$ los ángulos entre las caras concurrentes en $\mathbf{p}$. Entonces,*

$$\theta_1 > \frac{\pi}{3} \qquad y, \qquad \theta_1, \theta_2 \in (\frac{\pi - \overline{\psi}}{2}, \overline{\psi}] \tag{3.39}$$

Lema 1.3.5 *Sea K un tetraedro y $\overline{K}$ otro, obtenido del primero por una transformación afín dada por una matriz A. Si K satisface $MAC(\overline{\psi})$ entonces $\overline{K}$ satisface $MAC((1 - \frac{2}{\pi\kappa(A)})\pi + \frac{2}{\pi\kappa(A)}\overline{\psi})$ donde como es usual $\kappa(A)$ es la condición de A en la norma euclidea.*

Dem. Dados dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ llamemos α al ángulo entre ellos, y $\overline{\alpha}$ al ángulo entre $A\mathbf{v}_1$ y $A\mathbf{v}_2$. Si ponemos $t = \langle A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 \rangle / \|A\mathbf{v}_2\|^2$ se obtiene

$$\sin \overline{\alpha} = \frac{\|A(\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2)\|}{\|A\mathbf{v}_1\|} \geq \frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2\|}{\|\mathbf{v}_1\|} \geq \frac{1}{\kappa(A)} \sin \alpha$$

por lo tanto,

$$\overline{\alpha} \geq \frac{2}{\pi\kappa(A)} \alpha \tag{3.40}$$

En efecto, para $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, esta desigualdad sigue de la anterior conjuntamente con $2/\pi \leq \sin\alpha/\alpha$ y $\sin\overline{\alpha} \leq \overline{\alpha}$. Para $\alpha > \pi/2$ dividimos el ángulo en dos mitades y aplicamos el argumento a cada una de ellas.

Por otro lado, utilizando (3.40) para el ángulo complementario $\pi - \alpha$ obtenemos

$$\overline{\alpha} \leq (1 - \frac{2}{\pi\kappa(A)})\pi + \frac{2}{\pi\kappa(A)} \alpha \tag{3.41}$$

y la cota para el ángulo máximo en cada cara de $\overline{K}$ se sigue inmediatamente de (3.41). Por otro lado, para los ángulos entre dos caras de $\overline{K}$ se sigue de (3.40) aplicado al ángulo entre los correspondientes vectores normales a las caras, teniendo en cuenta que dichos vectores se obtienen de las respectivas normales a las caras de K por la transformación dada por la matriz de cofactores de A (ver [12, pag. 53]), que obviamente tiene el mismo numero de condición que A^{-1}, y por ende también de A. □

Observación 1.3.6 *Note que como el tetraedro de referencia $\hat{K}$ verifica trivialmente la condición del ángulo máximo. Se tiene entonces por la Proposición 1.1.1 que, si K es regular, la aplicación $F : \hat{K} \to K$ posee una matriz asociada con número de condición acotado (por una constante que depende de $\frac{h_K}{\rho_K}$) y por el Lema 1.3.5, K debe verificar la condición del ángulo máximo.*

Es facil ver que a través de un movimiento rígido cualquier tetraedro puede transformarse en uno como el de la Figura 2.

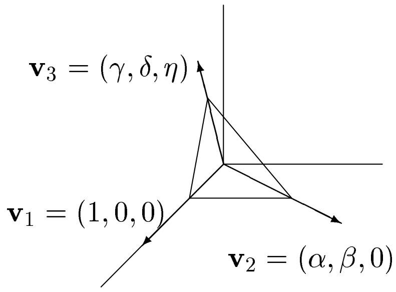

Figura 2

Mas aún se tiene:

Lema 1.3.6 *K es un tetraedro bajo $MAC(\overline{\psi})$ si y solo si existe un movimiento rígido que transforma K en un $\overline{K}$ como en la Figura 2, i.e. $\overline{K} = c.h.\{\mathbf{0}, l_1\mathbf{v}_1, l_2\mathbf{v}_2, l_3\mathbf{v}_3\}$ donde $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (\alpha, \beta, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (\gamma, \delta, \eta)$ son vectores unitarios, $\beta > 0$, $\eta > 0$, $l_i > 0$ y existe una constante $m_0 = m_0(\overline{\psi})$ tal que,*

1) $|\delta/\eta| \le m_0$
2) $1/\beta \le m_0$ *o bien,* $|\frac{\alpha l_2 - l_1}{l_2 \beta}| \le m_0$
3) $1/\eta \le m_0$ *o bien,* $|\frac{\gamma l_3 - l_1}{l_3 \eta}| \le m_0$

Dem. Primero probamos que $MAC(\overline{\psi})$ implica la existencia de un movimiento rígido que verifique *1), 2), 3)*.

Sea $\mathbf{p}$ cualquier vértice de K. Del Lema 1.3.4 sabemos que los ángulos mayores θ_1, θ_2 entre las caras concurrentes en $\mathbf{p}$ satisfacen (3.39). Llamemos F a la cara tal que θ_1 y θ_2 representan los ángulos entre ella y las caras vecinas. Claramente, existe un movimiento rígido que transforma $\mathbf{p}$ en el origen y que lleva la cara F al plano $z = 0$ como en la Figura 2 de un modo tal que $\beta, \eta > 0$.

Denotaremos con S_{ij} a la cara determinada por $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$ y con ν_{ij} al correspondiente vector normal.

Para ver *1)*, observe primero que

$$\nu_{13} = \frac{1}{(\eta^2 + \delta^2)^{1/2}}(0, -\eta, \delta)$$

y $\nu_{12} = (0, 0, -1)$. Llamando ahora θ al ángulo entre S_{12} y S_{13} (recuerde que $\theta = \theta_1$ o $\theta = \theta_2$, con θ_i como antes) tenemos

$$\sin^2\theta = \frac{1}{1 + (\frac{\delta}{\eta})^2}$$

y, como $\overline{\psi} \geq \theta > \frac{\pi - \overline{\psi}}{2}$, resulta *1)*.

Para ver *2)* llamemos μ_1 al ángulo entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y μ_2 al otro ángulo de la cara S_{12} adyacente a $\mathbf{v}_1$. Tenemos

$$\sin^2 \mu_1 = \beta^2$$

y,

$$\sin^2 \mu_2 = \frac{1}{(1 + (\frac{l_2 \alpha - l_1}{l_2 \beta})^2)}$$

Como el ángulo máximo de la cara S_{12} esta acotado por $\overline{\psi}$, se sigue que

$$\sin^2 \mu_1 + \sin^2 \mu_2 = \beta^2 + \frac{1}{(1 + (\frac{l_2 \alpha - l_1}{l_2 \beta})^2)}$$

tiene una cota inferior positiva dependiente solo de $\overline{\psi}$ y así obtenemos *2)*.

Sea ahora μ_1 el ángulo entre $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ y μ_2 el restante ángulo adyacente a $\mathbf{v}_1$ de la cara S_{13}, se tiene

$$\sin^2 \mu_1 = \delta^2 + \eta^2$$

$$\sin^2 \mu_2 = \frac{1}{1 + (\frac{l_3 \gamma - l_1}{l_3 \eta})^2 (\frac{1}{1 + (\frac{\delta}{\eta})^2})}$$

y como el ángulo máximo de S_{13} esta acotado por $\overline{\psi}$,

$$\sin^2 \mu_1 + \sin^2 \mu_2 = \eta^2 (1 + \frac{\delta^2}{\eta^2}) + \frac{1}{1 + (\frac{l_3 \gamma - l_1}{l_3 \eta})^2 (\frac{1}{1 + (\frac{\delta}{\eta})^2})}$$

está acotado por abajo, por una constante positiva que depende solo de $\overline{\psi}$ hecho que junto con *1)* implica *3)*.

Probemos ahora la recíproca. Debemos ver que si *1)*, *2)* y *3)* se verifican, entonces el tetraedro de la Figura 2 satisface $MAC(\overline{\psi})$ con cierta $\overline{\psi}$ dependiente solo de m_0.

Considere para ello las transformaciones definidas por las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & (l_2 \alpha - l_1)/l_2 \beta & \gamma/\eta \\ 0 & 1 & \delta/\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & (l_3 \gamma - l_1)/l_3 \eta \\ 0 & \beta & \delta/\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & (l_2 \alpha - l_1)/l_2 \beta & (l_3 \gamma - l_1)/l_3 \eta \\ 0 & 1 & \delta/\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_1, A_2, A_3 y A_4 transforman los tetraedros dados en las Figuras 3 a), b), c) y d) respectivamente en el tetraedro $\overline{K}$ de la Figura 2. Note que los tetraedros de las Figuras 3 a) y d) son movimientos rígidos del dado en la Figura 1 a) mientras que los de las Figuras 3 b) y c) son movimientos rígidos del dado en la Figura 1 b) que desde luego satisfacen la condición del ángulo máximo con una constante independiente de r_1, r_2 y r_3. Por otro lado bajo las hipótesis dadas *1)*, *2)* y *3)*, por lo menos una de las matrices A_j tienen numero de condición acotado por una constante dependiente solo de m_0. En efecto, esto se ve facilmente del hecho que $\kappa(A) \leq Cmax|a_{ij}|^3/|\det A|$. La demostración concluye entonces usando el Lema 1.3.5. □

Observación 1.3.7 *Un hecho importante, que deseamos destacar, es que durante la demostración del lema previo observamos que si K satisface las hipótesis 1),2),3) siempre alguna de las matrices* A_i *posee número de condición acotado por una constante que depende solo de* m_0. *Sin embargo se tiene, más aún, que para cierto i, las normas* $\|A_i\|$, $\|A_i^{-1}\|$ *propiamente están acotadas por una constante que depende solo de* m_0. *Es decir que cualquier K que verifique* $MAC(\overline{\psi})$ *puede llevarse a través de una transformación afín a un elemento de las familias dadas por la Figura 1* a) *o* b), *dicha transformación posee una matriz asociada B tal que* $\|B\|$ *y* $\|B^{-1}\|$ *se hallan acotados por una constante que depende solo de* $\overline{\psi}$. *En particular de aquí se concluye que estos elementos, afímente equivalentes, tendrán diámetros comparables a través de una constante que depende de* $\overline{\psi}$.

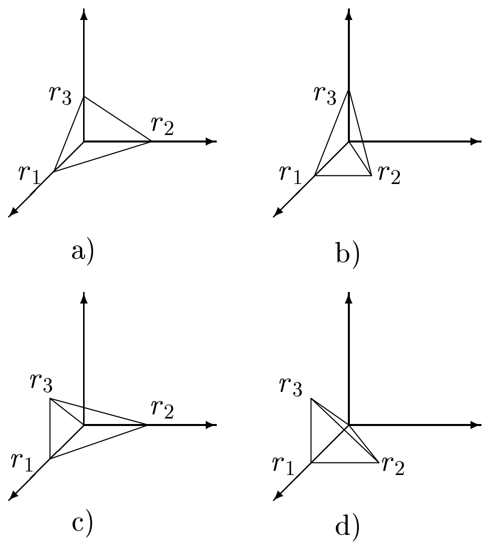

Figura 3

Observación 1.3.8 *La caracterización obtenida en el lema previo nos permite demostrar que la familia de los elementos bajo la* condición del ángulo máximo *es realmente "mayor" que la clase de Shenk. En efecto, esta última se obtenía por transformaciones, con numero de condición acotado, aplicadas a tetraedros del tipo de la Figura 1* a) *(con* r_1, r_2 *y* r_3 *arbitrarios). Nuestro resultado muestra que la familia de los elementos que satifacen la "*condición del ángulo máximo*" puede obtenerse análogamente, pero ahora transformando las dos familias dadas en la Figura 1 (vea también la Observación 1.3.5).*

Observación 1.3.9 *Es facil ver dividiendo un cubo en seis tetraedros y comprimiendo la figura* *resultante en una dirección paralela a una de sus caras que es inevitable la aparición de elementos del tipo de la Figura 1*b). *Esto muestra las limitaciones de la clase de Shenk, pues no contempla elementos que aparecen naturalmente en refinamientos muy sencillos.*

La caracterización dada en el Lema 1.3.6 nos será útil en el Capítulo 3 cuando trabajemos con la interpolación de Raviart-Thomas. Ahora nos va a permitir también demostrar el resultado principal de esta sección, que consiste en estimaciones óptimas para la interpolación de lagrange de grado uno en $W^{1,p}$, $p > 2$, sobre los elementos que verifican la *condición del ángulo máximo*. La importancia del Lema 1.3.6 radica en que basta hacer la demostración en cualquier elemento de las familias dadas en la Figura 1.

Antes sin embargo vamos a precisar cierta estimación que hemos utilizado antes para el caso $p = 2$.

Observación 1.3.10 *Considere $\overline{K}$ un tetraedro, $B \subset \overline{K}$ una bola fija, y el desarrollo de Taylor P_1 de primer orden para una cierta $\overline{u} \in W^{1,p}(\overline{K})$, en un entorno de $\eta \in B$.*
Podemos escribir

$$P_1(\eta, \nu) = \overline{u}(\eta) + \nabla\overline{u}(\eta)(\nu - \eta)$$

y se tiene que la <u>función lineal</u>

$$\overline{u}_B(\nu) = \frac{1}{|B|}\int_B P_1(\eta, \nu)d\eta \tag{3.42}$$

verifica

$$\|\frac{\partial(\overline{u} - \overline{u}_B)}{\partial\nu_i}\|_{0,p,\overline{K}} \leq C|\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu_i}|_{1,p,\overline{K}} \tag{3.43}$$

(basta aplicar la desigualdad de Poincaré a la función $\frac{\partial(\overline{u}-\overline{u}_B)}{\partial\nu_i}$). Desde luego, $C = C(B, \overline{K})$, pero puede verse [17] que es independiente de p.

Teorema 1.3.1 *Sea K bajo $MAC(\overline{\psi})$. Entonces existe una constante $C_p = \frac{C(K_1,K_2,\overline{\psi})}{(p-2)^{p/2}}$ con $K_1 = c.c.\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$, $K_2 = c.c.\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tal que para toda $u \in W^{2,p}(K)$*

$$\|\frac{\partial(u - \Pi(u))}{\partial x_i}\|_{0,p,K} \leq C_p h|\frac{\partial u}{\partial x_i}|_{1,p,K} \tag{3.44}$$

más aún si K es como en la Figura 1, es decir, $K = c.c.\{\mathbf{0}, r_i\mathbf{e}_i\}_{1\leq i\leq 3}$, o $K = c.c.\{\mathbf{0}, r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2, r_2\mathbf{e}_2, r_3\mathbf{e}_3\}$ con $r_i > 0$, entonces puede escribirse

$$\|\frac{\partial(u - \Pi(u))}{\partial x_i}\|_{0,p,K} \leq C_p\{\sum_{j=1}^{3}(r_j|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}|_{0,p,K})^p\}^{1/p} \tag{3.45}$$

Dem. Evidentemente (3.44) se sigue de (3.45) más el Lema 1.3.6. En efecto, de dicho lema puede verse (Observación 1.3.7) que existe una transformación afín que lleva K en uno de los elementos de la Figura 1 y cuya matriz asociada B verifica $\|B\|, \|B^{-1}\| \leq C(\overline{\psi})$. Suponiendo entonces válida (3.45) y cambiando de variables, se obtiene (3.44) por ser comparables los diámetros de

ambos dominios. Habrá pues que probar solo (3.45). En [18] se demuestra (3.45) para la clase de Shenk, por ende solo basta seguir las ideas allí expuestas para los tetraedros de la forma $K = c.c.\{\mathbf{0}, r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2, r_2\mathbf{e}_2, r_3\mathbf{e}_3\}$.
Consideremos primero el dominio K_2 de la hipótesis (note que este corresponde al caso $r_i = 1$), que después nos permitirá concluir simplemente reescalando.
De la ecuación (3.43) con $K = K_2$ y una bola $B \subset K_2$ fija, resulta que, llamando $\overline{x}_i$ a las variables, basta acotar

$$\|\frac{\partial(\overline{u}_B - \Pi(\overline{u}))}{\partial \overline{x}_i}\|_{0,p,K_2} \tag{3.46}$$

para toda $\overline{u} \in W^{2,p}(K_2)$. Pero por ser lineal la diferencia $v = \overline{u}_B - \Pi(\overline{u})$ será constante la derivada parcial $\frac{\partial v}{\partial \overline{x}_i}$, así puede expresarse

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{x}_i} = v(\mathbf{e}_i) - v(\mathbf{0}) \quad si \quad i \neq 1 \tag{3.47}$$

y para $i = 1$

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{x}_1} = v(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - v(\mathbf{e_2}) \tag{3.48}$$

ahora veamos la cota para $i = 1$ ya que las otras dos son aún más sencillas

$$\|\frac{\partial v}{\partial \overline{x}_1}\|^p_{0,p,K_2} = |K_2||v(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - v(\mathbf{e_2})|^p \leq |v(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - v(\mathbf{e_2})|^p \tag{3.49}$$

pero como $\Pi(\overline{u})$ coincide con $\overline{u}$ en los vértices, si llamamos $w = \overline{u}_B - \overline{u}$ resulta

$$|v(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - v(\mathbf{e_2})| = |w(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - w(\mathbf{e_2})| \tag{3.50}$$

por otro lado

$$|w(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - w(\mathbf{e_2})| = \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial \overline{x}_1}(t, 1, 0)dt \tag{3.51}$$

y de (3.49), (3.50), (3.51) más la desigualdad de Hölder resulta

$$\|\frac{\partial v}{\partial \overline{x}_i}\|^p_{0,p,K_2} \leq \|\frac{\partial w}{\partial \overline{x}_i}\|^p_{0,p,E} \tag{3.52}$$

donde E representa la arista que une los vértices $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2$. Usando ahora el Lema 1.3.1 (vea la Observación 1.3.2) tenemos

$$\|\frac{\partial \overline{u}_B - \Pi(\overline{u})}{\partial \overline{x}_i}\|^p_{0,p,K_2} \leq \frac{C}{(p-2)^{\frac{p}{2}}}|\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}_i}|^p_{1,p,K_2} \tag{3.53}$$

lo que, junto con (3.43), da (3.45) con $K = K_2$. La demostración para un $K = c.c.\{\mathbf{0}, r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2, r_2\mathbf{e}_2, r_3\mathbf{e}_3\}$ y una $u \in W^{2,p}(K)$ se obtiene como anticipamos por cambio de variables. En efecto, consideremos la aplicación

$$L(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{r_1}, \frac{x_2}{r_2}, \frac{x_3}{r_3}) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$$

que lleva el dominio K en K_2. Definiendo entonces $\overline{u} = uoL^{-1}$, aplicando (3.45) para $\overline{u}$, y usando además que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}_i} r_i$ resulta (3.45) en el caso general. □

Observación 1.3.11 *Note un detalle muy importante que debe tenerse en cuenta. La estimación para* $\|\frac{\partial\overline{u}_B-\Pi(\overline{u})}{\partial\overline{x}_i}\|_{0,p,K_2}$ *depende solo de* $|\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}_i}|_{1,p,K_2}$ *y no de toda la seminorma* $|\overline{u}|_{2,p,K}$*, ya que de otro modo la constante que aparece en (3.45) al efectuar el reescale dependería también de cocientes de la forma* $\frac{r_j}{r_i}$*, y entonces no se podría asegurar orden óptimo para* r_i*,* r_j *arbitrarios.*

1.4 Elementos cuadriláteros no degenerados

A partir de esta sección y en lo que resta del Capítulo utilizaremos la siguiente notación salvo indicación contraria.

Sea K un cuadrilátero convexo. Con M_i vamos a denotar sus vértices en sentido antihorario. Dados $a, b, p, q > 0$, $K(a, b, p, q)$ reprensentará un cuadrilátero convexo de vértices $\overline{M}_1 = (0, 0)$, $\overline{M}_2 = (a, 0)$, $\overline{M}_3 = (p, q)$ and $\overline{M}_4 = (0, b)$. En particular $\hat{K} = K(1, 1, 1, 1)$ es el elemento de referencia y sus vertices serán llamados $\hat{M}_i$. Vamos a usar la variable $\overline{x}$ sobre $K(a, b, p, q)$, $\hat{x}$ sobre $\hat{K}$ y x sobre K.
La interpolación en elementos isoparamétricos sobre K se define en forma similar a la de los elementos lineales, a través de las correspondientes funciones básicas. En efecto, consideremos $\hat{\phi}_i$, la función básica bilineal asociada al vértice $\hat{M}_i$, i.e. $\hat{\phi}_i(\hat{M}_j) = \delta_i^j$. Notar que cada $\hat{\phi}_i$ admite una expresión explícita sencilla, por ejemplo, $\hat{\phi}_1(\hat{x}) = (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)$ (por la convención explicada al comienzo, en el cuadrilátero de referencia se tiene $\hat{M}_1 = (0, 0)$). Se define entonces la interpolación de Lagrange sobre $\hat{K}$ como $\hat{Q}(\hat{u}) = \sum_{i=1}^{4} \hat{u}(\hat{M}_i)\hat{\phi}_i$.
Con la intención de extender la definición del operador a funciones definidas sobre un cuadrilátero arbitrario, consideremos $F_K : \hat{K} \to K$ la transformación bilineal $F_K(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{4} M_i\hat{\phi}_i(\hat{x})$, que nos permite definir las funciones básicas sobre K , *ya no más bilineales* , *ni aún polinomiales en general*, como $\phi_i(x) = \hat{\phi}_i(F_K^{-1}(x))$. Entonces el operador de interpolación Q sobre K toma la forma

$$Qu(x) = \hat{Q}\hat{u}(\hat{x})$$

Los elementos cuadriláteros isoparamétricos fueron estudiados por vez primera en [14], allí los autores desarrollan en esencia los mismos pasos que desembocan en el Teorema 1.1.1 arribando por ende a un resultado análogo. Algo puede entonces preverse con esta estrategia: si no se obtuvo orden óptimo sobre elementos anisotrópicos lineales no debe esperarse mejor suerte en este caso. Peor aún, existen complicaciones intrínsecas de los elementos isoparamétricos que aparecen debido a la falta de linealidad de la aplicación F. Esta sección está dedicada a desarrollar brevemente este enfoque en donde podrán apreciarse tales limitaciones. Dejaremos lo que resta del Capítulo para atacar el problema con elementos anisotrópicos. Diremos en general que los cuadriláteros son *degenerados* tanto si pierden la condición de regularidad (1.12), como si devienen en elementos triangulares aunque verifiquen (1.12) uniformemente.
Comenzamos con un breve resumen de los resultados conocidos, comenzando con los elementos no degenerados que serán tratados en esta sección, y dejando los demás para la siguiente.

