¿Por qué usamos 12 notas? De Pitágoras a Bach

Ricardo. G. Durán y Bruno Mesz

August 27, 2010

Colaboró en la elaboración de gráficos