Empezamos demostrando una variante de la desigualdad propuesta en el Lema 1.1.1 sobre el dominio de referencia, pero esta vez tomando el ínfimo sobre el espacio $Q_1(\hat{K})$. Esto permite eliminar del miembro derecho de (1.1) la derivada mixta $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}$.
Es decir que si se define:

$$[\hat{u}]_{2,2,\hat{K}} = \|\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial^2 \hat{x}}\|_{0,2,\hat{K}} + \|\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial^2 \hat{y}}\|_{0,2,\hat{K}} \tag{4.54}$$

entonces se puede demostrar

Lema 1.4.1 *Para toda* $\hat{u} \in H^2(\hat{K})$, $m = 0, 1$,

$$inf_{q \in Q_1(\hat{K})} \|\hat{u} - q\|_{m,2,\hat{K}} \leq C(\hat{K})[\hat{u}]_{2,2,\hat{K}} \tag{4.55}$$

Dem. La demostración hace uso de la siguiente desigualdad (ver [35]):

$$\|\hat{v}\|_{2,2,\hat{K}} \leq C(\hat{K})\{\|\hat{v}\|_{0,2,\hat{K}} + [\hat{v}]_{2,2,\hat{K}}\} \tag{4.56}$$

y se obtiene de aquí con argumentos de compacidad.
En efecto, comencemos con el caso $m = 0$, y observemos que el ínfimo del primer miembro de (4.55) se realiza en $p = \mathcal{O}(\hat{u})$, la proyección ortogonal de $\hat{u}$, en L^2, sobre el subespacio $Q_1(\hat{K})$. Por lo tanto, si (4.55) no resulta cierta, existe una sucesión $w_n = v_n - \mathcal{O}(v_n) \in H^2(\hat{K})$ con la propiedad de que

$$\|w_n\|_{0,2,\hat{K}} = 1 \tag{4.57}$$

al tiempo que

$$[v_n]_{2,2,\hat{K}} = [w_n]_{2,2,\hat{K}} \to 0 \tag{4.58}$$

por (4.56), (4.57), y (4.58), w_n está acotada en $H^2(\hat{K})$, de aquí se obtiene una subsucesión, todavía llamada w_n, que converge fuertemente digamos a $w \in L^2(\hat{K})$. Este hecho, junto con las ecuaciones (4.56), (4.58), dicen que w_n es de Cauchy en $H^2(\hat{K})$ y así converge a w también en dicha norma. En consecuencia, volviendo una vez más a (4.58) concluimos que $[w]_{2,2,\hat{K}} = 0$, y por ende $w \in Q_1(\hat{K})$. Por construcción, sin embargo, w_n es ortogonal en L^2 a $Q_1(\hat{K})$ por tanto, denotando con $(\ ,\ )_{L^2(\hat{K})}$ al producto interno en $L^2(\hat{K})$

$$\|w\|^2_{0,2,\hat{K}} = (w, w)_{L^2(\hat{K})} = (w - w_n, w)_{L^2(\hat{K})} \leq \|w - w_n\|_{0,2,\hat{K}} \|w\|_{0,2,\hat{K}}$$

de donde $\|w\|^2_{0,2,\hat{K}} = 0$ y por tanto $w = 0$, contrariamente a $\|w_n\|_{0,2,\hat{K}} = 1$.
Tenemos pues probado el caso $m = 0$

$$inf_{p \in Q_1(\hat{K})} \|\hat{u} - p\|_{0,2,\hat{K}} \leq C(\hat{K})[\hat{u}]_{2,2,\hat{K}} \tag{4.59}$$

y para $m = 1$, se sigue de (4.56), pues de allí resulta

$$inf_{p \in Q_1(\hat{K})} \|\hat{u} - p\|_{1,2,\hat{K}} \leq inf_{p \in Q_1(\hat{K})} \|\hat{u} - p\|_{2,2,\hat{K}} \leq C(\hat{K})\{inf_{p \in Q_1(\hat{K})} \|\hat{u} - p\|_{0,2,\hat{K}} + [\hat{u}]_{2,\hat{K}}\} \tag{4.60}$$

lo cual demuestra lo propuesto en el Lema si tenemos en cuenta (4.59). □

Observación 1.4.1 *Igual que para el Lema 1.1.1 existe en este caso una demostración constructiva. En efecto, en [17] se da la expresión explícita de un polinomio* $q(\hat{u}) \in Q_1(\hat{K})$ *tal que* $\|\hat{u} - q\|_{m,2,\hat{K}} \leq C(\hat{K})[\hat{u}]_{2,2,\hat{K}}$.

Del Lema 1.4.1, usando además la invariancia de $\hat{Q}$ sobre $Q_1(\hat{K})$, y su continuidad sobre $H^2(\hat{K})$ se obtiene inmediatamente

Lema 1.4.2 *En* $\hat{K}$ *se tiene*

$$|\hat{u} - \hat{Q}(\hat{u})|_{m,2,\hat{K}} \leq C(\hat{K})[\hat{u}]_{2,2,\hat{K}} \tag{4.61}$$

para toda $u \in H^2(\hat{K})$, *con* $m = 0, 1$.

Ahora para cambiar de variables se necesita un análogo del Lema 1.1.2. Como la F ya no es afín sus derivadas no serán constantes, y por ende el Jacobiano, que llamaremos J_F, tampoco. Esto obliga a intentar el control de estos términos en norma infinito, y este va a ser uno de los factores que van a generar restricciones innecesarias a la hora de hallar estimaciones uniformes para el error de interpolación.

Pero antes veamos el siguiente

Lema 1.4.3 *Sea $F : \hat{K} \to K$. Para toda $\hat{u} \in H^2(\hat{K})$, se define $u = \hat{u} \circ F^{-1}$, entonces $u \in H^2(K)$ y además*

$$|u|_{0,2,K} \leq |J_F|^{1/2}_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{u}|_{0,2,\hat{K}} \tag{4.62}$$

$$|u|_{1,2,K} \leq C |J_F|^{1/2}_{0,\infty,\hat{K}} |F^{-1}|_{1,\infty,K} |\hat{u}|_{0,2,\hat{K}} \tag{4.63}$$

Paralelamente, dada $u \in H^2(K)$, definiendo $\hat{u} = u \circ F$, se tiene que $\hat{u} \in H^2(\hat{K})$ y además

$$|\hat{u}|_{2,2,\hat{K}} \leq C |J_{F^{-1}}|^{1/2}_{0,\infty,K} (|F|^2_{1,\infty,K} |u|_{0,2,K} + |F|_{2,\infty,\hat{K}} |u|_{1,2,K}) \tag{4.64}$$

más aún

$$[\hat{u}]_{2,2,\hat{K}} \leq C |J_{F^{-1}}|^{1/2}_{0,\infty,K} |F|^2_{1,\infty,K} |u|_{0,2,K} \tag{4.65}$$

Dem. Solo hay que cambiar de variables y acotar los terminos de dicho cambio en norma infinito. Quizá solo merece particular atención (4.65), allí hay que notar que como $[\hat{u}]$ involucra solo derivadas segundas respecto de $\hat{x}$, $\hat{y}$, sucede lo propio con F, pero como F es bilineal no subsiste despues de derivarse de este modo, así es que no aparece el término de las derivadas segundas propuesto en (4.64). □

Por aplicación directa de los Lemas 1.4.2, y 1.4.3, resulta, cambiando de variables y recordando que $\hat{Q}(\hat{u}) \circ F^{-1} = Q(u)$, la siguiente desigualdad con $m = 0, 1$

$$\|u - Q(u)\|_{m,2,K} \leq C |J_F|^{1/2}_{0,\infty,\hat{K}} |J_{F^{-1}}|^{1/2}_{0,\infty,K} |F^{-1}|^m_{1,\infty,K} |F|^2_{1,\infty,K} |u|_{0,2,K} \tag{4.66}$$

para toda $u \in H^2(K)$.
Se precisan, pues, cotas para las seminormas involucradas en esta desigualdad. De eso trata el siguiente lema cuya demostración puede verse en [14].

Lema 1.4.4 *Sea K un cuadrilátero convexo, γ_i, $1 \leq i \leq 4$ sus ángulos interiores y h'_K la longitud de su lado menor. Llamemos $\sigma'_K = \frac{h_K}{h'_K}$ y $\gamma_K = max_{1 \leq i \leq 4}\{|cos(\gamma_i)|\}$ entonces existen constantes $C = C(\sigma', \gamma_K)$, tales que:*

1. $|F_K|_{1,\infty,\hat{K}} \leq C h_K$
2. $|F_K^{-1}|_{1,\infty,K} \leq \frac{C}{h_K}$

3. $|J_F|_{0,\infty,\hat{K}} \leq Ch_K^2$

4. $|J_{F^{-1}}|_{0,\infty,K} \leq \frac{C}{h_K^2}$

Finalmente podemos enunciar el resultado obtenido en [14].

Teorema 1.4.1 *Sea K un cuadrilátero convexo, σ'_K, y γ_K, como en el Lema 1.4.4. Entonces se tiene para toda $u \in H^2(K)$ y $m = 0, 1$ la siguiente estimación:*

$$\|u - Q(u)\|_{m,2,K} \leq Ch_K|u|_{0,2,K} \tag{4.67}$$

donde $C = C(\sigma', \gamma_K)$.

Dem. Inmediata de la ecuación (4.66), y del Lema 1.4.4. □

Observación 1.4.2 *Las hipótesis que deben imponerse sobre una familia F de cuadriláteros convexos, para que la estimación obtenida en el Teorema 1.4.1 sea uniforme, se basan en la existencia de constantes $\sigma' > 0$, $\gamma < 1$ tales que $\sigma'_K \leq \sigma'$, y $\gamma_K \leq \gamma$ para todo $K \in \mathcal{F}$. Puede verse que esta condición implica que dicha familia es regular en el sentido clásico del término. Es decir que $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \delta$, con $\delta > 0$ independiente de K. La recíproca es desde luego claramente falsa.*

Va a ser Jamet [24] quien demuestre que la condición de regularidad (1.12) basta por sí sola para acotar el error de interpolación en cuadriláteros convexos. De hecho prueba que la estimación (4.67) subsiste con $C = C(\frac{h_K}{\rho_K})$. Esto permite que el cuadrilátero degenere en un triángulo, siempre y cuando se respete una cota uniforme sobre el cociente $\frac{h_K}{\rho_K}$. La técnica utilizada por Jamet, se basa en el control del error de interpolación para Q vía el de la interpolación lineal Π sobre un triángulo formado por tres vértices de K. Nosotros vamos a explotar esta idea y por eso no ahondamos aquí en esta línea. Queremos destacar sin embargo que en la forma presentada por Jamet, los resultados dependen fuertemente de la regularidad, por ello debimos modificar sustancialmente el enfoque dado en [24] para obtener cotas uniformes en elementos anisotrópicos. En la sección que sigue comentamos brevemente los resultados conocidos para ciertos elementos no regulares.

1.5 Elementos cuadriláteros anisotrópicos

No existen más que un par de trabajos [37], [38], que tratan el caso de cuadriláteros que no verifican (1.12) uniformemente. Los resultados de ambos trabajos son similares, y en el segundo solo agregan las limitaciones de una aplicación directa del Lema 1.4.1 a la hora de tratar elementos anisotrópicos. Vamos a comentar los resultados obtenidos por estos autores, sin embargo podemos adelantar que sus conclusiones implican en lineas generales que la regularidad no es necesaria si el cuadrilátero permanece "parecido" a un rectángulo. Nuestros resultados van a mostrar, sin embargo, que esta hipótesis no es en modo alguno necesaria.

Comencemos con las siguientes observaciones

Observación 1.5.1 *Si bien no esta explicitado en [24], con las ideas allí expuestas se puede ver (nosotros también lo haremos más adelante) que el error en L^2 no depende de la geometría de K (en [37], [38], los autores imponen condiciones innecesarias a la hora de acotar el error en dicha norma). Es decir que el caso problemático sigue siendo, como en elementos lineales, el control de la seminorma $|u - Q(u)|_{1,2,K}$.*

Observación 1.5.2 *Uno se pregunta por qué no intentar la demostración hecha para triángulos anisotrópicos. Una vez más la derivada del error de interpolación, en la dirección de los lados de K, tiene promedio cero. Sin embargo esta posibilidad fracasa. Por un lado se tiene que en general las derivadas segundas de $Q(u)$ no desaparecen. Por otro lado, si se trabaja en el dominio de referencia se puede controlar este problema pero las dificultades resurgen una vez más a la hora de cambiar de variables. De todos modos el teorema de traza será decisivo en las cuentas que siguen.*

Observación 1.5.3 *Es importante señalar un caso particular que puede ser manejado con las técnicas de la Sección 1.2. Esto sucede si K es un* paralelogramo. *En efecto, es facil ver que en tal caso F deviene lineal y es posible un teorema análogo al 1.2.2, donde la constante que interviene en la estimación, es de la forma $\frac{C}{sen(\theta)}$ con θ un ángulo cualquiera de K (en el paralelogramo hay a lo sumo dos angulos diferentes, pero ambos tienen el mismo seno).*

Las hipótesis propuestas en [37], [38], pueden interpretarse geométricamente. Vamos a ocuparnos solo de la estimación en H^1, ya que según hemos comentado en el caso L^2 los autores obtienen condiciones del todo innecesarias. La técnica que utilizan se basa, lo mismo que en [24], en la acotación del error de $Q(u)$ vía el error de interpolación lineal para $\Pi(u)$ sobre un triángulo formado por tres vértices de K. Sin embargo una elección inapropiada del elemento de referencia, y un tratamiento inadecuado de las cotas en los cambios de variable les van a impedir la extensión de sus resultados a elementos más generales.
En el próximo teorema exponemos su resultado principal con la notación provista en la Figura 4.

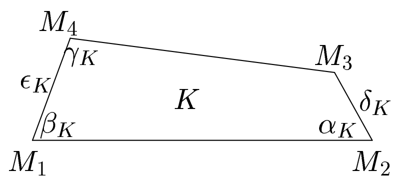

Figura 4

Teorema 1.5.1 *Sea K un cuadrilátero convexo bajo las siguientes hipótesis*

1. *$\delta_K, \epsilon_K \leq \frac{h_K}{2n}$, con $n \geq 6$.*

2. *$\frac{1}{2} \leq \frac{dist(M_4,l_{12})}{dist(M_3,l_{12})} \leq 1$ donde l_{12} representa el segmento que une M_1 con M_2.*

entonces

$$|u - Q(u)|_{1,K} \leq (C_1(n) + \frac{C_2(n)}{sen(\alpha_K)}) \frac{h_K}{sen(\beta_K)} |u|_{2,K}$$

donde los $C_i(n)$ decrecen con n.

Vamos a hacer una serie de observaciones acerca de las hipótesis requeridas en este teorema así como del resultado enunciado, sin embargo previamente haremos un comentario elemental acerca de los lados de un triángulo general T, que ponemos como una observación para referirnos a ella con mayor facilidad en otros contextos

Observación 1.5.4 *La desigualdad triangular implica que todo triángulo T tiene sus lados mayores comparables. En efecto si $l_1 \leq l_2 \leq l_3$ son las longitudes de los lados $1 \leq \frac{l_3}{l_2} \leq 2$.*

volvamos ahora sobre el Teorema 1.5.1

Observación 1.5.5 *De la hipótesis 1) del Teorema 1.5.1 se desprende que los lados "largos" de K deben ser opuestos y comparables. En efecto, ya que el diámetro de un cuadrilátero se realiza en los lados o en una de las diagonales, se tiene por 1) que h_K debe coincidir con la longitud de la diagonal mayor o con la de los lados l_{12}, l_{34} que unen los vértices M_1, M_2, y M_3, M_4 respectivamente. Supongamos sin perder generalidad que $|l_{34}| \leq |l_{12}|$ y consideremos el triángulo T que resulta determinado por la diagonal mayor de K, que llamaremos d, y l_{12}. Una vez más de 1) se tiene que los lados mayores de T deben ser d y l_{12}, y la Observación 1.5.4 dice entonces que $|d|$ y $|l_{12}|$ son comparables, más aún*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|d|}{|l_{12}|} \leq 2 \tag{5.68}$$

Pero considerando ahora el triángulo determinado por d y l_{34} es otra vez, en virtud de 1) y (5.68) facil de ver que $|d|$ y l_{34} son también comparables. De aquí es inmediato lo predicho al comienzo de la observación.

Observación 1.5.6 *De la expresión del error se ve que los ángulos α_K, β_K deben permanecer alejados de 0 y π para obtener estimaciones uniformes para $|u - Q(u)|_{1,K}$.*

Observación 1.5.7 *De lo dicho en la observación previa y de la hipótesis 2) es inmediato ver que las magnitudes ϵ_K y δ_K deben ser también comparables.*

Observación 1.5.8 *Finalmente notemos que ningún ángulo de K puede aproximarse arbitrariamente a π a menos que se cumpla la condición de regularidad 1.12 uniformemente (y si se cumple dicha condición caemos en los casos demostrados por Jamet). En efecto, ni α_K ni β_K, pueden hacerlo en virtud de la Observación 1.5.6. Supongamos entonces que, digamos, $\gamma_K \to \pi$ (ver Figura 4). Esto fuerza a los tres ángulos restantes a coincidir con los del triángulo T de vértices M_1,*

M_2,M_3, pero siguiendo un argumento como el de la Observación 1.5.5, se sigue que δ_K debe ser el lado más corto de T y no puede ser por lo tanto adyacente al menor ángulo de dicho triángulo. Esto dice que T cumple la condición del ángulo mínimo y debe ser entonces regular, finalmente una vez más de la Observación 1.5.5, resulta que los diámetros h_T y h_K son comparables y así obtenemos también la regularidad de K.

En lo que resta del capítulo vamos a desarrollar los resultados que obtuvimos en [2]

1.6 La condición de descomposición regular

Para comenzar recordemos que nuestra intención es presentar cierta condición geométrica que resultará suficiente para una estimación uniforme de la forma

$$\|u - Q(u)\|_{m,2,K} \leq Ch_K|u|_{2,2,K} \qquad m = 0,1 \tag{6.69}$$

en cuadriláteros. Esta condición, además de sencilla, es más débil que las requeridas en los trabajos mencionados en las secciones previas, permitiendo ampliar los resultados a nuevos elementos no regulares.

A los efectos de presentar dicha condición de un modo natural vamos a considerar algunos ejemplos.

Según hemos visto, (6.69) resulta válido sobre cuadriláteros que degeneran en triángulos "regulares" (i.e., triangulos que satisfacen (1.12) uniformemente) y que resultaron ser, como ya hemos comentado, los primeros para los cuales se demostró una cota similar para la interpolación lineal de Lagrange. Por ende, imponer una condición de ángulo máximo sobre los cuadriláteros (vea la Definición 1.1.3 allí también se contempla el caso en que K sea un cuadrilátero) resultaría demasiado restrictiva, pues a pesar de permitir elementos anisotrópicos quedarían excluidos los casos tratados por Jamet. Uno podría entonces, en vista de la extensión comentada en la Sección 1.2, intentar extender el resultado a cuadriláteros que degeneren en triángulos que cumplan solamente $MAC(\psi)$. El ejemplo siguiente, sin embargo, demuestra que esto no es posible: tomemos sobre $K = K(1, a, a, a)$ (ver la Figura 5 más abajo) la función $u = x^2$. No resulta entonces difícil de verificar que la interpolación asume la forma $Qu = \frac{x(1+(a^2-1)y/a)}{1+y(a-1)/a}$, y por un cálculo directo se tiene, con a suficientemente chico, $\|\frac{\partial(u-Qu)}{\partial y}\|_0^2 \geq Ca\ln(a^{-1})$. Como el diámetro de K es de orden 1, $\|D^2u\|_0^2 \leq Ca$, y la estimación (6.69) no puede verificarse con una constante independiente de a.

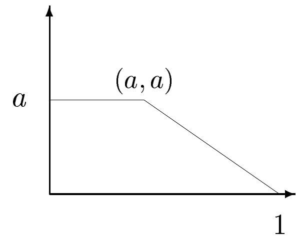

Figura 5

Por lo tanto no basta con que K contenga un triángulo bajo $MAC(\psi)$. Una condición más débil podría consistir en dividir el elemento por una de sus diagonales en dos triángulos e imponer la condición del ángulo máximo en ambos. El mismo ejemplo dado más arriba muestra que esta condición no es suficiente para obtener (6.69). Pues si dividimos ahora el elemento a lo largo de la diagonal de extremos $(0, 0)$ y (a, a), es fácil ver que ambos triángulos satisfacen la condición del ángulo máximo con una constante ψ independiente de a.

Observe, sin embargo, algo que resultará importante. En el ejemplo recién dado el cociente entre las dos diagonales no está uniformemente acotado en a.

Basados en las consideraciones previas vamos a presentar una condición suficiente para (6.69).

Vamos a pedir que los dos triángulos sastisfagan la condición ángulo máximo siempre y cuando dividamos el elemento por su diagonal mayor, o por cualquiera de ellas si resultan ambas comparables. En otras palabras, la constante que aparece en la estimación del error dependerá del mayor de los ángulos de ambos triángulos, y también del cociente entre las diagonales. Vamos a formalizar esto en la siguiente definición, allí llamaremos d_1 y d_2 a las diagonales de K.

Definición 1.6.1 *Sea K un cuadrilátero convexo. Diremos que K satisface la propiedad de descomposición regular, con constantes $N \in \mathbb{R}$ y $0 < \psi < \pi$, o abreviadamente $RDP(N, \psi)$, si podemos dividir K en dos triángulos a lo largo de una de sus diagonales, que llamaremos siempre d_1, de tal modo que $|d_2|/|d_1| \leq N$ y ambos triángulos satisfacen $MAC(\psi)$.*

Observación 1.6.1 *Si un cuadrilátero K satisface $MAC(\psi)$ entonces verifica $RDP(1, \psi)$. En efecto, esto puede verse fácilmente dividiendo K por su diagonal mayor. La recíproca no es cierta, como puede verse en el ejemplo de la Figura 6* a).

Observación 1.6.2 *Si K es un cuadrilátero convexo regular (i.e. verifica (1.12)) entonces, K satisface $RDP(\sigma, \psi)$, con $\psi = \psi(\sigma) < \pi$. En efecto, los ángulos de K están acotados por debajo, por una constante positiva $\delta(\sigma)$ (ver [23]), y por ende a lo sumo uno de los ángulos de K puede ser mayor que $\pi - \delta(\sigma)$, por lo tanto, dividiendo K por la diagonal que contiene al vértice correspondiente a este ángulo, se ve fácilmente que K debe satisfacer $RDP(\sigma, \pi - \delta(\sigma))$.*

Observación 1.6.3 *Como hemos visto en la Observación 1.5.8, no es difícil chequear que si K satisface las hipótesis dadas en [37, 38] entonces K verifica $MAC(\psi)$, para cierto $\psi < \pi$, siempre* *que K degenere en el sentido de que $h/\rho \to \infty$ (que es el único caso importante, pues de otro modo caemos en las hipótesis de la observación precedente) y por la Observación 1.6.1 se verifica también $RDP(1, \psi)$.*

Observación 1.6.4 *Surge la pregunta de si la hipótesis de la descomposición regular es o no menos restrictiva que la de los autores citados. La respuesta es positiva como puede verse tomando $K = (1, a, a^2, a + a^2)$, (ver Figura 6,b)). Se ve fácilmente que (1.12) no se cumple con un σ independiente de a y por otro lado, para a pequeño los lados "largos" no son opuestos en contra de lo asumido en [37, 38] (vea la Observación 1.5.5). Sin embargo, la diagonal mayor de extremos $(0, a)$ y $(1, 0)$ divide este elemento en dos triángulos que verifican $MAC(\psi)$ con una constante $\psi < \pi$ independiente de a.*

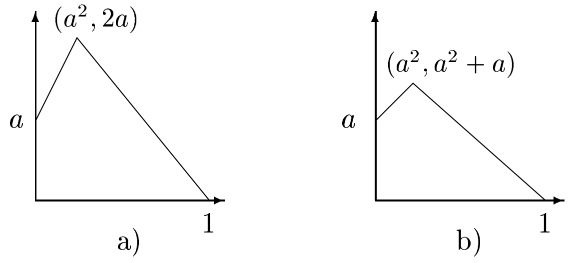

Figura 6

El primer paso de nuestro argumento consiste en reducir el problema a una *familia* de configuraciones de referencia, y no a un único dominio de referencia. Este es el objetivo de la siguiente sección.

1.7 La familia de referencia

Comencemos con ciertos lemas técnicos.

Lema 1.7.1 *Sea K un cuadrilátero convexo que satisface $RDP(N, \psi)$. Tenemos entonces*

1. *Si β es cualquiera de los ángulos de K opuestos a d_1, entonces, existe $\delta = \delta(N, \psi)$ tal que*

$$0 < \delta \leq \beta \tag{7.70}$$

y además,

2. *Si s es el lado menor de K, y α es el ángulo entre s y d_1 entonces,*

$$(\pi - \psi)/2 \leq \alpha \tag{7.71}$$

Dem. *1)* Sean T_1 y T_2 los triángulos obtenidos al dividir K por la diagonal d_1. Entonces, por definición, T_1 y T_2 satifacen $MAC(\psi)$ y además $d_2/d_1 \leq N$. Sin perder generalidad podemos asumir que β es uno de los ángulos de T_2 (como en la Figura 7). Ahora bien, si β no es el mínimo de los ángulos de T_2 entonces, (7.70) resulta cierto con $\delta = (\pi - \psi)/2$, pues T_2 satisface $MAC(\psi)$. Supongamos entonces que β sí es el menor ángulo de T_2 y llamemos γ_1 y γ_2 a los restantes dos ángulos de este triángulo. Usando nuevamente $MAC(\psi)$ para T_2 tenemos que $\gamma_i \geq (\pi - \psi)/2$ para $i = 1, 2$. Ahora bien, la diagonal d_2 divide a T_2 en dos triángulos menores $\overline{\overline{T}}_2$, $\overline{T}_2$, a β en dos ángulos menores β_1, β_2, y a d_1 en dos segmentos $\overline{\overline{d}}_1$, $\overline{d}_1$. Elijamos la notación de un modo tal que $|\overline{\overline{d}}_1| \geq |d_1|/2$, $\overline{\overline{T}}_2$ tenga a $\overline{\overline{d}}_1$ por uno de sus lados y a β_1 y γ_1 como dos de sus ańgulos. Si llamamos entonces $\overline{\overline{d}}_2$ al lado de $\overline{\overline{T}}_2$ opuesto a γ_1 se tiene

$$\beta \geq \beta_1 \geq \sin\beta_1 \geq \frac{|\overline{\overline{d}}_1|}{|\overline{\overline{d}}_2|}\sin\gamma_1 \geq \frac{1}{2}\frac{|d_1|}{|d_2|}\sin\gamma_1 \geq \frac{1}{2N}\sin\gamma_1$$

y así resulta una vez más (7.70) pues $(\pi - \psi)/2 \leq \gamma_1 \leq \psi$.

2) Podemos suponer que s es uno de los lados de T_1. Para probar (7.71) basta observar que α no es el menor ángulo de T_1 pues resulta adyacente al lado menor de dicho triángulo, que debe ser s o d_1. □

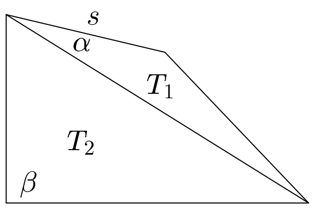

Figura 7

En el lema siguiente recordamos un resultado concerniente al cambio de un ángulo bajo una trasformación lineal, y su relación con el número de condición de una matriz. La demostración consiste en la primer parte de la prueba que hicimos del Lema 1.3.5 y por ello no repetimos aquí el argumento.

Lema 1.7.2 *Sea L una transformación lineal asociada a una matriz B. Dados dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, sea α_1 el ángulo entre ellos y α_2 el ángulo entre los transformados $L(\mathbf{v}_1)$ y $L(\mathbf{v}_2)$. Llamando $\kappa(B)$ al número de condición de B tenemos*

$$\frac{2}{\kappa(B)\pi}\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \pi\Big(1 - \frac{2}{\pi\kappa(B)}\Big) + \frac{2}{\kappa(B)\pi}\alpha_1 \tag{7.72}$$

En el próximo lema vamos a definir el cambio afín que que transforma un elemento dado, en uno de referencia. Vamos a utilizar la notación de los lemas previos.

Lema 1.7.3 *Sea K un cuadrilátero de diámetro h satisfaciendo $RDP(N,\psi)$. Existen entonces $a,b,p,q>0$, una transformación afín $L\overline{x}=B\overline{x}+P$ tal que $L(K(a,b,p,q))=K$ y constantes $C=C(N,\psi)$, $\overline{N}=\overline{N}(N,\psi)$, $\overline{\psi}=\overline{\psi}(N,\psi)$, $\overline{\delta}=\overline{\delta}(N,\psi)$ tales que*

1. $\|B\|\leq C$ *y,* $\|B^{-1}\|\leq C$, *en particular,* $\kappa(B)\leq C^2$.
2. $K(a,b,p,q)$ *satisface* $RDP(\overline{N},\overline{\psi})$, *tomando como la diagonal divisoria* $\overline{d}_1=L^{-1}(d_1)$.
3. *Si ℓ es el lado menor de K y $\overline{\alpha}$ es el ángulo entre $\overline{d}_1=L^{-1}(d_1)$ y $\overline{\ell}=L^{-1}(\ell)$ entonces,*
$$0<\overline{\delta}<\overline{\alpha}<\overline{\psi}<\pi$$
4. *Si $\overline{s}$ es el lado menor de $K(a,b,p,q)$ entonces*
$$|\overline{l}|\leq C^2|\overline{s}|$$
5. *Si $\overline{h}$ es el diámetro de $K(a,b,p,q)$, entonces*
$$C^{-1}h\leq\overline{h}\leq Ch$$

Dem. Vamos a construir $K(a,b,p,q)$ y L explícitamente.
Como K satisface $RDP(N,\psi)$ podemos dividirlo a lo largo de d_1 en T_1 y T_2 cada uno de los cuales tiene sus ángulos acotados por ψ. Elijamos la notación de un modo tal que el lado menor ℓ de K sea uno de los lados de T_1. Llamemos β al ángulo de T_2 opuesto a d_1. Módulo un movimiento rígido podemos suponer que el vertice correspondiente a β se encuentra en el origen, llamemos M_1 a dicho vértice, y numeremos los demás como M_i en sentido antihorario. Podemos asumir también que el lado opuesto a ℓ yace sobre el eje x, llamemos entonces a a su longitud (ver Figura 8). Sea ahora ℓ_{14} el lado entre los vértices M_1 y M_4 y definamos $b=|\ell_{14}|\sin\beta$. Tenemos entonces que M_4 tiene coordenadas $(b\operatorname{cotg}\beta,b)$. Definimos pues L como la transformación lineal asociada con la matriz

$$B=\begin{pmatrix}1 & \operatorname{cotg}\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

y elegimos p,q de modo tal que $L(K(a,b,p,q))=K$.

Ahora demostraremos las cinco propiedades enunciadas en el Lema

1) Una estimación elemental dice $\|B\|\leq\sqrt{2}/\sin\beta$ y $\|B^{-1}\|\leq\sqrt{2}/\sin\beta$. Ahora bien, como K satisface $RDP(N,\psi)$ sabemos que $\beta\leq\psi$ y además del Lema 1.7.1, $0<\delta=\delta(N,\psi)\leq\beta$. Por ende, resulta *1)* con $C=\sqrt{2}/\min\{\sin\delta,\sin\psi\}$.

2) Llamemos $\overline{d}_i=L^{-1}(d_i)$, recordando que de $RDP(N,\psi)$ se tiene $|d_2|/|d_1|\leq N$ obtenemos

$$|\overline{d}_2|/|\overline{d}_1|\leq\kappa(B)|d_2|/|d_1|\leq\kappa(B)N$$

y así se puede tomar $\overline{N} = \kappa(B)N$.
Por otro lado, en vista del Lema 1.7.2, los ángulos de los triángulos obtenidos dividiendo $K(a,b,p,q)$ a lo largo de $\overline{d}_1$ están acotados por $\pi(1-2/\pi\kappa(B)) + (2/\pi\kappa(B))\psi$ y así *2)* se sigue de *1)*.

3) Es inmediato de *1)* junto con la parte *2)* del Lema 1.7.1 y el Lema 1.7.2.

4) Sea ℓ el lado menor de K, $\overline{\ell} = L^{-1}(\ell)$ y $\overline{s} = L^{-1}(s)$ el menor de $K(a,b,p,q)$ Entonces

$$|\overline{\ell}| \leq \|B^{-1}\||\ell| \leq \|B^{-1}\||s| \leq \|B^{-1}\|\|B\||\overline{s}|$$

y *4)* se sigue de *1)*.

5) Inmediato de *1)*. □

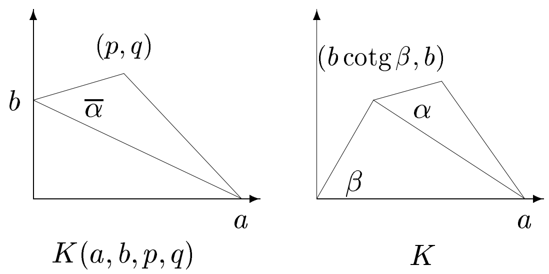

Figura 8

El lema siguiente, cumple el objetivo de esta Sección, pues muestra que es suficiente demostrar la estimación (6.69) en los dominios $K(a,b,p,q)$.

Lema 1.7.4 *Sea K un cuadrilátero que verifica $RDP(N,\psi)$. Sean L y $\overline{K} = K(a,b,p,q)$ la transformación afín y el elemento de referencia dados en el Lema 1.7.3. Si $\overline{Q}$ es la interpolación isoparamétrica sobre $\overline{K}$ y $\overline{u} = u \circ L$, entonces existen constantes positivas C_1 y C_2 dependientes solo de N y ψ tales que*

$$C_1|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{1,\overline{K}} \leq |u - Qu|_{1,K} \leq C_2|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{1,\overline{K}}$$

y

$$C_1|\overline{u}|_{2,\overline{K}} \leq |u|_{2,K} \leq C_2|\overline{u}|_{2,\overline{K}}$$

Dem. Por la definición de la interpolación isoparametrica

$$Qu(x) = \hat{Q}\hat{u}(F_K^{-1}(x)) \qquad \text{y}, \qquad \overline{Q}\overline{u}(\overline{x}) = \hat{Q}\hat{\overline{u}}(F_{\overline{K}}^{-1}(\overline{x}))$$

Entonces el lema sigue fácilmente pues como L es afín, $F_K = L \circ F_{\overline{K}}$ y así $\overline{Q}\overline{u}(\overline{x}) = Qu(x)$. Por lo tanto podemos concluir usando la cota $C(N,\psi)$ para $\|B\|$ y $\|B^{-1}\|$ dada en el Lema 1.7.3 y el hecho de que $\det B = 1$. □

1.8 Estimación para el error.

En esta sección probamos estimaciones óptimas para el error de interpolación en elementos que verifican la $RDP(N, \psi)$. En vista de los resutados obtenidos en la sección previa será suficiente analizar el caso en las configuraciones de referencia $K(a, b, p, q)$ que satisfagan las condiciones del Lema 1.7.3. Para simplificar la notación no usaremos la barra sobre las variables de los dominios $K(a, b, p, q)$ y escribiremos $K = K(a, b, p, q)$ para un elemento genérico de diámetro h, diagonales d_1, d_2 y vértices M_i. Llamaremos T_1 y T_2 a los triángulos que resultan de dividir K a lo largo de d_1. Con la notación de la Figura 9, asumimos que existen constante positivas N_1, N_2, N_3 y $\overline{\psi} < \pi$ tales que K satisface las siguientes cuatro hipótesis

(H1) $|d_2|/|d_1| \leq N_1$

(H2) $1/\text{sen } \alpha \leq N_2$

(H3) $|\ell| \leq N_3|s|$ donde s es el lado más corto de K

(H4) $\theta \leq \overline{\psi}$, para todo ángulo θ de T_1 y T_2.

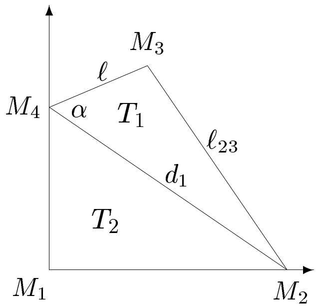

Figura 9

Recordemos que según vimos en el Lema 1.7.3, todo cuadrilátero con $RDP(N, \psi)$ puede ser transformado por un cambio afín en cierto $K(a, b, p, q)$ que verifique H1, H2, H3 y H4 con constantes dependientes solo de N y ψ.

Notemos además que como consecuencia de H3 tenemos que

$$p/a \leq N_3 \qquad \text{y} \qquad q/b \leq N_3 + 1 \tag{8.73}$$

En efecto, $p/a \leq |\ell|/a$ y $|q - b|/b \leq |\ell|/b$ y así (8.73) sigue de H3. Para simplificar la notación en acotaciones subsiguientes definimos $N_4 = N_3 + 1$.

También se tiene de H1 y H3 que

$$h \leq N_3(1 + N_1)|d_1| \tag{8.74}$$

Pues si el diámetro h de K se realiza en una de la diagonales, entonces se sigue de H1 que $h \leq \max\{1, N_1\}|d_1|$, y por ende tenemos (8.74) ya que $N_3 \geq 1$. De otra forma, h debe ser la longitud de uno de los lados de K y entonces $h = |\ell|$ o $h = |\ell_{23}|$, donde ℓ_{23} es el lado que une los vértices M_2 y M_3, porque las longitudes de los restantes lados estan acotadas por $|d_1|$. Ahora, en vista de H3, $|\ell| \leq N_3|\ell_{23}|$ y por tanto, será suficiente ver que $|\ell_{23}| \leq (1 + N_1)|d_1|$. Pero, por la desigualdad triangular, $|\ell_{23}| \leq a + |d_2| \leq |d_1| + |d_2| \leq (1 + N_1)|d_1|$ lo que nos da una vez más (8.74).

En lo que resta de esta Sección usaremos la notación (x, y) para la variable en $\mathbb{R}^2$ (en vez de $x \in \mathbb{R}^2$ como hasta ahora).

Para estimar el error vamos a descomponerlo como en [23] del siguiente modo:

Considere el operador Π sobre $\mathcal{P}_1$ asociado a los vertices $M_1 = (0, 0)$, $M_2 = (a, 0)$ y $M_4 = (0, b)$ (es decir la interpolación lineal de Lagrange sobre el triángulo dado por dichos vértices).

Tenemos entonces

$$|u - Qu|_{1,K} \leq |u - \Pi u|_{1,K} + |\Pi u - Qu|_{1,K}$$

y como $\Pi u - Qu$ está en el espacio de los elementos isoparamétricos y se anula en los vértices M_1, M_2 y M_4, se sigue que

$$(\Pi u - Qu)(x) = (\Pi u - u)(M_3)\phi_3(x)$$

donde ϕ_3 es la función básica correspondiente a M_3. Por lo tanto,

$$|u - Qu|_{1,K} \leq |u - \Pi u|_{1,K} + |(\Pi u - u)(M_3)||\phi_3|_{1,K} \tag{8.75}$$

y entonces, será suficiente estimar los dos términos del lado derecho lo que constituye el cometido de lo que resta de esta sección. Comenzamos con los términos $|u - \Pi u|_{1,K}$ y $|(\Pi u - u)(M_3)|$ y dejamos la estimación de $|\phi_3|_{1,K}$, que es la más técnica, para el final.
Para acotar $|u - \Pi u|_{1,K}$ y $|(\Pi u - u)(M_3)|$ vamos a hacer uso, una vez más, del teorema de traza, en la versión que hemos enunciado, Teorema 1.2.1.

En el lema que sigue daremos una estimación para $|(u - \Pi u)(M_3)|$ en terminos de $|u - \Pi u|_{1,K}$. Usaremos una vez más la notación de la Figura 9.

Lema 1.8.1 *Si $K = K(a, b, p, q)$ es convexo y satisface las hipotesis* H1, H2 and H3 *entonces*

$$|(u - \Pi u)(M_3)| \leq 2(N_2 N_3(1 + N_1))^{1/2} \left(\frac{|\ell|}{h}\right)^{1/2} \{|u - \Pi u|_{1,T_1} + h|u|_{2,T_1}\} \tag{8.76}$$

Dem. Denotemos con ∂_ℓ la derivada en la dirección de ℓ. Usando que $(u - \Pi u)(M_4) = 0$, la desigualdad de Schwartz en ℓ y el Teorema 1.2.1 tenemos

$$|(u - \Pi u)(M_3)| = \left|\int_\ell \partial_\ell(u - \Pi u)\right| \leq |\ell|^{1/2} \|\partial_\ell(u - \Pi u)\|_{0,\ell}$$

$$\leq |\ell| \left(\frac{2}{|T_1|}\right)^{1/2} \{|u - \Pi u|_{1,T_1} + h_{T_1}|u|_{2,T_1}\}$$

y escribiendo $|T_1| = |\ell||d_1|\text{sen}\,\alpha/2$, sigue de (8.74) y H2 que

$$|\ell| \left(\frac{2}{|T_1|}\right)^{1/2} \leq 2(N_2N_3(1+N_1))^{1/2} \left(\frac{|\ell|}{h}\right)^{1/2}$$

finalmente la demostración concluye notando que $h_{T_1} \leq h$. □

El Lema siguiente da estimaciones para el error $|u - \Pi u|_{1,K}$. El argumento es esencialmente el mismo que el utilizado para la estimación en triángulos aunque dejamos la demostración para que se vea la relevancia de la geometría de K (en particular la necesidad de las condiciones (8.73))

Lema 1.8.2 *Si $K = K(a,b,p,q)$ es convexo entonces*

$$|u - \Pi u|_{1,K} \leq \Big(1 + \frac{2}{\pi}\Big) \left(\frac{2|K|}{|T_2|}\right)^{1/2} h|u|_{2,K} \tag{8.77}$$

y consecuentemente si K satisface (8.73) entonces,

$$|u - \Pi u|_{1,K} \leq 2\Big(1 + \frac{2}{\pi}\Big)N_4 h|u|_{2,K} \tag{8.78}$$

Dem. Consideremos por ejemplo $v = \frac{\partial}{\partial x}(u - \Pi u)$ queremos ver que

$$\|v\|_{0,K} \leq Ch|v|_{1,K}$$

Sea v_K el valor medio de v sobre K. Entonces como K es convexo, se tiene por Poincaré

$$\|v - v_K\|_{0,K} \leq \frac{h}{\pi}|v|_{1,K} \tag{8.79}$$

y por la desigualdad triangular solo resta acotar $\|v_K\|_{0,K}$. Usando el Teorema 1.2.1, la desigualdad de Schwartz y el hecho de que la integral entre 0 y a de $v(x,0)$ da cero, se tiene que

$$\|v_K\|_{0,K} = |v_K||K|^{1/2} = \frac{|K|^{1/2}}{a}\Big|\int_0^a (v - v_K)(x,0)dx\Big|$$
$$\leq \left(\frac{2|K|}{|T_2|}\right)^{1/2} \{\|v - v_K\|_{0,K} + h|v|_{1,K}\}$$

y la cota para $\frac{\partial}{\partial x}(u - \Pi u)$ se obtiene usando una vez más (8.79). De un modo análogo podemos estimar la derivada con respecto a y y entonces tenemos (8.77).

Ahora es fácil ver que de (8.73) se tiene $(2|K|/|T_2|)^{1/2} \leq 2N_4$ y consecuentemente (8.78) sigue inmediatamente de (8.77). □

Nuestro próximo objetivo es obtener una cota precisa para $|\phi_3|_{1,K}$ en la configuración de referencia $K = K(a, b, p, q)$. Para tal propósito debemos analizar el jacobiano de la transformación $F_K : [0, 1]^2 \to K$ definida por

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (a\hat{x}(1 - \hat{y}) + p\hat{x}\hat{y}\,, b\hat{y}(1 - \hat{x}) + q\hat{x}\hat{y}) = (x, y) \tag{8.80}$$

Observemos que de aquí se deduce

$$DF_K(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} a + \hat{y}(p - a) & \hat{x}(p - a) \\ \hat{y}(q - b) & b + \hat{x}(q - b) \end{pmatrix}$$

y

$$J_K := \det DF_K(\hat{x}, \hat{y}) = ab(1 + \hat{x}(q/b - 1) + \hat{y}(p/a - 1)) \tag{8.81}$$

Notemos ante todo que si K is convexo entonces $J_K > 0$. Para verlo observe que como J_K es una función afín será suficiente verificar que es positiva en los vértices del elemento de referencia, cosa que resulta evidente en M_1, M_2 y M_4. Para el vértice restante usamos la convexidad de K, pues esto implica que (p, q) esta sobre el segmento que une M_2 y M_4, y por ende, se sigue que

$$J_K(1, 1) = q/b + p/a - 1 > 0 \tag{8.82}$$

Ahora bien, como $\frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}} = \hat{y}$ y $\frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{y}} = \hat{x}$, un cálculo directo nos da

$$\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \circ F_K\right)(\hat{x}, \hat{y}) = b\hat{y}/J_K(\hat{x}, \hat{y})$$

$$\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \circ F_K\right)(\hat{x}, \hat{y}) = a\hat{x}/J_K(\hat{x}, \hat{y})$$

y por tanto, de (8.81) y cambiando de variables obtenemos

$$\left\|\frac{\partial \phi_3}{\partial x}\right\|_{0,K}^2 \leq \frac{b}{a} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + \hat{x}(q/b - 1) + \hat{y}(p/a - 1)}\, d\hat{x}\, d\hat{y} \tag{8.83}$$

análogamente,

$$\left\|\frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right\|_{0,K}^2 \leq \frac{a}{b} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + \hat{x}(q/b - 1) + \hat{y}(p/a - 1)}\, d\hat{x}\, d\hat{y} \tag{8.84}$$

por ello, necesitamos acotar la integral

$$I(a, b, p, q) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + \hat{x}(q/b - 1) + \hat{y}(p/a - 1)}\, d\hat{x}\, d\hat{y} \tag{8.85}$$

para a, b, p y q positivos satisfaciendo (8.82).
De esto último trata el siguiente

Lema 1.8.3 *Sean $a, b, p, q > 0$ tales que $q/a + p/b - 1 > 0$ entonces, la integral $I = I(a, b, p, q)$ definida por (8.85) satisface*

1. *Si* $q/b \leq 1$ *y* $p/a \leq 1$ *entonces,* $I \leq \frac{1}{q/b+p/a-1}$
2. *Si* $q/b \leq 1$ *y* $p/a > 1$ *entonces,* $I \leq \min\{\frac{(p/a)\log(p/a)+1}{(1-q/b)(p/a-1)}, \frac{b}{q}\}$
3. *Si* $q/b > 1$ *y* $p/a \leq 1$ *entonces,* $I \leq \min\{\frac{(q/b)\log(q/b)+1}{(1-p/a)(q/b-1)}, \frac{a}{p}\}$
4. *Si* $q/b > 1$ *y* $p/a > 1$ entonces, $I \leq 1$

donde en 2) se sobreentiende que el mínimo es b/q si $q/b = 1$ y análogamente en 3).

Dem. *1)* Como $0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$, se sigue que

$$\frac{1}{1 + \hat{x}(q/b - 1) + \hat{y}(p/a - 1)} \leq \frac{1}{q/b + p/a - 1}$$

y entonces resulta *1)*.

2) Integrando en la variable $\hat{x}$ tenemos

$$I = \frac{1}{1 - q/b} \int_0^1 \{\log(1 + \hat{y}(p/a - 1)) - \log(q/b + \hat{y}(p/a - 1))\}\, d\hat{y}$$
$$= \frac{1}{(1 - q/b)(p/a - 1)} \Big\{ \int_1^{p/a} \log z\, dz - \int_{q/b}^{q/b+p/a-1} \log z\, dz \Big\} \leq \frac{(p/a)\log(p/a) + 1}{(1 - q/b)(p/a - 1)}$$

donde hemos usado que $\int_{q/b}^{q/b+p/a-1}(-\log z)\, dz \leq \int_0^1(-\log z)\, dz \leq 1$ ya que $q/b \leq 1$.

Por otro lado, usando $p/a > 1$, $q/b \leq 1$ y el hecho de que $t \log t/(t - 1) \leq 1$ para $0 \leq t \leq 1$ se sigue que

$$I \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + \hat{x}(q/b - 1)}\, d\hat{x}\, d\hat{y} = \frac{\log(q/b)}{q/b - 1} \leq \frac{b}{q}$$

con lo cual concluye la demostración de *2)*.

3) Se demuestra como la parte *2)* intercambiando los roles de a y p con b y q respectivamente.

4) Bajo estas hipótesis se obtiene inmediatamente que $1 + \hat{x}(q/b + 1) + \hat{y}(p/a - 1) \geq 1$ y así tenemos *4)*. □

El lema que sigue nos va a permitir acotar $|\phi_3|_{1,K}$ en terminos de $\overline{\psi}$ y N_i, $i = 1, 2, 3, 4$ para $K(a, b, p, q)$ satisfaciendo las hipotesis H1, H2, H3, H4. Para simplificar la notación llamaremos $N_5 = \max\{N_2, 1/\text{sen}\,((\pi + \overline{\psi})/2)\}$.

Lema 1.8.4 *Si $K = K(a, b, p, q)$ es convexo y satisface las hipótesis* H1, H2, H3, H4 *entonces,*

1. $\max\{|\ell|/a, |\ell|/b\} \leq N_2(q/b + p/a - 1)$
2. *Si* $q/b \leq 1$ *entonces* $a/b \leq N_2$
3. *Si* $q/b \leq 1/2$ *y* $p/a > 1$ *entonces,* $b/a \leq 2N_3$
4. *Si* $q/b > 1$ *y* $a/b \leq \operatorname{tg}((\pi - \overline{\psi})/2)$ *entonces* $|\ell| \leq N_5 p$
5. *Si* $q/b > 1$ *y* $b/a \leq \operatorname{tg}(\alpha/2)$ *entonces* $|\ell| \leq 2N_2(q-b)$
6. $\min\{1/|p-a|, 1/q\} \leq \sqrt{2}N_3/|\ell|$
7. $\min\{1/|q-b|, 1/p\} \leq \sqrt{2}/|\ell|$

Dem. *1)* Llamemos $y(x) = -(b/a)(x-a)$ a la ecuación de la recta que pasa por M_2 y M_4 e y^{-1} a su inversa, tenemos entonces

$$\frac{q - y(p)}{b} = \frac{p - y^{-1}(q)}{a} = \frac{q}{b} + \frac{p}{a} - 1 \tag{8.86}$$

un análisis geométrico elemental dice que $|\ell|\text{sen }\alpha \leq q - y(p)$ y $|\ell|\text{sen }\alpha \leq p - y^{-1}(q)$, luego *1)* se sigue de (8.86) y H2.

2) Llamemos β al ángulo entre d_1 y el segmento que une M_4 y (a,b) tenemos que, como $q \leq b$, $\alpha \leq \beta$. Luego, $b/a = \operatorname{tg}\beta \geq \operatorname{tg}\alpha$ y por lo tanto usando otra vez H2 obtenemos *2)*.

3) Bajo estas hipótesis se tiene que $|\ell| \geq b - q \geq b/2$. Entonces $b/a \leq 2|\ell|/a$ y por ello , *3)* se sigue de H3.

4) Llamando ahora γ al angulo entre d_1 y el segmento que une M_1 y M_4 es facil ver, bajo estas hipotesis, que $\gamma \leq (\pi - \overline{\psi})/2$. Usando ahora H4 tenemos

$$\alpha \leq \alpha + \gamma \leq (\pi + \overline{\psi})/2$$

y, como $|\ell|/p = 1/\text{sen }(\alpha + \gamma)$, *4)* se sigue de H2 y el hecho de que $\overline{\psi} < \pi$.

5) Con β como en el item *2)* tenemos, en este caso, que $\beta \leq \alpha$. Entonces, $\operatorname{tg}\beta = b/a \leq \operatorname{tg}(\alpha/2)$ y así $\beta \leq \alpha/2$. Por ende, $\alpha - \beta \geq \alpha/2$ y se tiene *5)* observando que

$$q - b = |\ell|\text{sen }(\alpha - \beta) \geq |\ell|\text{sen }(\alpha/2) \geq |\ell|(\text{sen }\alpha)/2$$

6) Llamemos η al ángulo interior de K en el vertice M_2 y ℓ_{23} el lado que une M_2 y M_3. Tenemos entonces

$$|p - a|/|\ell_{23}| = \cos\eta \qquad \text{y} \qquad q/|\ell_{23}| = \text{sen }\eta$$

así *6)* se sigue de H3.

7) Se demuestra por un análisis similar al realizado en *6)*. □

Ahora estamos en condiciones de acotar $|\phi_3|_{1,K}$ en términos de las propiedades geométricas de la configuración de referencia. De esto tratamos en el próximo lema, donde continuamos utilizando la notación de la Figura 9.

Lema 1.8.5 *Si* $K = K(a,b,p,q)$ *es convexo y satisface* H1, H2, H3, H4 *entonces, existe* C *dependiendo solo de* $\overline{\psi}$ *y* N_i, $i = 1,2,3$ *tal que*

$$|\phi_3|_{1,K} \le C\Big(\frac{h}{|\ell|}\Big)^{1/2} \tag{8.87}$$

Dem. Consideramos cuatro casos como en el Lema 1.8.3.

1) Si $q/b \le 1$ y $p/a \le 1$ entonces, de (8.83), la parte *1)* del Lema 1.8.3 y la parte *1)* del Lema 1.8.4 se sigue que

$$\Big\|\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\Big\|^2_{0,K} \le \frac{b}{a}\frac{1}{(q/b+p/a-1)} \le N_2\frac{b}{|\ell|} \le N_2\frac{h}{|\ell|}$$

Análogamente, usando ahora (8.84), obtenemos

$$\Big\|\frac{\partial\phi_3}{\partial y}\Big\|^2_{0,K} \le N_2\frac{h}{|\ell|}$$

2) Supongamos ahora que $q/b \le 1$ y $p/a > 1$. Usando otra vez (8.83) y (8.84) pero en conjunto con la parte *2)* del Lema 1.8.3 y (8.73) obtenemos las desigualdades

$$\Big\|\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\Big\|^2_{0,K} \le \frac{b}{a}\min\Big\{\frac{N_4\log N_4+1}{(1-q/b)(p/a-1)}, \frac{b}{q}\Big\} \tag{8.88}$$

$$\Big\|\frac{\partial\phi_3}{\partial y}\Big\|^2_{0,K} \le \frac{a}{b}\min\Big\{\frac{N_4\log N_4+1}{(1-q/b)(p/a-1)}, \frac{b}{q}\Big\} \tag{8.89}$$

Ahora bien, si $b/q \le 2$ la demostración concluye usando (8.88), (8.89) y H3. Si no, $q/b < 1/2$ y entonces $1/(1-q/b) < 2$. Por otro lado, de la parte *3)* del Lema 1.8.4 tenemos $b/a \le 2N_3$ y entonces, usando de nuevo (8.88) conjuntamente con la parte *6)* del Lema 1.8.4 resulta

$$\Big\|\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\Big\|^2_{0,K} \le 2N_3\min\Big\{\frac{2(N_4\log N_4+1)}{p/a-1}, \frac{b}{q}\Big\}$$
$$\le 4N_3(N_4\log N_4+1)h\min\Big\{\frac{1}{p-a}, \frac{1}{q}\Big\} \le 4\sqrt{2}N_3^2(N_4\log N_4+1)\frac{h}{|\ell|}$$

Las cotas para $\|\frac{\partial\phi_3}{\partial y}\|^2_{0,K}$ se siguen de un modo similar de (8.89) y la parte *2)* del Lema 1.8.4.

3) Consideremos ahora el caso $q/b > 1$ y $p/a \le 1$. Una vez más usamos (8.83) y (8.84) combinado ahora con la parte *3)* del Lema 1.8.3 para obtener

$$\left\|\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\right\|_{0,K}^2 \le \frac{b}{a}\min\left\{\frac{N_4\log N_4+1}{(q/b-1)(1-p/a)},\frac{a}{p}\right\} \tag{8.90}$$

y

$$\left\|\frac{\partial\phi_3}{\partial y}\right\|_{0,K}^2 \le \frac{a}{b}\min\left\{\frac{N_4\log N_4+1}{(q/b-1)(1-p/a)},\frac{a}{p}\right\} \tag{8.91}$$

Sin embargo no podemos proceder ahora como en el caso previo porque no tenemos, como antes, que a/b se encuentre acotado por arriba y por abajo.

Así que supongamos primero que $b/a < 1/\mathrm{tg}\,((\pi-\overline{\psi})/2)$. Entonces, como en la parte *2)*, podemos asumir que $p/a \le 1/2$ (de otro modo la estimación se obtiene facilmente de (8.90) y (8.91)). En este caso tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\right\|_{0,K}^2 &\le \frac{2}{\mathrm{tg}\,((\pi-\overline{\psi})/2)}(N_4\log N_4+1)\min\left\{\frac{b}{q-b},\frac{a}{p}\right\}\\ &\le \frac{2}{\mathrm{tg}\,((\pi-\overline{\psi})/2)}(N_4\log N_4+1)h\min\left\{\frac{1}{q-b},\frac{1}{p}\right\}\end{aligned}$$

y por ende, el resultado se sigue de la parte *7)* del Lema 1.8.4.

Por otro lado, si $b/a \ge 1/\mathrm{tg}\,((\pi-\overline{\psi})/2)$ podemos usar la parte *4)* del Lema 1.8.4 y (8.90) para obtener

$$\left\|\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\right\|_{0,K}^2 \le \frac{b}{p} \le N_5\frac{b}{|\ell|} \le N_5\frac{h}{|\ell|}$$

Con el objetivo de acotar la derivada con respecto a y consideramos otra vez dos casos: $a/b < 1/\mathrm{tg}\,(\alpha/2)$ y $a/b \ge 1/\mathrm{tg}\,(\alpha/2)$. En el primer caso acotamos $\|\frac{\partial\phi_3}{\partial y}\|_{0,K}^2$ procediendo como antes y usando la parte *7)* del Lema 1.8.4.

En el segundo caso, usamos (8.91) para obtener

$$\left\|\frac{\partial\phi_3}{\partial y}\right\|_{0,K}^2 \le 2\frac{a}{b}(N_4\log N_4+1)\frac{b}{q-b}$$

y la demostración concluye esta vez utilizando la parte *5)* del Lema 1.8.4.

4) Finalmente, en el caso $q/b > 1$ y $p/a > 1$ el resultado se sigue trivialmente de la parte *4)* del Lema 1.8.3 y de H3 usando de nuevo (8.83) y (8.84). □

Reuniendo todos los lemas obtenemos nuestro resultado principal que nos brinda estimaciones óptimas del error para cuadriláteros convexos.

Teorema 1.8.1 *Sea K un cuadrilátero convexo con diámetro h. Existe una constante C_0 independiente de K tal que*

$$\|u-Qu\|_{0,K} \le C_0h^2|u|_{2,K} \tag{8.92}$$

si además K satisface $RDP(N,\psi)$ existe entonces, una nueva constante $C=C(N,\psi)$ tal que

$$|u - Qu|_{1,K} \leq Ch|u|_{2,K} \tag{8.93}$$

Dem. Siempre es posible elegir dos lados adyacentes de K, ℓ_1 y ℓ_2, tales que K resulte contenido en el paralelogramo definido por dichos lados. Observe que este paralelogramo posee un diámetro del mismo orden que el de K. Ahora sea L una transformación afín que lleva ℓ_1 en el segmento que une $(0,0)$ y $(1,0)$ y ℓ_2 en el que une $(0,0)$ y $(0,1)$ y escribamos $\overline{\overline{\overline{K}}} = L(K)$. Es facil ver que $\overline{\overline{\overline{K}}}$ tiene diámetro interior y exterior de orden uno y por ende satisface (1.12) con una constante σ independiente de K. Por lo tanto la estimación óptima en L^2 sobre $\overline{\overline{\overline{K}}}$ se sigue directamente del resultado obtenido en [23] y el caso general (8.92) se prueba cambiando variables.

Por otro lado supongamos ahora que K verifica $RDP(N, \psi)$, del Lema 1.7.3 sabemos que K puede transformarse en un $K(a, b, p, q)$ que satisfaga H1, H2, H3, H4 con constantes $\overline{\psi}$ y N_i, $i = 1, 2, 3$ dependientes solo de N y ψ, y más aún con un diámetro h equivalente al de K. Por su parte del Lema 1.7.4 tenemos que la estimación del error sobre K se sigue de la misma en $K(a, b, p, q)$. Por lo tanto, será suficiente probar la estimación del error para dichas configuraciones de referencia con una constante dependiente solo de $\overline{\psi}$ and N_i. Por ende (8.93) se sigue de (8.75) combinado con (8.76), (8.78) y (8.87). $\square$

Capítulo 2

Interpolación de Promedios

Por construcción la interpolación de Lagrange requiere cierta regularidad de las funciones a interpolar, en particular deben tener sentido las evaluaciones puntuales. Es así que en $W^{s,p}$ debe ser $s > \frac{n}{p}$ donde n es la dimensión del espacio, para asegurar la inclusión $W^{s,p} \subset \mathcal{C}^0$, y con ello poder definir la función puntualmente. Por ende, en dimensión 2 y 3, si se trabaja, digamos, sobre H^1, debe sustituirse esta interpolación por otra que tenga sentido. En [13] se inauguran los operadores de promedios para funciones con poca regularidad. La construcción es sencilla y puede resumirse facilmente según veremos en la próxima sección. Queremos hacer notar, sin embargo, la necesidad de utilizar elementos regulares en el argumento que expondremos.

2.1 La interpolación de Clément

Consideremos, por ejemplo, una triangulación *regular* $\mathcal{T}$ construída, digamos, con triángulos $K \subset \mathbb{R}^2$. Nos vamos a restringir a polinomios de grado uno pero el análisis es válido en general. Para cada vértice v_i, $1 \leq i \leq 3$ de un cierto K, considere todos los elementos concurrentes en dicho vértice y designe con $\mathcal{S}_i$ a su unión, que supondremos, para simplificar la exposición, que es un conjunto convexo (si los ángulos interiores de cada K no superan $\pi/2$ esto último resulta obvio). Además vamos a ocuparnos, en este resumen, unicamente de la estimación

$$|u - P(u)|_{m,2,K} \leq Ch^{l-m}|u|_{l,2,\mathcal{S}_i} \quad con \quad 0 \leq m \leq l \leq 1 \tag{1.1}$$

donde P representa la interpolación de promedios que en breve definiremos. Llamemos entonces ω_i a la función lineal sobre cada elemento y continua entre dos cualesquiera de ellos que vale uno en el nodo de la triangulación $\mathcal{T}$ dado por el vértice v_i y cero en los demas, se tiene obviamente que el soporte de w_i verifica $sop(w_i) = \mathcal{S}_i$. La idea es, dada una cierta u, elegir una buena aproximación, $c_i(u)$, en $\mathcal{S}_i$, del mismo grado que las funciones del espacio con el que pretendemos interpolar. Aquí, y con el propósito de simplificar la presentación, tomaremos una aproximación de grado más bajo, haciendo la proyección de u, en $L^2(\mathcal{S}_i)$, sobre las constantes (por ello no hemos puesto $l = 2$ en (1.1)). Más precisamente, $c_i(u)$ queda caracterizado por

$$\int_{\mathcal{S}_i} (u - c_i(u))dx = 0$$

entonces ahora puede definirse

$$P(u) = \sum_{i=1}^{3} c_i \omega_i(x) \tag{1.2}$$

Es inmediato demostrar la propiedad siguiente (que no puede asegurarse, en general, sin la hipótesis de regularidad):

P1 Si $K \in \mathcal{S}_i$ entonces $diam(\mathcal{S}_i) \leq Ch_K$

también resulta obvio

P2 $|u - c_i(u)|_{m,\mathcal{S}_i} \leq C diam(\mathcal{S}_i)^{l-m} |u|_{l,\mathcal{S}_i}$ para $0 \leq m \leq l \leq 1$

pues, para $l = 1$, $m = 0$ es la desigualdad de Poincaré, para $l = m = 0$ resulta de las propiedades de la proyección y el caso $l = m = 1$ es inmediato por ser $c_i(u)$ constante.
Precisaremos además la siguiente identidad (que debe reemplazarse en grados más altos por una desigualdad inversa, y que, dicho sea de paso, requiere también la hipótesis de regularidad)

P3 Para todo constante c, se tiene, $|c| = |K|^{-1/2}|c|_{0,2,K}$

y finalmente

P4 $|\omega_i|_{m,2,K} \leq C|K|^{1/2}h^{-m}$ con $0 \leq m \leq 1$.

desigualdad evidente si se recuerda la regularidad de los elementos y que ω_i es la función lineal que vale uno en un vértice y cero en los demás.
Para demostrar (1.1) escribimos para cada $x \in K$

$$(P(u) - u)(x) = (c_1(u) - u) + \sum_{i=2}^{3}(c_i(u) - c_1(u))\omega_i(x) \tag{1.3}$$

tomando ahora la seminorma correspondiente vemos que el primer sumando de la derecha queda acotado, agrandandando el dominio de integración (a todo $\mathcal{S}_i$), por las propiedades **P1**, **P2**. Para acotar la sumatoria hay que escribir

$$|c_i(u) - c_1(u)| = |K|^{-1/2}|c_i(u) - c_1(u)|_{0,2,K} \leq |K|^{-1/2}\{|c_i(u) - u|_{0,2,K} + |u - c_1(u)|_{0,2,K}\} \tag{1.4}$$

que se obtiene de **P3** más la desigualdad triangular. De (1.3), (1.4) y utilizando una vez más **P1**, **P2** y **P4** resulta (1.1).

Observación 2.1.1 *Es inmediato observar que el operador de Clément no preserva la traza. Existen generalizaciones que permiten interpolar respetando las condiciones de borde [36].*

Observación 2.1.2 *Observe que la desigualdad (1.1) no vale en general para la interpolación de Lagrange si tomamos $m = l = 1$. Los operadores de casi-interpolación, sin embargo, la verifican en general.*

Si bien el origen de la interpolación de promedios se debe, según comentamos, a la intención de interpolar funciones con poca regularidad, y a pesar de que en las cotas expuestas para demostrar (1.1) utilizamos la hipótesis (1.12), en [18], se define un operador de casi-interpolación sobre 3-rectángulos que resulta tener error óptimo en H^1 independientemente de los cocientes entre las longitudes de las distintas aristas de cada elemento. Es decir, si llamamos h_K^i, $1 \leq i \leq 3$ a la longitud de la aristas de K en las direcciones de los ejes coordenados entonces las cotas en el error de interpolación serán independientes de $\frac{h_K^i}{h_K^j}$. En particular, entonces, este operador resulta mejor que el de Lagrange que fracasa (ver contraejemplos en [34]) en estos elementos. Empero, la técnica utilizada en la acotación del error, obliga a cierto tipo de "uniformidad direccional" de la triangulación. En efecto, la constante que aparece en la estimación depende del número $max_{K,K' \in \mathcal{T}} \frac{h_K^i}{h_{K'}^i}$ donde $\mathcal{T}$ representa la triangulación utilizada. Además la interpolación no puede extenderse, al menos de un modo directo, a otro tipo de elementos.

En las secciones restantes de este capítulo contruiremos un operador de casi-interpolación que conserva las propiedades del dado en [18] pero cuenta con la ventaja de que puede definirse sobre una clase mayor de elementos y además preserva orden óptimo bajo condiciónes menos restrictivas. De hecho, veremos que, por ejemplo, podremos admitir refinamientos exponenciales en cada dirección sin deteriorar las estimaciones del error.

2.2 Aproximaciones locales de la identidad

Con $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ denotaremos la bola unitaria. Dadas $0 < \epsilon_i(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq 3$, definimos $\epsilon(x) = \epsilon(x_1, x_2, x_3) = (\epsilon_1(x_1), \epsilon_2(x_2), \epsilon_3(x_3))$ en donde obviaremos la x cuando no haga falta explicitarla. Con $B_{\epsilon(x)} = B_\epsilon$ denotaremos el elipsoide $B_\epsilon = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ \ tal \ \ que \ \ \sum_{i=1}^3 (\frac{y_i}{\epsilon_i})^2 \leq 1\}$ y dada $y \in \mathbb{R}^3$ escribiremos $\frac{y}{\epsilon} = (\frac{y_1}{\epsilon_1}, \frac{y_2}{\epsilon_2}, \frac{y_3}{\epsilon_3})$. Si $\rho(x_1, x_2, x_3) \in C^2$, $\rho(x) \geq 0$ soportada en B_1, verifica $\frac{1}{|B_1|} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)dx = 1$, definimos $\rho_{\epsilon(x)}(y) = \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} \rho(\frac{y}{\epsilon(x)})$ que para x fijo tendrá soporte en $B_{\epsilon(x)}$. Dados $A, B \subset \mathbb{R}^3$ con $A + B$ denotaremos al conjunto $A + B = \{x + y, \ \ x \in A, y \in B\}$, y entonces dada una f definida en $x + B_{\epsilon(x)}$ escribiremos

$$\rho_{\epsilon(x)} \hat{*} f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\epsilon(x)}(y) f(x - y) dy$$

toda vez que tenga sentido la integral.

Observación 2.2.1 *Si los ϵ_i son constantes entonces $\rho_\epsilon \hat{*} f = \rho_\epsilon * f$ es la convolución usual y en particular con $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ tenemos las aproximaciones clásicas de la identidad. El hecho de tomar los ϵ_i diferentes permite aproximar cada dirección con distinta precisión, más aún $\epsilon_i(x)$ tiene como objetivo que esta propiedad dependa además del punto.*

Vamos a imponer ciertas hipótesis a las ϵ_i con la intención de que $\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f$ resulte una buena aproximación de f. En particular buscaremos propiedades similares a las que poseen las aproximaciones de la identidad. Enunciaremos dos hipótesis y explicitaremos en cada lugar cuando sean necesarias.

Ellas son

H1 Existe una constante C independiente de x tal que

$$|ln(\epsilon_i(x))'| = |\frac{\epsilon_i'(x)}{\epsilon_i(x)}| \leq C \tag{2.5}$$

H2 Existe una constante C independiente de x tal que

$$|ln(\epsilon_i(x))''| \leq C \tag{2.6}$$

Observación 2.2.2 *Notemos que, como en general trabajaremos sobre dominios acotados, $H2$ implica $H1$.*

Observación 2.2.3 *Si ϵ_i es constante (2.5) y (2.6) son inmediatas. Sin embargo también resultan compatibles con cualquier función exponencial.*

Observación 2.2.4 *Puesto que vamos a interesarnos en valores pequenõs de ϵ, $\epsilon << 1$ (más adelante nos covendrá que ϵ sea del orden h de la malla) de (2.5) puede suponerse que $|\epsilon_i'(x)| < 1/2$ sin perder generalidad.*

Definición 2.2.1 *Dado un conjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ notaremos*

$$\epsilon_K^M = sup_{x\in K}\epsilon(x) = (sup_{x\in K}\epsilon_1(x_1), sup_{x\in K}\epsilon_2(x_2), sup_{x\in K}\epsilon_3(x_3))$$

Análogamente

$$\epsilon_K^m = inf_{x\in K}\epsilon(x) = (inf_{x\in K}\epsilon_1(x_1), inf_{x\in K}\epsilon_2(x_2), inf_{x\in K}\epsilon_3(x_3))$$

Ahora podemos probar el siguiente

Lema 2.2.1 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$, $f \in L^p(K + B_{\epsilon_K^M})$ entonces*

$$\|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f\|_{0,p,K} \leq 2^{3/p}\|f\|_{0,p,K+B_{\epsilon_K^M}} \tag{2.7}$$

Dem. Es estándar. Se hace primero el caso $p = 1$.

$$|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|}\rho(\frac{y}{\epsilon(x)})|f(x-y)|dy \tag{2.8}$$

cambiando de variable $y \leftrightarrow \frac{y}{\epsilon(x)}$ y usando que $|B_{\epsilon(x)}| = \epsilon(x_1)\epsilon_2(x_2)\epsilon_3(x_3)|B_1|$, juntamente con el hecho de que $\rho(y)$ está soportada en B_1 se tiene

$$|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f(x)| \leq \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}\rho(y)|f(x-\epsilon(x)y)|dy \tag{2.9}$$

donde hemos usado la notación $\epsilon(x)y = (\epsilon(x_1)y_1, \epsilon(x_2)y_2, \epsilon(x_3)y_3)$ entonces,

$$\int_K |\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f(x)|dx \leq \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}\rho(y)\int_K |f(x-\epsilon(x)y)|dxdy \tag{2.10}$$

observemos ahora el cambio de variables $x \leftrightarrow x - \epsilon(x)y$, y veamos que resulta inyectivo por serlo en cada componente. En efecto, por ejemplo $x_1 = x_1 - \epsilon_1(x_1)y_1$ tiene derivada $1 - \epsilon'(x_1)y_1$, pero por la Observación 2.2.4 más el hecho de que $y \in B_1$ tenemos $|1 - \epsilon'(x_1)y_1| \geq \frac{1}{2}$. De aquí resulta, no solo la inyectividad de la aplicación $x - \epsilon(x)y$, sino una cota inferior para su jacobiano que debe ser mayor o igual que $\frac{1}{2^3}$.
Por otro lado, para todo $x \in K$ resulta evidentemente $x - \epsilon(x)y \in K + B_{\epsilon_K^M}$, por lo tanto

$$\int_K |\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f(x)|dx \leq 2^3\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}\rho(y)dy\int_{K+B_{\epsilon_K^M}}|f(x)|dx \tag{2.11}$$

pero $\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}\rho(y)dy = 1$ y entonces obtenemos (2.7) con $p = 1$.
Para p cualquiera sigue también de forma estándar

$$|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^3}\{\rho_{\epsilon(x)}^{1/p}|f(x-y)|\}\{\rho_{\epsilon(x)}^{1/q}\}dy \tag{2.12}$$

donde q es el exponente conjugado de p, entonces por Hölder

$$|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f(x)| \leq \{\int_{\mathbb{R}^3}\{\rho_{\epsilon(x)}|f(x-y)|^p dy\}^{1/p}\{\int_{\mathbb{R}^3}\rho_{\epsilon(x)}dy\}^{1/q} = \{\int_{\mathbb{R}^3}\{\rho_{\epsilon(x)}|f(x-y)|^p dy\}^{1/p} \tag{2.13}$$

donde hemos utilizado para la última igualdad una vez más que $\int\rho_{\epsilon(x)}(y)dy = \frac{1}{|B_1|}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(y)dy = 1$, y entonces observando que $|f|^p \in L^1(K + B_{\epsilon_K^M})$ y utilizando el caso $p = 1$ se obtiene

$$\int_K |\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}f(x)|^p dx \leq 2^3\int_{K+B_{\epsilon_K^M}}|f(y)|^p dy \tag{2.14}$$

de donde se sigue (2.7). $\square$

La norma infinito de una convolución entre dos funciones puede acotarse en terminos de las respectivas normas en L^2. En el lema siguiente vemos que lo mismo ocurre para $\rho_\epsilon\hat{*}f$ y buscamos en consecuencia una cota para $\|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u\|_{0,\infty,K}$.

Lema 2.2.2 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$, $u \in L^2(K + B_{\epsilon_K^M})$ entonces*

$$\|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u\|_{0,\infty,K} \leq C\frac{1}{|B_{\epsilon_K^m}|^{1/2}}\|u\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} \tag{2.15}$$

donde $C = C(\rho)$.

Dem. Usando la desigualdad de Schwartz

$$|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u(x)| \leq \{\int_{B_{\epsilon(x)}} \rho^2_{\epsilon(x)}(y)dy\}^{1/2}\{\int_{B_{\epsilon(x)}} |u(x-y)|^2 dy\}^{1/2} \tag{2.16}$$

ahora vamos a acotar cada una de estas integrales. Por un lado para $x \in K$, $y \in B_{\epsilon(x)}$ se tiene $x - y \in K + B_{\epsilon(x)} \subset K + B_{\epsilon_K^M}$ de donde

$$\{\int_{B_{\epsilon(x)}} |u(x-y)|^2 dy\}^{1/2} \leq \|u\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} \tag{2.17}$$

para la otra integral consideramos el cambio de variables $y \leftrightarrow \frac{y}{\epsilon(x)}$ y obtenemos

$$\{\int_{B_{\epsilon(x)}} \rho^2_{\epsilon(x)}(y)dy\}^{1/2} = \frac{\epsilon_1(x_1)^{1/2}\epsilon_2(x_2)^{1/2}\epsilon_3(x_3)^{1/2}}{|B_{\epsilon(x)}|}\|\rho\|_{0,2,B_1} = \frac{1}{|B_1|^{1/2}|B_{\epsilon(x)}|^{1/2}}\|\rho\|_{0,2,B_1} \tag{2.18}$$

usando ahora que para cada $x \in K$ $|B_{\epsilon_K^m}| \leq |B_{\epsilon(x)}|$ más las ecuaciones (2.16), (2.17), se obtiene (2.15). □

En el lema siguiente presentamos para $\rho_\epsilon\hat{*}u$ la primer propiedad de aproximación, del tipo que poseen los operadores de interpolación

Lema 2.2.3 *Sea* $K \subset \mathbb{R}^3$, $u \in H^1(K + B_{\epsilon_K^M})$, *entonces*

$$\|u - \rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u\|_{0,2,K} \leq 2^{3/2}3\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} \tag{2.19}$$

donde $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \epsilon_K^M$.

Dem. Fijamos x y resulta

$$|\rho_{\epsilon(x)} * u(x) - u(x)| \leq \int_{R^3} \rho_{\epsilon(x)}(y)|u(x-y) - u(x)|dy \leq \int_{R^3} \rho_{\epsilon(x)}(y)(\int_0^1 |\nabla u(x-ty).y|dt)dy \tag{2.20}$$

donde hemos señalado con un punto el producto escalar. Ahora bien, como $y \in sop(\rho_\epsilon)$, tenemos en cada componente $|y_i| \leq \epsilon_i(x_i) \leq \epsilon_i$, y entonces de (2.20)

$$|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u(x) - u(x)| \leq \sum_{i=1}^{3}\epsilon_i\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^1 |\frac{\partial u(x-ty)}{\partial x_i}|\rho_{\epsilon(x)}(y)dtdy \tag{2.21}$$

cambiando variables $y = ty$, y usando que $\rho_{t\epsilon}(y) = \frac{1}{t^3}\rho_\epsilon(\frac{y}{t})$, obtenemos,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^1 |\frac{\partial u(x-ty)}{\partial x_i}|\rho_{\epsilon(x)}(y)dtdy = \int_0^1\int_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial u(x-y)}{\partial x_i}|\rho_{t\epsilon(x)}(y)dydt \tag{2.22}$$

y de (2.21), (2.22) se tiene

$$|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u(x) - u(x)|^2 \leq 3\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i^2(\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial u(x-y)}{\partial x_i}|\rho_{t\epsilon(x)}(y)dtdy)^2 \tag{2.23}$$

la desigualdad de Schwartz en la variable t nos da

$$(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial u(x-y)}{\partial x_i}|\rho_{t\epsilon}(y)dydt)^2 \leq \int_0^1 (\int_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial u(x-y)}{\partial x_i}|\rho_{t\epsilon(x)}(y)dy)^2 dt = \int_0^1 (\rho_{t\epsilon(x)} \hat{*} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|)^2 dt \tag{2.24}$$

y ahora de (2.23), (2.24)

$$\int_K |\rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u(x) - u(x)|^2 dx \leq 3 \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i^2 \int_0^1 \int_K (\rho_{t\epsilon(x)} \hat{*} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|)^2 dx \tag{2.25}$$

finalmente tomando como $\epsilon(x) = t\epsilon(x)$ en el Lema 2.2.1 tenemos, por ser $0 < t < 1$

$$\int_K (\rho_{t\epsilon(x)} \hat{*} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|)^2 dx \leq 2^3 \int_{K+B_{\epsilon_K^M}} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx \tag{2.26}$$

de aquí y (2.25) resulta

$$\int_K |\rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u(x) - u(x)|^2 dx \leq 2^3 3 \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i^2 \int_{K+B_{\epsilon_K^M}} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx \tag{2.27}$$

y de (2.27), se obtiene (2.19). □

Observación 2.2.5 *Si los ϵ_i resultan constantes, entonces, segun hemos comentado, $\rho_\epsilon \hat{*} f = \rho_\epsilon * f$, y así, por la bien conocida propiedad de la convolución*

$$\frac{\partial(u - \rho_\epsilon * u)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \rho_\epsilon * \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{2.28}$$

desde donde es inmediato extender el resultado del Lema 2.2.3, en el sentido siguiente
Si $u \in H^2(K + B_{\epsilon_K^M})$ entonces resulta

$$\|\frac{\partial u - \rho_\epsilon * u}{\partial x_i}\|_{0,2,K} \leq C \sum_{i=1}^{3} \epsilon_j \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}}$$

sin embargo para obtener un resultado parecido con $\hat{*}$ necesitamos una propiedad análoga a (2.28). Eso es precisamente lo que estudiaremos en el próximo lema.

Observación 2.2.6 *Note las cotas "direccionales" obtenidas en el Lema 2.2.3 así como en la Observación 2.2.5, en ambos casos el error de aproximación depende de las dimensiones del elipsoide en cada dirección por la norma de las derivadas en esa misma dirección.*

Lema 2.2.4 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$, $u \in H^1(K + B_{\epsilon_K^M})$, y $c(x_i, y_i) = (1 - ln(\epsilon_i(x_i))' y_i)$, entonces:*

$$\frac{\partial \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u(x)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} c(x_i, y_i) \rho_{\epsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y) dy \tag{2.29}$$

si además $u \in H^2(K + B_{\epsilon_K^M})$ *entonces para* $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} c(x_j, y_j) c(x_i, y_i) \rho_{\epsilon(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x - y) dy \tag{2.30}$$

y para $i = j$

$$\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u(x)}{\partial^2 x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} c_i(x_i, y_i)^2 \rho_{\epsilon(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^3} (ln(\epsilon_i(x_i))'' + (ln(\epsilon_i(x_i))')^2) y_i \rho_{\epsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x-y) dy \tag{2.31}$$

Dem. Por cálculo directo

$$\frac{\partial \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u(x)}{\partial x_i} = I_1 + I_2 + I_3 \tag{2.32}$$

donde

$$I_1 = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_i'(x_i)}{\epsilon_i(x_i)} \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} \rho(\frac{y}{\epsilon(x)}) u(x - y) dy$$

$$I_2 = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_i'(x_i)}{\epsilon_i^2(x_i)} y_i \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} D_i \rho(\frac{y}{\epsilon(x)}) u(x - y) dy$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} \rho(\frac{y}{\epsilon(x)}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y) dy$$

reescribimos I_2

$$I_2 = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_i'(x_i)}{\epsilon_i(x_i)} y_i \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} \frac{\partial \rho(\frac{y}{\epsilon(x)})}{\partial y_i} u(x - y) dy$$

e integrando por partes

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_i'(x_i)}{\epsilon_i(x_i)} \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} \rho(\frac{y}{\epsilon(x)}) u(x - y) dy - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_i'(x_i)}{\epsilon_i(x_i)} y_i \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} \rho(\frac{y}{\epsilon(x)}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y) dy$$

de esta expresión, de las restantes para I_1, I_3, y de la ecuación (2.32) se obtiene (2.29).
La (2.30) sigue idénticamente observando que si queremos derivar (2.29) respecto de x_j $(j \neq i)$ el procedimiento anterior puede repetirse ya que el término $c(x_i, y_i)$ no depende de x_j.
Resta finalmente (2.31), pero una vez más un cálculo directo, derivando (2.29), da

$$\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u}{\partial x_i^2} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{2.33}$$

donde ahora

$$I_1 = -\int_{\mathbb{R}^3} ln(\epsilon(x_i))'' y_i \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} \rho(\frac{y}{\epsilon(x)}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y) dy$$

observe que hemos reemplazado $\frac{\partial c(x_i, y_i)}{\partial x_i}$ por $-ln(\epsilon(x_i))'' y_i$

$$I_2 = -\int_{\mathbb{R}^3} c(x_i, y_i) ln(\epsilon_i(x_i))' \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|} \rho(\frac{y}{\epsilon(x)}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x - y) dy$$

$$I_3 = -\int_{\mathbb{R}^3} c(x_i,y_i)ln(\epsilon_i(x_i))' y_i \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|}\frac{\partial\rho(\frac{y}{\epsilon(x)})}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x-y)dy$$

$$I_4 = \int_{\mathbb{R}^3} c(x_i,y_i)\frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|}\rho(\frac{y}{\epsilon(x)})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x-y)dy$$

e integrando por partes I_3 resulta

$$I_3 = I_{31} + I_{32}$$

con

$$I_{31} = \int_{\mathbb{R}^3} ln(\epsilon_i(x_i))'(1-2ln(\epsilon_i(x_i))'y_1)\frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|}\rho(\frac{y}{\epsilon(x)})\frac{\partial u}{\partial x_i}(x-y)dy$$

$$I_{32} = -\int_{\mathbb{R}^3} c_i(x_i,y_i)ln(\epsilon_i(x_i))' y_i \frac{1}{|B_{\epsilon(x)}|}\rho(\frac{y}{\epsilon(x)})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x-y)dy$$

teniendo en cuenta esta expresión, la de I_1, I_2, I_4, la ecuación (2.33), simplificando y reagrupando adecuadamente los términos resulta (2.31). □

Observación 2.2.7 *Notar una vez más que si $\epsilon_i = cte$ entonces $c_i(x_i,y_i) = 1$, $ln(\epsilon_i(x_i))' = ln(\epsilon_i(x_i))'' \equiv 0$ y las expresiones obtenidas en el lema previo coinciden con las de la convolución usual.*

Ahora que conocemos las expresiones para las derivadas de $\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u(x)$ extenderemos la propiedad enunciada en el Lema 2.2.3, con una versión similar a la obtenida para $\rho_{\epsilon(x)} * u(x)$, con $\epsilon = cte$, en la Observación 2.2.5.

Lema 2.2.5 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$, $u \in H^2(K + B_{\epsilon_K^M})$, y supongamos que $\epsilon(x)$ verifica la hipótesis $H1$, entonces*

$$\|\frac{\partial(u-\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u)}{\partial x_i}\|_{0,2,K} \le C\{\sum_{j=1}^{3}\epsilon_j\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + \epsilon_i\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,2,K}\} \tag{2.34}$$

donde $\epsilon_i = (\epsilon_K^M)_i$.

Dem. Reescribiendo la expresión (2.29) se tiene que

$$\frac{\partial\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u}{\partial x_i} = \rho_{\epsilon(x)}\hat{*}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \int_{\mathbb{R}^3} ln(\epsilon_i(x_i))' y_i \rho_{\epsilon(x)}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x-y)dy \tag{2.35}$$

de aquí, más $H1$ y el hecho de que $|y_i| \le \epsilon_i$, resulta

$$|\frac{\partial(u-\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u)}{\partial x_i}| \le |\frac{\partial u}{\partial x_i} - \rho_{\epsilon(x)}\hat{*}\frac{\partial u}{\partial x_i}| + C\epsilon_i|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}|\frac{\partial u}{\partial x_i}|| \tag{2.36}$$

tomando norma L^2 aplicando la desigualdad triangular más los Lemas 2.2.3 y 2.2.1 obtenemos (2.34). □

Observación 2.2.8 *Observe que $\rho_\epsilon \hat{*} f$ continúa preservando, bajo $H1$, propiedades del tipo de interpolación para las derivadas primeras, en el sentido de que*

$$|u - \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u|_{1,2,K} \leq C max\{\epsilon_i\} \|u\|_{2,2,K+B_{\epsilon_K^M}}$$

donde los ϵ_i miden la "bondad" de la aproximación.

Observación 2.2.9 *Es oportuno mencionar que también puede verse*

$$|u - \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u|_{1,2,K} \leq C|u|_{1,2,K}$$

en efecto, volviendo nuevamente a (2.36) y tomando norma L^2 en ambos miembros, aplicando la desigualdad triangular y utilizando el Lema 2.2.1 para acotar $\|\rho_{\epsilon(x)} \hat{*} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|\|_{0,2,K}$ se obtiene el resultado mencionado.

Incrementando los requisitos sobre los $\epsilon_i(x_i)$ pueden obtenerse cotas parecidas a las del Lema 2.2.5 para derivadas de mayor orden, sin embargo, para el propósito que nos ocupa, solo precisaremos la cota que aparece en el lema siguiente, y que solo requiere de la hipótesis $H2$

Lema 2.2.6 *Sean $K \subset \mathbb{R}^3$, $u \in H^2(K + B_{\epsilon_K^M})$, $\epsilon(x)$ verificando $H2$, definimos*

$$\epsilon_i = (\epsilon_K^M)_i, \qquad \epsilon = max\{\epsilon_i\}$$

entonces

$$|\rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u|_{2,2,K} \leq C(|u|_{2,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + \epsilon |u|_{1,2,K+B_{\epsilon_K^M}}) \tag{2.37}$$

mas precisamente, si $i \neq j$

$$\|\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u}{\partial x_j \partial x_i}\|_{0,2,K} \leq C \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} \tag{2.38}$$

y

$$\|\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u}{\partial x_i^2}\|_{0,2,K} \leq C(\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + \epsilon_i \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}}) \tag{2.39}$$

Dem. Se sigue sin dificultad de los Lemas 2.2.1, 2.2.4. En efecto, observe ante todo que (2.37) se obtiene de (2.38), y (2.39). Veamos, como ejemplo, la demostración de esta última.
Consideremos para ello $\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u(x)}{\partial^2 x_i}$, de (2.31) se obtiene, recordando que $|y_i| \leq \epsilon_i$

$$|\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u(x)}{\partial x_i^2}| \leq M \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\epsilon(x)} |\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x-y)| dy + \epsilon_i \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\epsilon(x)} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x-y)| dy \tag{2.40}$$

donde M acota a $c(x_i, y_i)^2$, y a $|ln(\epsilon_i(x_i))'' - ln(\epsilon_i(x_i))'^2|$, que por $H2$ deben ser finitas (vea la Observación 2.2.2). Tomando norma en L^2 y usando la desigualdad triangular tenemos

$$\|\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u}{\partial x_i^2}\|_{0,2,K} \leq M(\|\rho_{\epsilon(x)} \hat{*} |\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}|\|_{0,2,K} + \epsilon_i \|\rho_{\epsilon(x)} \hat{*} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|\|_{0,2,K} \tag{2.41}$$

de aquí y del Lema 2.2.1

$$\|\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u}{\partial x_i^2}\|_{0,2,K} \leq C(\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + \epsilon_i\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}}) \tag{2.42}$$

que es lo que debíamos probar. □

En el lema que sigue buscamos cotas similares a las del resultado previo pero en norma infinito

Lema 2.2.7 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$, $u \in H^2(K + B_{\epsilon_K^M})$, $\epsilon(x)$ verificando $H2$, y considere como en el lema previo $\epsilon_i = (\epsilon_K^M)_i$, $\epsilon = max\{\epsilon_i\}$, entonces existe una constante $C = C(\rho)$ tal que*

$$|\rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u|_{2,\infty,K} \leq C\frac{1}{|B_{\epsilon_K^m}|}(|u|_{2,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + \epsilon|u|_{1,2,K+B_{\epsilon_K^M}}) \tag{2.43}$$

mas precisamente, si $i \neq j$

$$\|\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u}{\partial x_j \partial x_i}\|_{0,\infty,K} \leq C\frac{1}{|B_{\epsilon_K^m}|}\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} \tag{2.44}$$

y

$$\|\frac{\partial^2 \rho_{\epsilon(x)}\hat{*}u}{\partial x_i^2}\|_{0,\infty,K} \leq C\frac{1}{|B_{\epsilon_K^m}|}(\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + \epsilon_i\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}}) \tag{2.45}$$

Dem. Es similar a la del lema anterior. En efecto, veamos (2.45). Para ello procedemos como antes hasta obtener una vez más (2.40) y en lugar del Lema 2.2.1 usamos el Lema 2.2.2 para obtener (2.45). Análogamente sigue (2.44) y desde luego (2.43) es consecuencia inmediata de las anteriores. □

Hasta ahora no hemos tratado, en este capítulo, con elementos finitos. En la próxima sección vamos a definir un interpolador de promedios que resultará óptimo toda vez que *sea óptima la interpolación de Lagrange sobre espacios regulares.*

2.3 Construcción y resultados de una interpolación de promedios

Comenzamos con un par de definiciones

Definición 2.3.1 *Consideremos una triangulación $\mathcal{T}$, de un dominio Ω. Diremos que $\mathcal{T}$ satisface $H2$, si y solo si existe una función $0 < \epsilon(x)$ verificando $H2$ y con la propiedad de que para todo $K \in \mathcal{T}$, para todo $x \in K$ se tiene que el elipsoide definido por $B_{\epsilon(x)}$ es comparable a K. Es decir que existen constantes $0 < c, C$ independientes de K y x tales que $c \leq \frac{|K|}{|B_\epsilon|} \leq C$. En ocasiones diremos que es K quien satiface $H2$, suponiendo, como en el capítulo previo, que con K podemos designar tanto un elemento como a una familia de ellos.*

Le definición previa relaciona las medidas de los elipsoides $B_{\epsilon(x)}$ con los elementos K. En realidad vamos a precisar un poco más, en particular ciertas cotas requieren no solo medida comparable sino tambien diámetro comparable. Para ello veamos la siguiente

Definición 2.3.2 *Consideremos una triangulación $\mathcal{T}$, de un dominio Ω, que satisface $H2$. Diremos que es de diámetro comparable a $\epsilon(x)$, donde $\epsilon(x)$ es el de la definición previa, si existen constantes $0 < c, C$ independientes de x y de K tales que $c < \frac{diam(K)}{diam(\epsilon(x))} < C$ para todo $x \in K$. También diremos como antes, sin temor a confusión, que K es de diámetro comparable a $\epsilon(x)$.*

Consideremos ahora una u definida en $H^2(K + B_{\epsilon_K^M})$, donde K verifica $H2$, para una cierta $\epsilon(x)$. Definamos la función $\overline{u} = \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u$ con $\hat{*}$ como en la sección previa. Podemos entonces hacer

$$P(u) = \Pi(\overline{u})$$

donde Π es la $\mathcal{P}_1$-interpolación de Lagrange sobre el elemento K. La idea de lo que sigue es valerse de la regularidad extra obtenida para $\overline{u}$ (ver Lema 2.2.2). En efecto, según hemos visto (Sección 1.3 del Capítulo 1) subsisten para tales funciones cotas óptimas del error, para la interpolación de Lagrange, aún sobre elementos anisotrópicos.

Escribamos entonces

$$\|\frac{\partial(u - P(u))}{\partial x_j}\|_{0,2,K} \leq \|\frac{\partial(u - \overline{u})}{\partial x_j}\|_{0,2,K} + \|\frac{\partial(\overline{u} - P(u))}{\partial x_j}\|_{0,2,K} \tag{3.46}$$

la primer norma de la derecha puede acotarse como en la sección previa, en efecto, el Lema 2.2.5 dice que

$$\|\frac{\partial(u - \overline{u})}{\partial x_j}\|_{0,2,K} = \|\frac{\partial(u - \rho_{\epsilon(x)} \hat{*} u)}{\partial x_j}\|_{0,2,K} \leq C\{\sum_{i=1}^{3} \epsilon_j \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + \epsilon_j \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{0,2,K}\} \tag{3.47}$$

con respecto a la interpolación de Lagrange, por su parte, como ya hemos mencionado, existen cotas en norma infinito del tipo siguiente

$$\|\frac{\partial(\overline{u} - \Pi(\overline{u}))}{\partial x_j}\|_{0,\infty,K} \leq C \sum_{i=1}^{3} h_i \|\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_i \partial x_j}\|_{0,\infty,K} \tag{3.48}$$

donde los h_i representan los diámetros de K en las direcciones de los ejes coordenados x_i, o bien cotas "no direccionales"

$$\|\frac{\partial(\overline{u} - \Pi(\overline{u}))}{\partial x_j}\|_{0,\infty,K} \leq Ch|\overline{u}|_{2,\infty,K} \tag{3.49}$$

siendo esta vez h el diámetro de K. Además la constante C depende del ángulo máximo, en el caso de tetraedros, o ser independiente de la forma en 3-rectángulos. Obviamente (3.48) implica (3.49).

Ya que no hemos explicitado el tipo de elementos sobre los que trabajaremos, supongamos, para fijar ideas, que vale (3.48), este caso es el más interesante, pues nos permitirá ver que nuestro operador respeta la "direccionalidad" de las cotas dadas por la interpolación de Lagrange. Antes de continuar, sin embargo, vamos a dar una definición para referirnos a los elementos que verifican este último tipo de cota para el error de interpolación.

Definición 2.3.3 *Consideremos una triangulación $\mathcal{T}$ de un dominio Ω que verifica $H2$. Diremos que tiene diámetros direccionales comparables a $\epsilon(x)$, donde $\epsilon(x)$ es el de la Definición 2.3.1, si existen constantes $0 < c, C$, independientes de x y de K, tales que $c < \frac{h_i}{\epsilon_i(x_i)} < C$, para todo $x \in K$, $K \in \mathcal{T}$. Como es usual, diremos también que es K quien tiene diámetros direccionales comparables a $\epsilon(x)$.*

Observación 2.3.1 *Obviamente si K tiene diámetros direccionales comparables a $\epsilon(x)$, tiene también, en particular, diámetro comparable $\epsilon(x)$.*

Escribamos ahora

$$\|\frac{\partial(\overline{u}-\Pi(\overline{u}))}{\partial x_j}\|_{0,2,K} \leq |K|^{1/2}\|\frac{\partial(\overline{u}-\Pi(\overline{u}))}{\partial x_j}\|_{0,\infty,K} \leq C|K|^{1/2}(\sum_{i=1}^{3} h_i\|\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_i \partial x_j}\|_{0,\infty,K}) \tag{3.50}$$

donde, en la segunda desigualdad, hemos utilizado (3.48), y ahora de (3.50), y el hecho de que $\overline{u} = \rho_\epsilon \hat{*} u$ más el Lema 2.2.7 obtenemos

$$\|\frac{\partial(\overline{u}-\Pi(\overline{u}))}{\partial x_j}\|_{0,2,K} \leq C(\frac{|K|}{|B_{\epsilon_K^m}|})^{1/2}((\sum_{i=1}^{3} h_i\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + \epsilon_j h_j\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}}) \tag{3.51}$$

y podemos entonces enunciar el resultado principal de este Capítulo

Teorema 2.3.1 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ con diámetros direccionales comparables a $\epsilon(x)$, supongamos que la interpolación de Lagrange verifica (3.48) entonces para la interpolación $P(u) = \Pi(\hat{u})$ se tiene*

$$\|\frac{\partial u - P(u)}{\partial x_j}\|_{0,2,K} \leq C\{(\sum_{i=1}^{3} h_i\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}} + h_j\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{0,2,K+B_{\epsilon_K^M}}\} \tag{3.52}$$

Dem. Como $\epsilon(x)$ verifica $H2$, se tiene $\frac{|K|}{|B_{\epsilon(x)}|} \leq C$ para todo $x \in K$ lo que da en particular $\frac{|K|}{|B_{\epsilon_K^m}|} \leq C$. Por otra parte $\epsilon_i \leq Ch_i$, y el teorema se sigue inmediatamente de las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.51). □

Análogamente se obtiene

Teorema 2.3.2 *Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ con diámetro comparable a $\epsilon(x)$, supongamos que la interpolación de Lagrange verifica (3.49) entonces para la interpolación $P(u) = \Pi(\hat{u})$ se tiene*

$$\|\frac{\partial(u - P(u))}{\partial x_j}\|_{0,2,K} \leq Ch\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{1,2,K+B_\epsilon} \tag{3.53}$$

Observación 2.3.2 *Note las implicaciones de los Teoremas previos. Según hemos visto en el Capítulo anterior, la interpolación de Lagrange no deteriora sus propiedades de aproximación sobre ciertos elementos anisotrópicos si trabajamos sobre funciones regulares. Esta condición <u>no</u> puede ser removida, como demuestran los contraejemplos dados en [34]. En consecuencia el operador que construímos resulta poseer mejores propiedades que el de Lagrange.*

Observación 2.3.3 *Las propiedades de aproximación de $\rho \hat{*} u$ se obtienen de un modo directo sobre cada elemento K, sin el uso de reescales o cambios de variable (sin pasar por un "dominio de referencia"). Esto es, en parte, lo que permite independizarse de la geometría de K dejando recaer esta cuestión sobre la interpolación de Lagrange. Por otro lado para funciones regulares, puede acotarse el error en $W^{1,\infty}$ directamente sobre el elemento K (hay un resumen de esto al comienzo de la Sección 1.3), evitando también los cambios de variables. Esto permite eludir todos los tecnicismos que debimos utilizar para tratar (también para la interpolación de Lagrange) el error en $W^{1,p}$ con $p < \infty$, sobre tetraedros anisotrópicos.*

Observación 2.3.4 *Para ver que $H1$ y $H2$ son "poco" restrictivas conviene quizá reescribir los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 sin dichas hipótesis. En tal caso, la constante que aparece en las estimaciones obtenidas depende de $|ln(\epsilon_i(x_i))'|$ y de $|ln(\epsilon_i(x_i))''|$, $1 \leq i \leq 3$. Supongamos, por simplicidad, que trabajamos en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tal que si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ entonces $0 \leq x_1 \leq 10$. Si toma una malla $\mathcal{T}$ de, digamos, 3-rectángulos, de tal modo que si $K \in \mathcal{T}$ y $x \in K$ entonces h_K^1 es comparable a $\epsilon_1(x_1) = (\frac{1}{2})^{x_1}$ resulta, por un lado, que $|ln(\epsilon_1(x_1))'| = |ln(\frac{1}{2})|$ y $ln(\epsilon_1(x_1))'' = 0$, sin embargo $max_{K,K' \in \mathcal{T}} \frac{h_K^1}{h_{K'}^1} \geq C2^{10}$. Lo que muestra que, a pesar de que $\mathcal{T}$ prácticamente no posee uniformidad en la dirección x_1, la estimación dada por los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 no se deteriora.*

Capítulo 3

Interpolación de Raviart-Thomas

3.1 Algunas estimaciones básicas

En general haremos uso de la notación dada a comienzos del Capítulo 1, pero por simplicidad la recordaremos brevemente.
Denotaremos con letra minúscula las funciones escalares, con minúsculas también pero en **negrita** las funciones vectoriales y finalmente los campos tensoriales con **negrita** mayúscula. Dado un triángulo (*resp.: tetraedro*) general K, llamaremos $\mathbf{p}_0$ a uno de sus vértices, $\mathbf{v}_i$ a los vectores unitarios con las direcciones de los lados *(resp.: aristas)* l_i (de longitud también notada l_i), concurrentes en dicho vértice y entonces si K es, digamos, un tetraedro, podremos representarlo como $K = c.c.\{\mathbf{p}_0, l_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{p}_0, l_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{p}_0, l_3\mathbf{v}_3 + \mathbf{p}_0\}$. Dado un triángulo denotaremos con ν_i a la normal exterior unitaria al lado l_i, si K fuera un tetraedro llamaremos $S_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq 3$ a la cara definida por las direcciones $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ y $\nu_{i,j}$ al correspondiente vector normal.

Presentamos ahora ciertos operadores, para ello usaremos una vez más la notación estandar $\mathcal{P}_k(K)$ para polinomios de grado no mayor que k restringidos al elemento K, y dado un K fijo, el operador $P : L^2(K) \to \mathcal{P}_0(K)$ representará la proyección en $L^2(K)$ sobre las constantes, la que para $w \in L^2(K)$ queda definida por:

$$\int_K Pw = \int_K w$$

Vamos a usar también el operador $\Pi : H^1(K) \to \mathcal{P}_1(K)$ (introducido originalmente en [14]) que proyecta en L^2 pero sobre cada lado (*resp. cara*) del elemento y que resulta unívocamente determinado para cada $w \in H^1(K)$ por las condiciones:

$$\int_S \Pi w = \int_S w \qquad \textit{para cada lado (resp.: cara) } S \textit{ de } K$$

En general, como hemos visto a lo largo de esta Tesis, los Lemas 1.2.1 y 1.2.2 son la base para el estudio del error en varios operadores de proyección o de interpolación, pues en muchas ocasiones el error (o cierta derivada del mismo) satisface las hipótesis de alguno de dichos lemas. En particular del Lema 1.2.1 se sigue inmediatamente

$$\|w - Pw\|_{0,K} \leq C \sum_{j=1}^{n} l_j \| \frac{\partial w}{\partial v_j} \|_{0,K} \tag{1.1}$$

donde por comodidad aquí, y en estimaciones análogas, no arrastraremos el valor exacto de la constante.
Por otra parte, para el operador Π resulta también

Lema 3.1.1 *El operador* Π *verifica*

$$\|w - \Pi w\|_{0,2,K} \leq C \sum_{j=1}^{n} l_j \| \frac{\partial w}{\partial v_j} \|_{0,2,K} \tag{1.2}$$

$$\| \frac{\partial \Pi w}{\partial \xi} \|_{0,2,K} \leq \| \frac{\partial w}{\partial \xi} \|_{0,2,K} \tag{1.3}$$

$$\| \frac{\partial (w - \Pi w)}{\partial \xi} \|_{0,2,K} \leq C \sum_{j=1}^{n} l_j \| \frac{\partial^2 w}{\partial v_j \partial \xi} \|_{0,2,K} \tag{1.4}$$

donde $\frac{\partial}{\partial \xi}$ *es una derivada en cualquier dirección* ξ, *y* C *es independiente de* K.

Dem. Como $w - \Pi w$ tiene promedio cero sobre los lados (resp.: caras) de K se sigue del Lema 1.2.2 que

$$\|w - \Pi w\|_{0,2,K} \leq C \sum_{j=1}^{n} l_j \| \frac{\partial (w - \Pi w)}{\partial v_j} \|_{0,2,K} \tag{1.5}$$

por otro lado,

$$\int_K \frac{\partial \Pi w}{\partial \xi} = \int_K \frac{\partial w}{\partial \xi} \tag{1.6}$$

en efecto, como

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial \Pi w}{\partial \xi} = div\{(w - \Pi w) \frac{\xi}{\|\xi\|}\}$$

se obtiene utilizando la definición de Π

$$\int_K \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial \Pi w}{\partial \xi} = \int_K div\{(w - \Pi w) \frac{\xi}{\|\xi\|}\} = \int_{\partial K} (w - \Pi w) \frac{\xi}{\|\xi\|} \nu ds = 0$$

de donde resulta (1.6), ecuación, esta última, que también puede escribirse (note que $\frac{\partial \Pi w}{\partial \xi}$ debe ser constante)

$$P \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial \Pi w}{\partial \xi} \tag{1.7}$$

y de donde se sigue inmediatamente (1.3).
Ahora (1.4) es consecuencia de (1.1) y (1.7). Finalmente, (1.2) se deduce de (1.5) y (1.3) con $v_j = \xi$. $\square$

3.2 El espacio de Raviart-Thomas

Vamos a presentar en esta sección el espacio de Raviart-Thomas de menor grado y el correspondiente operador de interpolación. Dicho espacio fue desarrollado originalmente en [30] como una aproximación del espacio funcional

$$H(div, \Omega) = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^n \;\; tales \;\; que \;\; div\mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$$

dotado con la norma

$$\|\mathbf{v}\|_{H(div)} = \|\mathbf{v}\|_{0,2,\Omega} + \|div\mathbf{v}\|_{0,2,\Omega}$$

que como veremos en la sección siguiente es el adecuado para plantear ciertas formulaciones mixtas. La versión local (esto es, sobre cada K) se define en triángulos (*resp.: tetraedros*) como [29, 30]

$$\mathcal{RT}_0(K) = \mathcal{P}_0^n(K) \oplus \mathbf{x}\mathcal{P}_0(K)$$

y la interpolación de Raviart-Thomas $RT : H^1(K)^n \to \mathcal{RT}_0(K)$ queda unívocamente determinada por la relación

$$\int_S RT\mathbf{w} \cdot \nu = \int_S \mathbf{w} \cdot \nu \;\; para \;\; todo \;\; lado \;\; S \;\; (\text{resp.: cara}) \;\; de \;\; K \tag{2.1}$$

en donde ν denota la normal unitaria exterior a S.
Mencionemos que dado un campo tensorial $\mathbf{M}$, también se define la interpolación RT actuando fila a fila, y la denotaremos con $\mathbf{RT}$.
Para las versiones globales del espacio y la interpolación de Raviart-Thomas asumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ es un poligono o poliedro y que ha sido triangulado en una partición admisible $\mathcal{T}$ de elementos triangulares o tetraedros. Definimos así el espacio de elementos finitos $\mathcal{RT}_0$ como el subespacio de $H(\text{div}\;, \Omega)$ de funciones que localmente pertenecen a $\mathcal{RT}_0(K)$. La versión global del operador RT como así también la de los operadores introducidos en la sección previa se denotarán, para no multiplicar la notación, con el mismo símbolo que sus correlatos locales.

Hagamos algunas observaciones útiles

Observación 3.2.1 *Es claro, por construcción de $\mathcal{RT}_0(K)$, que $divRT\mathbf{v}$ es constante, más aún, resulta evidente que*

$$\frac{\partial (RT\mathbf{v})_i}{\partial \mathbf{e_j}} = \delta_i^j \frac{1}{3} divRT\mathbf{v}$$

donde $(RT\mathbf{v})_i$ representa la componente $i-esima$ de $RT\mathbf{v}$.

Observación 3.2.2 *A través del Teorema de la divergencia se desprende inmediatamente de la definición de la interpolación que*

$$\int_K div\mathbf{v} = \int_K divRT\mathbf{v}$$

pero por la Observación 3.2.1 $divRT\mathbf{v}$ *es constante y, en vista de la ecuación previa, debe ser entonces la proyección de* $div\mathbf{v}$*, o sea*

$$P(div\mathbf{v}) = divRT\mathbf{v}$$

se tiene en particular

$$\|divRT\mathbf{v}\|_{0,2,K} \leq \|div\mathbf{v}\|_{0,2,K}$$

Observación 3.2.3 *De las dos observaciones previas podemos concluir*

$$\|\frac{\partial(RT\mathbf{v})_i}{\partial\mathbf{e_j}}\|_{0,2,K} \leq \delta_i^j \frac{1}{3}\|div\mathbf{v}\|_{0,2,K} \leq \frac{1}{3}|\mathbf{v}|_{1,2,K}$$

Si llamamos $\mathcal{L}_0$ al espacio de las funciones localmente constantes, lo comentado en la Observación 3.2.2 puede reumirse en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\Omega)^n & \xrightarrow{div} & L^2(\Omega) & & \\ RT\Big\downarrow & & \Big\downarrow P & & \\ \mathcal{RT}_0 & \xrightarrow{div} & \mathcal{L}_0 & \longrightarrow 0 & \end{array} \tag{2.2}$$

restaría ver la suryectividad, denotada con la última flecha de la derecha, para ello se toma una $f \in \mathcal{L}_0 \subset L^2(\Omega)$ y se busca $u \in H^2$ que resuelva el problema

$$\Delta u = f$$

que tal u existe puede verse en [21], llamando ahora $\mathbf{w} = \nabla u$ es $P \circ div\mathbf{w} = f$, según quería demostrarse.

Nuestra intención, de ahora en más, será hallar estimaciones en L^2 para el error de RT. El análisis clásico, que ahora resumiremos, se realiza por medio de la transformada de Piola [11, 7], y puede verse de ese modo que la condición de regularidad en los elementos da estimaciones óptimas. Sin embargo como hemos anticipado esa condición podrá rebajarse notablemente.

Comencemos entonces definiendo la transformación de Piola, $PI : (L^2(\hat{K}))^n \to (L^2(K))^n$, para ello consideramos una aplicación afín $F(\hat{x}) = B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_0$, con la propiedad $F(\hat{K}) = K$, y llamando $J = det(B)$, escribimos entonces

$$\mathbf{q}(x) = \mathbf{PI}(\hat{\mathbf{q}})(x) = \frac{1}{J}B\hat{\mathbf{q}} \circ F^{-1}(x) \tag{2.3}$$

con lo cual podemos asociar campos definidos sobre el dominio $\hat{K}$ con campos definidos sobre un dominio afinmemente equivalente a este último. Cabe notar que la relación (2.3) puede invertirse, y más aún, definirse entre cualesquiera dos dominios relacionados por una transformación invertible F.

Observación 3.2.4 *Obviamente no es necesario restringirse a transformaciones afines. Si se trabaja, por ejemplo, sobre elementos isoparamétricos no lineales debe reemplazarse* B *y* J *por* DF *y* $det(DF)$ *respectivamente.*

Otro hecho importante y de verificación inmediata (por cuestiones de dimensión basta ver una inclusión) es que

$$PI(\mathcal{RT}_0(\hat{K})) = \mathcal{RT}_0(K) \tag{2.4}$$

Veamos ahora el siguiente resultado clásico

Teorema 3.2.1 *Sea $K = F(\hat{K})$, y defina $\mathbf{q} = PI(\hat{\mathbf{q}})$. Si ν, $\hat{\nu}$, representan los vectores unitarios normales a ∂K, y $\partial\hat{K}$ respectivamente, entonces*

$$div\mathbf{q} = \frac{1}{J} div\hat{\mathbf{q}} \tag{2.5}$$

y

$$\int_{\partial K} \mathbf{q}\nu = \int_{\partial\hat{K}} \hat{\mathbf{q}}\hat{\nu} \tag{2.6}$$

Dem. La ecuación (2.5) es inmediata si aplicamos la regla de la cadena en (2.3) y observamos que la traza es invariante por cambios de base. Para (2.6) usamos el teorema de la divergencia en $\int_{\partial K} \mathbf{q}\nu$, después gracias a (2.5) se tiene

$$\int_{\partial K} \mathbf{q}\nu = \int_K \frac{1}{J} div\hat{\mathbf{q}}dx$$

cambiando de variables $x = F(\hat{x})$ e integrando nuevamente por partes se obtiene (2.6). $\square$

Observación 3.2.5 *Los resultados del Teorema anterior subsisten para transformaciones no lineales, y en condiciones más generales [11], aunque solo haremos uso de la presente versión .*

En el trabajo original de Raviart y Thomas la interpolación se define en el elemento de referencia a través de la relaciones (2.1) y sobre un dominio K general usando la transformación de Piola. En efecto, puede verse, por cálculo directo, que si llamamos $\hat{S}_{i,j}$ a la cara del elemento $\hat{K}$ determinada por los lados $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$ con $1 \leq i \neq j \leq 3$, y $S_{i,j}$ a la correspondiente cara de K definida por los vectores $B(\mathbf{e}_i) = l_i\mathbf{v}_i$, resulta $F(\hat{S}_{i,j}) = S_{i,j}$ y más aún definiendo $\nu_{i,j}, \hat{\nu}_{i,j}$ como los vectores normales a las caras $S_{i,j}, \hat{S}_{i,j}$ respectivamente se tiene

$$\int_{S_{i,j}} q\nu = \int_{S_{i,j}} PI(\hat{\mathbf{q}})\nu_{i,j} = \int_{\hat{S}_{i,j}} \hat{\mathbf{q}}\hat{\nu}_{i,j} \tag{2.7}$$

pero de estas relaciones, junto con (2.6), resulta, más en general, que para toda cara $S = F(\hat{S})$ de $K = F(\hat{K})$

$$\int_S \mathbf{q}\nu = \int_{\hat{S}} \hat{\mathbf{q}}\hat{\nu} \tag{2.8}$$

y es precisamente la ecuación precedente quien permite relacionar la interpolación RT en dos dominios distintos, en efecto, ahora es fácil ver que

$$RT(\mathbf{q}) = PI(RT(\hat{\mathbf{q}})) \tag{2.9}$$

ecuación clave a la hora de acotar el error. Para mostrar como se obtiene (2.9) notemos que de (2.4) resulta en particular $PI(RT(\hat{\mathbf{q}})) \in \mathcal{RT}_0(K)$, por lo que basta ver, debido a la unicidad de la interpolación, que $PI(RT(\hat{\mathbf{q}}))$ verifica las ecuaciones (2.1).
Tomemos entonces una cara S de K, y así

$$\int_S PI(RT(\hat{\mathbf{q}}))\nu = \int_{\hat{S}} RT(\hat{\mathbf{q}})\hat{\nu} = \int_{\hat{S}} \hat{\mathbf{q}}\hat{\nu} = \int_S \mathbf{q}\nu$$

en donde hemos utilizado (2.8) aplicado a los campos $RT(\hat{\mathbf{q}})$ y $\hat{\mathbf{q}}$, en la primer y tercer identidad respectivamente, y la definición de RT en la segunda. Esto prueba (2.9).
De ahora en más la cuenta es estándar, y sigue de cerca el análisis que hemos hecho para la interpolación de Lagrange en la Sección 1.1. Esto es, una vez que sabemos como pasar al dominio de referencia debemos verificar la estimación allí y derivarla a un dominio general cambiando de variables.

Lema 3.2.1 *Considere dos campos $q, \hat{q}$, relacionados por (2.3). Si uno de ellos pertenece a H^l, con $0 \leq l \leq 1$ entonces también el otro pertenece a H^l, y más aún*

$$|\hat{\mathbf{q}}|_{l,2,\hat{K}} \leq \|B\|^l \|B^{-1}\| |detB|^{1/2} |\mathbf{q}|_{l,2,K}$$

$$|\mathbf{q}|_{l,2,K} \leq \|B^{-1}\|^l \|B\| |detB|^{-1/2} |\hat{\mathbf{q}}|_{l,2,\hat{K}}$$

Dem. Se deduce directamente de la expresión (2.3). □

Finalmente presentamos cotas para el error sobre el dominio de referencia. La demostración clásica explota el hecho de que el operador RT deja invariante a las constantes y resulta continuo de $(H^1(\hat{K}))^n$ en $(L^2(\hat{K}))^n$. Con estas propiedades vía el Lema de Bramble-Hilbert (en su versión vectorial) se obtiene como resultado el Lema 3.2.2 que aparece más abajo. Sin embargo, más acorde al enfoque que daremos en las secciones siguientes proponemos una demostración directa del mismo.

Lema 3.2.2 *Sea $2 \leq n \leq 3$, $\hat{\mathbf{q}} \in (H^1(\hat{K}))^n$ entonces*

$$\|\hat{\mathbf{q}} - RT(\hat{\mathbf{q}})\|_{0,2,\hat{K}} \leq C \|\hat{\mathbf{q}}\|_{1,2,\hat{K}}$$

Dem. Considere $\mathbf{v} \in (H^1(\hat{K}))^n$ y $RT\mathbf{v}$. Más en particular tomemos las primeras componentes v_1 y $(RT\mathbf{v})_1$ de dichos campos. Se tiene evidentemente

$$v_1 - (RT\mathbf{v})_1 = (\mathbf{v} - RT\mathbf{v})\mathbf{e}_1$$

pero $-\mathbf{e}_1$ es la normal exterior unitaria a la cara $\hat{S}_{2,3}$ y por definición de la interpolación (2.1) debe ser en particular

$$\int_{\hat{S}_{2,3}} v_1 - (RT\mathbf{v})_1 = 0$$

y por el Lema 1.2.2

$$\|v_1 - (RT\mathbf{v})_1\|_{0,2,\hat{K}} \leq C |v_1 - (RT\mathbf{v})_1|_{1,2,\hat{K}}$$

entonces

$$\|v_1 - (RT\mathbf{v})_1\|_{0,2,\hat{K}} \leq C\{|v_1|_{1,2,\hat{K}} + |(RT\mathbf{v})_1|_{1,2,\hat{K}}\}$$

y por la Observación 3.2.3

$$\|v_1 - RT(\mathbf{v})_1\|_{0,2,\hat{K}} \leq C|v_1|_{1,2,\hat{K}}$$

repitiendo el argumento con las otras componentes finalizamos la demostración. □

De los Lemas 3.2.1 y 3.2.2 se obtiene inmediatamente:

$$\|\mathbf{q} - RT(\mathbf{q})\|_{0,2,K} \leq C\|B\|^2\|B^{-1}\|\|\mathbf{q}\|_{1,2,K}$$

y usando la Proposición 1.1.1 resultan estimaciones óptimas *bajo la condición de regularidad (1.12).*

3.3 Aplicaciones de la interpolación de Raviart-Thomas

En esta sección vamos a presentar dos aplicaciones de la interpolación de Raviart-Thomas. La primera de ellas es estándar y corresponde a estimaciones del error para formulaciones mixtas de problemas escalares elípticos, la segunda brinda cotas para el error en cierta aproximación no-conforme de las ecuaciones de Stokes.

Comencemos ahora con el problema elíptico de segundo orden

$$\begin{cases} -div(a\nabla p) = f & \text{in } \Omega \\ \qquad\qquad p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

el espacio $\mathcal{RT}_0$ puede usarse en conjunto con $\mathcal{L}_0$ para aproximar $\mathbf{u} = -a\nabla p$ y p utilizando la formulación mixta

$$\int_\Omega a^{-1}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega p\,\text{div}\;\mathbf{v} = 0 \quad \forall\;\mathbf{v} \in H(div,\Omega)$$

$$\int_\Omega q\,\text{div}\;\mathbf{u} = \int_\Omega f\,q \quad \forall\; q \in L^2(\Omega)$$

en tal caso se tiene que [16] , como consecuencia de la propiedad comutativa (2.2), la aproximación discreta $\mathbf{u}_h \in \mathcal{RT}_0$ satisface la estimación

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq C\|\mathbf{u} - RT\mathbf{u}\|_0$$

donde la constante C depende solo del coeficiente $a(x)$. Por ende, la convergencia sobre elementos anisotrópicos estará demostrada toda vez que se tengan estimaciones sobre dichos elementos para la interpolación RT.

Nuestra segunda aplicación es a las ecuaciones de Stokes

$$\begin{cases} -\mathbf{div}\ (\nabla \mathbf{u} - p\mathbf{Id}) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Consideremos, para aproximar la velocidad $\mathbf{u}$, los elementos de Crouzeix y Raviart $(\mathcal{L}_1^{NC})^n$. Donde $\mathcal{L}_1^{NC}$ denota el conjunto de las funciones lineales sobre cada K pero continuas solo en los puntos medios de los lados (*resp.: baricentros de las caras*) entre dos elementos adyacentes y nulas en los puntos medios de los lados (*resp.: baricentros de las caras*) sobre el borde de Ω. Esta aproximación es evidentemente no conforme, y si tomamos la presión en $\mathcal{L}_0$, puede verse que la combinación provee un método estable [7, 14, 19].

La aproximación por elementos finitos de Crouzeix-Raviart [14] $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{L}_1^{NC} \times \mathcal{L}_0$ se define por

$$\begin{cases} \sum_K \int_K (\nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h - p_h \,\text{div }\mathbf{v}_h) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot \mathbf{v}_h \\ \sum_K \int_K q_h \,\text{div }\mathbf{u}_h = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

para todo $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{L}_1^{NC} \times \mathcal{L}_0$. Nuestro propósito es demostrar que el error puede ser acotado a través de la interpolación RT más otros términos que pueden controlarse, con orden óptimo, independientemente de la forma de los elementos. Consecuentemente obtendremos estimaciones óptimas toda vez que las tenga la interpolación RT.

Precisaremos en lo que sigue las versiones vectoriales de Π y P que se definen aplicando el operador escalar componente a componente. En particular $\mathbf{\Pi} : H_0^1(\Omega)^n \to (\mathcal{L}_1^{NC})^n$ resulta ser el operador de Fortin asociado este método, i.e., satisface

$$\int_\Omega \text{div }(\mathbf{u} - \mathbf{\Pi}\mathbf{u})\, q_h = 0 \qquad \forall q_h \in \mathcal{L}_0 \tag{3.3}$$

Note que, en vista del Lema 3.1.1, obtenemos estimaciones óptimas del error, con constantes independientes de la forma de los elementos, para este operador en normas L^2 y H^1. En particular, la estabilidad o también llamada condición inf-sup valdrá con una constante independiente de la forma de lo elementos. Por lo tanto el problema se reduce a controlar los terminos de consistencia que aparecen en la ecuación del error. Los métodos estándar acotan estos terminos a través del teorema de traza o utilizando reescales que requieren en general de la condición de regularidad. Nuestros argumentos mostrarán que esta condición no es necesaria.

Para simplificar la notación introducimos

$$\mathbf{M} = \nabla\mathbf{u} - p\mathbf{Id}$$

Para obtener las ecuaciones del error, multiplicamos por $\mathbf{w}_h = \mathbf{\Pi}\mathbf{u} - \mathbf{u}_h \in (\mathcal{L}_1^{NC})^n$ ambos lados de (3.1), e integramos por partes

$$\sum_K \{\int_K (\nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{w}_h - p \,\text{div }\mathbf{w}_h) - \int_{\partial K} \mathbf{M}\nu \cdot \mathbf{w}_h\} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{w}_h \tag{3.4}$$

Restando a (3.4) la primer ecuación de (3.2) y llamando $\mathbf{e}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ se tiene

$$\sum_K \int_K (\nabla \mathbf{e}_h : \nabla \mathbf{w}_h - (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{w}_h) = \sum_K \int_{\partial K} \mathbf{M}\nu \cdot \mathbf{w}_h \tag{3.5}$$

Pero se sigue de las segundas ecuaciones de (3.1) y (3.2) que

$$\sum_K \int_K q_h \operatorname{div} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = 0 \qquad \forall q_h \in \mathcal{L}_0$$

y por ende de (3.3)

$$\sum_K \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{w}_h = 0 \qquad \forall q_h \in \mathcal{L}_0$$

Entonces, sobre cada K, resulta nula div $\mathbf{w}_h$ y

$$\sum_K \int_K (p - p_h) \operatorname{div} \mathbf{w}_h = 0$$

Por lo tanto, (3.5) toma la forma

$$\sum_K \int_K \nabla \mathbf{e}_h : \nabla \mathbf{w}_h = \sum_K \int_{\partial K} \mathbf{M}\nu \cdot \mathbf{w}_h \tag{3.6}$$

y escribiendo

$$\mathbf{e}_h = \mathbf{u} - \mathbf{\Pi u} + \mathbf{w}_h$$

obtenemos finalmente de (3.6) la ecuación del error

$$\sum_K \int_K \nabla \mathbf{e}_h : \nabla \mathbf{e}_h = \sum_K \{ \int_K \nabla \mathbf{e}_h : \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{\Pi u}) + \int_{\partial K} \mathbf{M}\nu \cdot \mathbf{w}_h \} \tag{3.7}$$

En el próximo Lema acotaremos los terminos de consistencia $\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{M}\nu \cdot \mathbf{w}_h$ utilizando la interpolación de Raviart-Thomas.

Lema 3.3.1 *Sea* $\mathbf{w}_h = \mathbf{\Pi u} - \mathbf{u}_h$. *Entonces,*

$$|\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{M}\nu \cdot \mathbf{w}_h| \leq C \sum_K \{ h_K \|\mathbf{f}\|_{0,2,K} + \|\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M})\|_{0,2,K} \} \|\nabla \mathbf{w}_h\|_{0,2,K} \tag{3.8}$$

Dem. Como $\mathbf{w}_h$ es continuo en los puntos medios (*resp.: baricentros*) de los lados interiores (*resp.: caras*), y es nulo en los respectivos puntos medios de los lados (*resp.: baricentros*) del borde, y además $RT(\mathbf{M})\nu$ es constante sobre cada lado (*resp.: cara*) y continuo entre elementos, es fácil ver que

$$\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{RT}(\mathbf{M})\nu \cdot \mathbf{w}_h = 0$$

entonces,

$$\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{M}\nu \cdot \mathbf{w}_h = \sum_K \int_{\partial K} (\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M}))\nu \cdot \mathbf{w}_h \tag{3.9}$$

Ahora bien,

$$\int_{\partial K} (\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M}))\nu \cdot \mathbf{w}_h = \int_K \mathbf{div}\ (\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M})) \cdot \mathbf{w}_h + \int_K (\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M})) : \nabla \mathbf{w}_h \tag{3.10}$$

Para acotar el primer termino observemos que del diagrama conmutativo (2.2) se tiene

$$\mathbf{div}\ \mathbf{RT}(\mathbf{M}) = \mathbf{P}(\mathbf{div}\ \mathbf{M})$$

y entonces, de (3.1) resulta

$$\int_K \mathbf{div}\ (\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M})) \cdot \mathbf{w}_h = -\int_K (\mathbf{f} - \mathbf{Pf}) \cdot \mathbf{w}_h = -\int_K \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w}_h - \mathbf{Pw}_h)$$

y así, se sigue de (1.1) que

$$|\int_K \mathbf{div}\ (\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M})) \cdot \mathbf{w}_h| \leq C h_K \|\mathbf{f}\|_{0,2,K} \|\nabla \mathbf{w}_h\|_{0,2,K}$$

y por tanto, resulta (3.8) de esta última desigualdad, junto con (3.9) y (3.10). $\square$

Como consecuencia de este lema obtenemos la siguiente estimación del error para las ecuaciones de Stokes

Teorema 3.3.1 *Se tiene la siguiente estimación*

$$(\sum_K \|\nabla \mathbf{e}_h\|^2_{0,2,K})^{1/2} \leq C(\sum_K \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{\Pi u})\|^2_{0,2,K} + \|\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M})\|^2_{0,2,K} + h_K^2 \|\mathbf{f}\|^2_{0,2,K})^{1/2} \tag{3.11}$$

con C independendiente de la forma de los elementos.
En particular,

$$(\sum_K \|\nabla \mathbf{e}_h\|^2_{0,2,K})^{1/2} \leq C(\sum_K h_K^2 (\|\mathbf{u}\|^2_{2,2,K} + \|\mathbf{f}\|^2_{0,2,K}) + \|\mathbf{M} - \mathbf{RT}(\mathbf{M})\|^2_{0,2,K})^{1/2} \tag{3.12}$$

Dem. De la ecuación del error (3.7) se sigue que

$$\sum_K \|\nabla \mathbf{e}_h\|^2_{0,2,K} \leq \sum_K \|\nabla \mathbf{e}_h\|_{0,2,K} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{\Pi u})\|_{0,2,K} + |\sum_K \int_{\partial K} \mathbf{M}\nu \cdot \mathbf{w}_h|$$

y por ende (3.11) es una consecuencia inmediata de (3.8). Y ahora (3.12) se obtiene de (3.11) y (1.4). $\square$

3.4 Estimaciones para el error en 2D sobre triángulos

En esta sección demostramos cotas óptimas para el error en la interpolación de Raviart-Thomas para triángulos bajo la $MAC(\psi)$. La estrategia consiste en obtener las estimaciones del error primero para las componentes normales de la interpolación RT, cosa que puede lograrse a través del Lema 1.2.2.

Lema 3.4.1 *Sea K un triángulo y $\mathbf{w} \in (H^1(K))^2$, entonces existe una constante C independiente de K tal que*

$$\|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_i\|_{0,2,K} \leq C \sum_{k=1}^{2} l_k (\|\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial v_k}\|_{0,2,K} + \|div\ \mathbf{w}\|_{0,2,K} |\nu_i \cdot \mathbf{v}_k|)$$

Dem. La acotación es similar a la del Lema 3.2.2. En efecto, como $(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_i$ tiene promedio cero sobre el lado $l_i\mathbf{v}_i$ podemos aplicar el Lema 1.2.2 y obtener

$$\|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_i\|_{0,2,K} \leq C \sum_{k=1}^{2} l_k \|\frac{\partial (\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_i}{\partial v_k}\|_{0,2,K} \tag{4.1}$$

con C independiente de K.

Un cálculo directo muestra que (vea la Observación 3.2.1)

$$\frac{\partial (RT\mathbf{w} \cdot \nu_i)}{\partial v_k} = \frac{1}{2} (\text{div } RT\mathbf{w})\, \mathbf{v}_k \cdot \nu_i$$

y entonces el resultado se sigue de (4.1) y el hecho de que div $RT\mathbf{w} = P\text{div } \mathbf{w}$ lo que implica

$$\|\text{div } RT\mathbf{w}\|_{0,2,K} \leq \|\text{div } \mathbf{w}\|_{0,2,K}$$

concluyendo la demostración. □

Hasta ahora no se han requerido restricciones con respecto a la forma de K. Sin embargo para acotar $\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,K}$ es razonable esperarlas. En efecto, en vista del lema previo, será suficiente controlar $\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,2,K}$ en términos de sus componentes en las direcciones normales a los lados, digamos $\|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_1\|_{0,2,K}$ y $\|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_2\|_{0,2,K}$, cosa evidentemente posible por medio de un cambio de variables, pero con el costo de introducir una constante en la estimación. Precisamente dicha costante no estará acotada uniformemente para triángulos arbitrarios y es en este sentido en el que debemos incorporar ciertas restricciones a la geometía de los elementos. Claramente esta constante dependerá del ángulo entre ν_1 y ν_2 y se mantendrá acotada si este ángulo no se aproxima a 0 o a π, o equivalentemente, si el ángulo entre los correspondientes lados no se aproxima 0 o a π. Es fácil ver que esta condición se satisface claramente bajo la *"condición del ángulo máximo"*. Más precisamente

Lema 3.4.2 *Sea K un triángulo con ángulo máximo θ_0. Entonces existe una constante, C, independiente de K, tal que, para todo $\mathbf{w} \in (H^1(K))^2$,*

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,2,K} \leq \frac{C}{\sin\theta_0} \sum_{i=1}^{2} \|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_i\|_{0,2,K}$$

donde ν_1 y ν_2 son las normales a los lados concurrentes en el vértice de mayor ángulo.

Dem. Sea N una matriz construida con ν_1 y ν_2 como filas. Entonces

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,2,K} \leq \|N^{-1}\| \sum_{i=1}^{2} \|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_i\|_{0,2,K}$$

donde $\| \, \|$ denota una vez más a la norma 2. Como los ν_i son unitarios, se sigue que $\|N^{-1}\| \leq \frac{C}{|det\, N|}$ y $|det\, N| = \sin\theta_1$ donde θ_1 es el ángulo entre ν_1 y ν_2. La demostración concluye observando que $\theta_1 = \pi - \theta_0$. □

En resumen obtenemos la siguiente estimación del error para la interpolación RT:

Teorema 3.4.1 *Sea K un triángulo con $MAC(\theta_0)$. Sean l_1, l_2, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ las longitudes y las direcciones de los dos lados concurrentes en el vértice de mayor ángulo. Existe entonces una constante C, independiente de K, tal que para todo $\mathbf{w} \in H^1(K)^2$,*

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,2,K} \leq C \sum_{k=1}^{2} l_k (\|\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial v_k}\|_{0,2,K} + \|div\ \mathbf{w}\|_{0,2,K})$$

Dem. La demostración sigue inmediatamente de los Lemas 3.4.1 y 3.4.2. □

Observación 3.4.1 *Argumentos similares pueden aplicarse a elementos rectangulares (vea [7] para la definición del espacio $\mathcal{RT}_0$ sobre rectángulos y la correspondiente proyección). En efecto, sea K un rectángulo con lados de longitud l_1 y l_2. Procediendo como en el Lema 3.4.1 y usando que en este caso,*

$$\|\frac{\partial (RT\mathbf{w})_i}{\partial x_i}\|_{0,K} \leq \|\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i}\|_{0,K}$$

podemos probar que

$$\|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w})_i\|_{0,K} \leq C \sum_{k=1}^{2} l_k \|\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial x_k}\|_{0,K}$$

con una constante C independiente de la relación entre l_1 y l_2.

3.5 Estimaciones para el error en 3D sobre tetraedros

El objetivo de esta sección es obtener estimaciones de error para la interpolación RT en 3d. Primero mostraremos que los argumentos dados el la sección previa pueden generalizarse y obtener resultados análogos al Teorema 3.4.1 para cierta clase de elementos degenerados. Sin embargo la condición requerida para dichos elementos usando ese argumento es demasiado restrictiva. De hecho, por medio de una demostración diferente, obtendremos una estimación, que si bien no nos da cotas direccionales para el error de interpolación, provee, sin embargo, orden óptimo para toda la clase de elementos de ángulo máximo. Más aún todavía, demostraremos que tal condición es necesaria y suficiente para obtener dicha estimación en la interpolación RT.

Como en el caso bidimensional comenzamos obteniendo cotas para las componentes normales de $\mathbf{w} - RT\mathbf{w}$.

Lema 3.5.1 *Sea K un tetraedro, y $\mathbf{w} \in H^1(K)^3$ existe entonces una constante C independiente de K tal que*

$$\|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_i\|_{0,K} \le C \sum_{k=1}^{3} l_k (\|\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial v_k}\|_{0,K} + \|div\ \mathbf{w}\|_{0,K} |\nu_i \cdot \mathbf{v}_k|)$$

Dem. Se sigue del Lema 1.2.2 como en el caso bidimensional. □

Ahora bien, con el propósito de acotar $\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,K}$ podemos proceder como en la sección previa. Una vez más, para un elemento fijo, podemos acotar la norma de $\mathbf{w} - RT\mathbf{w}$ en términos de las normas de las componentes de dicho campo en tres direcciones normales a las caras del elemento, y estudiar, entonces, la dependencia de la constante en la estimación obtenida en función de la geometría del elemento en cuestión. Claramente, tal constante no degenera para aquellos elementos que posean tres normales "uniformemente" linealmente independientes. En el Capítulo 1 hemos definido la *propiedad del vértice regular* (vea Definición 1.3.3) que precisamente exigía esta misma condición, para tres aristas concurrentes en algún vértice del tetraedro K. En el lema siguiente demostraremos que la *propiedad del vértice regular* implica precisamente (de hecho es equivalente, vea la Observación 3.5.1) que las normales a las caras concurrentes en el "vértice regular"se mantengan uniformemente linealmente independientes, y a través de este resultado acotaremos el error de interpolación.

Lema 3.5.2 *Sea K un tetraedro que satisface la "propiedad del vértice regular" con una constante $\overline{c} > 0$. Existe entonces C dependiente solo de $\overline{c}$ tal que para todo $\mathbf{w} \in H^1(K)^3$*

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,K} \le C \sum_{i=1}^{3} \|(\mathbf{w} - RT\mathbf{w}) \cdot \nu_i\|_{0,K}$$

donde ν_i representa a las normales correspondientes a las caras concurrentes en el vértice regular $\mathbf{p}_0$.

Dem. Procediendo como en la demostración del Lema 3.4.2, tenemos que acotar $\|N^{-1}\|$ donde N es la matriz construida con ν_i como filas. Como además los coeficientes de N están acotados por

uno, se tiene evidentemente que $\|N^{-1}\| \leq C/|\det N|$ y entonces será suficiente ver que $|\det N| \geq \overline{\overline{c}} > 0$ con $\overline{\overline{c}}$ dependiendo solo de $\overline{c}$.
Un cálculo elemental muestra que

$$|\det N| = \frac{(\det M)^2}{\sin\theta_{12}\sin\theta_{23}\sin\theta_{31}}$$

donde θ_{ij} es el ángulo entre $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$, por lo tanto

$$|\det N| \geq (\det M)^2 \geq \overline{c}^2$$

lo que concluye la demostración. □

Observación 3.5.1 *Observe que tener cotas inferiores uniformes para $|det\, N|$ o $|det\, M|$ son cuestiones equivalentes, aunque nosotros hallamos usado solo una implicación. En efecto, con idéntico argumento se demuestra que $|det\, M| \geq (det\, N)^2$. Por ende, la "propiedad del vértice regular" es una hipótesis razonable para concluir el resultado del lema previo.*

Recolectando los lemas obtenidos en esta sección resulta

Teorema 3.5.1 *Sea K un tetraedro que satisface la "propiedad del vértice regular" con una constante $\overline{c} > 0$. Sea l_i y $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2,3$ las longitudes y direcciones de las tres aristas que concurren en el vértice regular $\mathbf{p}_0$. Existe entonces una constante C dependiendo solo de $\overline{c}$ tal que para todo $\mathbf{w} \in H^1(K)^3$*

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,K} \leq C \sum_{k=1}^{3} l_k (\|\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial v_k}\|_{0,K} + \|div\ \mathbf{w}\|_{0,K}) \tag{5.1}$$

Dem. El resultado es inmediato de los Lemas 3.5.1 y 3.5.2. □

Observación 3.5.2 *Como en el caso bidimensional el mismo argumento resulta util para tratar elementos hexaedricos con caras paralelas a los ejes coordenados, y obtener estimaciones análogas a las expuestas en la Observación 3.4.1.*

En este punto enfrentamos la cuestión de si es o no posible extender el resultado a una clase mayor de elementos. En lo que sigue daremos una respuesta afirmativa a esta cuestión. En particular obtendremos una estimación ligeramente más debil (en el sentido de que ya no serán direccionales las cotas obtenidas), aunque todavía óptima, que la obtenida en el Teorema 3.5.1 pero para elementos que verifiquen la *condición del ángulo máximo*. Según demostramos en el Capítulo 1 (Sección 1.3) esta condición es menos retrictiva que la del vértice regular (vea la Observación 1.3.8). Un hecho evidente es que se requiere de una técnica distinta para atacar el problema ya que es es fácil hallar ejemplos para los que las normales a las caras de un tetraedro no permanezcan uniformemente linealmente independientes aunque se verifique $MAC(\psi)$ (en la Figura 1 b) se observa claramente esta cuestión).

La idea va a consistir en reducir al problema a uno de dimensión finita. Para lograr este propósito vemos primero que dada una función $\mathbf{w} \in H^1(K)^3$ es posible aproximarla con otra, que además de ser lineal en cada componente posee la misma interpolación RT que $\mathbf{w}$, en efecto

Lema 3.5.3 *Sea K un tetraedro, y $\mathbf{w} \in H^1(K)^3$ entonces*

$$RT\mathbf{\Pi w} = RT\mathbf{w}$$

Dem. De la definición de $\mathbf{\Pi}$ se sigue que

$$\int_S \mathbf{\Pi w} \cdot \nu = \int_S \mathbf{w} \cdot \nu$$

para toda cara S de K. Y entonces el lema está probado observando que $\int_S \mathbf{w} \cdot \nu$ son los grados de libertad que definen RT . □

Ahora ya podemos ver

Lema 3.5.4 *Sea K un tetraedro y suponga que*

$$\|\mathbf{q} - RT\mathbf{q}\|_{0,2,K} \leq C_1 h_K \|\nabla \mathbf{q}\|_{0,2,K} \tag{5.2}$$

para todo $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_1(K)^3$. Entonces

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,2,K} \leq (C + C_1) h_K \|\nabla \mathbf{w}\|_{0,2,K}$$

para todo $\mathbf{w} \in H^1(K)^3$, con una constante C independiente de K.

Dem. Del lema 3.5.3 tenemos

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,2,K} \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{\Pi w}\|_{0,2,K} + \|\mathbf{\Pi w} - RT\mathbf{\Pi w}\|_{0,2,K} \tag{5.3}$$

ahora de (5.2) y (1.3) resulta

$$\|\mathbf{\Pi w} - RT\mathbf{\Pi w}\|_{0,2,K} \leq C_1 h_K \|\nabla \mathbf{w}\|_{0,2,K}$$

y la demostración concluye usando (1.2) para acotar el el primer termino de (5.3). □

De este lema se sigue que si la estimación del error es válida uniformemente para polinomios lineales, entonces lo mismo sucede para toda función en H^1. Por ende analizaremos este problema suponiendo que el elemento K satisface la "*condición del ángulo máximo*". Para ello será de extrema utilidad la caracterización analítica de tales elementos obtenida en la Sección 1.3, más en particular nos referimos al Lema 1.3.6.

Teorema 3.5.2 *Sea K un tetraedro que satisface la $MAC(\overline{\psi})$. Entonces se tiene la siguiente estimación*

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,K} \leq Ch_K \|\nabla \mathbf{w}\|_{0,K} \tag{5.4}$$

para toda $\mathbf{w} \in H^1(K)^3$, donde C depende solo de $\overline{\psi}$.

Dem. En vista del Lema 3.5.4 solo tenemos que verificar la estimación para funciones en $\mathcal{P}_1(K)^3$. Por otro lado, teniendo en cuenta el Lema 1.3.6, podemos asumir que K es como en la Figura 2 (vea también la Observación 1.3.7) y debemos probar que la estimación es válida con una constante que depende solo de la constante $m_0(\overline{\psi})$ dada en dicho lema.

En primer término vamos a probar esto último para una base

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(x,0,0),(y,0,0),(z,0,0),$$
$$(0,x,0),(0,y,0),(0,z,0),(0,0,x),(0,0,y),(0,0,z)\}$$

Como RT interpola exactamente a los primeros tres vectores de B, debemos tratar solo los restantes casos.

Un cálculo directo nos da

$$RT(x,0,0) = \frac{1}{3}(\frac{2(l_2\alpha + l_3\gamma)}{3} + x, y, z)$$

$$RT(y,0,0) = \frac{1}{3}(l_2\beta + l_3\delta, 0, 0)$$

$$RT(z,0,0) = \frac{1}{3}(l_3\eta, 0, 0)$$

$$RT(0,x,0) = \frac{1}{3}(\frac{l_2\alpha - l_1}{\beta}, l_1 + l_3\gamma, 0)$$

$$RT(0,y,0) = \frac{1}{3}(-l_2\alpha + x, l_3\delta + y, z)$$

$$RT(0,z,0) = \frac{1}{3}(0, l_3\eta, 0)$$

$$RT(0,0,x) = \frac{1}{3}(\frac{(l_1 - l_3\gamma)\gamma}{\eta} + \frac{(l_2\alpha - l_1)\delta\alpha}{\beta\eta}, \frac{\delta(l_2\alpha - l_3\gamma)}{\eta}, l_1 + l_2\alpha)$$

$$RT(0,0,y) = \frac{1}{3}(\frac{\delta(l_2\alpha - l_3\gamma)}{\eta}, \frac{-\delta(l_3\delta - l_2\beta)}{\eta}, l_2\beta)$$

$$RT(0,0,z) = \frac{1}{3}(\frac{l_2\alpha - 2l_3\gamma}{3} + x, -l_3\delta + y, z)$$

Y ahora la estimación (5.4) se sigue facilmente para $\mathbf{w} \in B$ calculando $\|RT\mathbf{w} - \mathbf{w}\|$ de estas expresiones y usando las condiciones del Lema 1.3.6. A modo de ejemplo mostramos que (5.4) es válida para $\mathbf{w} = (0,0,y)$. Los otros casos se tratan análogamente.

Tenemos

$$RT\mathbf{w} - \mathbf{w} = \frac{1}{3}(\frac{\delta}{\eta}(\alpha l_2 - \gamma l_3), -\frac{\delta}{\eta}(\delta l_3 - \beta l_2), l_2\beta - 3y) \tag{5.5}$$

y como $\|\nabla\mathbf{w}\|_{0,K} = |K|^{\frac{1}{2}}$, para verificar (5.4) es suficiente ver que

$$|RT\mathbf{w} - \mathbf{w}| \leq Ch_K \tag{5.6}$$

pero del Lema 1.3.6 tenemos que δ/η está acotado por una constante, que depende solo de $\overline{\psi}$, y por ende (5.6) se sigue inmediatamente de la expresión (5.5) teniendo en cuenta que α, β, δ y γ poseen valor absoluto menor o igual que uno.

Ahora, para un $\mathbf{w} \in \mathcal{P}_1(K)$ general, llamamos $\mathbf{w}_i$ a los elementos de la base B, y escribiendo $\mathbf{w} = \sum_i a_i\mathbf{w}_i$ obtenemos

$$\|\mathbf{w} - RT\mathbf{w}\|_{0,K}^2 \leq C\sum_i a_i^2\|\mathbf{w}_i - RT\mathbf{w}_i\|_{0,K}^2 \leq Ch_K^2\sum_i \|a_i\nabla\mathbf{w}_i\|_{0,K}^2 = Ch_K^2\|\nabla\mathbf{w}\|_{0,K}^2$$

donde hemos utilizado la ortogonalidad entre $\nabla\mathbf{w}_i$ y $\nabla\mathbf{w}_j$, $i \neq j$ para la última identidad. □

Observación 3.5.3 *Es importante destacar que la "condición del ángulo máximo" es además necesaria para obtener la estimación (5.4). En efecto, usando las expresiones dadas en la demostración del Teorema 3.5.2 es fácil construir contraejemplos cuando alguna de las condiciones 1),2) o 3) del Lema 1.3.6 no se satisface.*

Bibliografía

[1] G. Acosta, R. G. Durán, *The maximum angle condition for mixed and nonconforming elements. Application to the Stokes equations*, Impresiones previas, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires, 108, 1997. A aparecer en SIAM J. on Num. Anal.

[2] G. Acosta, R.G.Durán, *Error estimates for $\mathcal{Q}_1$ isoparametric elements satisfying a weak angle condition*, 1998. Enviado a Numer. Math.

[3] D. N. Arnold, F. Brezzi, *Mixed and nonconforming finite element methods implementation, postprocessing and error estimates*, R.A.I.R.O., Modél. Math. Anal. Numer., **19**, 7-32, 1985.

[4] D. N. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin, *A stable finite element for the Stokes equations*, Calcolo, **21**, 337-344, 1984.

[5] I. Babuška *Error bounds for finite element method*, Numer. Math. **20**, 179-192, 1973.

[6] I. Babuška, A. K. Aziz *On the angle condition in the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal. **13**, 214-226, 1976.

[7] F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer–Verlag, New York, 1991.

[8] I. Babuška, B. Quo *Regularity of the solutions for elliptic problems in nonsmooth domains in* $\mathbb{R}^3$. Tech. Note. BN-1181/2, Inst. for Phys. Sci. and Tech., 1995.

[9] C. Bernardi, G. Raugel, *Méthodes d' éléments finis mixtes pour les équations de Stokes et de Navier-Stokes dans un polygone non convexe*, Calcolo **18**, 255-291, 1981.

[10] S. C. Brenner, L. R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Texts in Applied Mathematics, vol.15, Springer-Verlag, 1994.

[11] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, 1978.

[12] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity*, Volume I: Three Dimensional Elasticity, North Holland, 1988.

[13] P.Clement, *Approximation by finite element functions using local regularizations*, Rev. Fran. Autom. Inform. Recherche Operationnelle Ser. Rouge Anal. Num. **R-2**, 77-84, 1975.

[14] M. Crouzeix, P. A. Raviart, *Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, R.A.I.R.O. Anal. Numer., **7**, 33-76, 1973.

[15] P. G. Ciarlet, P. A. Raviart, *Interpolation theory over curved elements, with applications to finite elements methods.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**1**, 217-249, 1972.

[16] J. Douglas, J. E. Roberts, *Global estimates for mixed methods for second order elliptic equations*, Math. Comp., **44**, 39-52, 1985.

[17] T.Dupont, R.Scott, *Polynomial approximation in Sobolev spaces*, Math. Comp., **34**, 441-463, 1980.

[18] R. G. Durán, *Error estimates for 3-d narrow finite elements*, to appear in Math. Comp., 1998.

[19] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer Verlag, 1986.

[20] P. Grisvard *Eliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, 1985.

[21] D.Gilbarg, N.S.Trudinger *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1983.

[22] S. M. Hudson, *Polynomial approximation in Sobolev spaces*, Indiana University Math. J., **39**, 199-228, 1990.

[23] P. Jamet, *Estimation of the interpolation error for quadrilateral finite elements which can degenerate into triangles*, SIAM J. Numer. Anal. **14**, 925-930, 1977.

[24] P. Jamet, *Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés*, RAIRO Anal. Numér. **10**,46-61, 1976.

[25] M. Krízek, *On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements*, SIAM J. Numer. Anal. **29**, 513-520, 1992.

[26] M. Krízek, *On semiregular families of triangulations and linear interpolation*, Applications of Math., **36**, 223-232, 1991.

[27] L.D. Marini, *An inexpensive method for the evaluation of the solution of the lowest order Raviart-Thomas mixed method*, SIAM J. Numer. Anal., **22**, 493-496, 1985.

[28] J. Meinguet, *A practical method for obtaining a priori error bounds in pointwise and mean-square approximation problems*, Approximation Theory and Spline Functions, S. P. Singh et al., eds., D. Reidel Publishing Company, 97-125, 1984.

[29] J. C. Nedelec, *Mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$, Numer. Math., **35**, 315-341, 1980.

[30] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, Mathematical aspects of the Finite Element Method, I. Galligani, E. Magenes, eds., Lecture Notes in Mathematics. 606, Springer Verlag, 1977.

[31] A. Russo, Communication at International Conference on Numerical Simulation of Partial Differential Equations, ICTP, Trieste, September 23-27, 1996.

[32] L. E. Payne, H. F. Weinberger, *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rat. Mech. Anal. **5**, 286-292, 1960.

[33] R. Verfürth *Error estimates for some quasi-interpolation operator*, Preprint 227, Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum, 1997.

[34] N. Al Shenk, *Uniform error estimates for certain narrow Lagrange finite elements*, Math. Comp. **63**, 105-119, 1994.

[35] K.T. Smith, *Inequalities for formally positive integro-differential forms*, Bull. A.M.S. **68**, 1961.

[36] R.Scott, S.Zhang *Finite element interpolation of non-smooth functions satifying boundary conditions*, Math. Comp. **54**, 483-493, 1990.

[37] A. Zenisek, M. Vanmaele, *The interpolation theorem for narrow quadrilateral isoparametric finite elements*, Numer. Math. **72**, 123-141, 1995.

[38] A. Zenisek, M. Vanmaele *Applicability of the Bramble Hilbert lemma in interpolation problems of narrow quadrilateral isoparametric finite elements*, J. Comp. Appl. Math. **63**, 109-122, 1995.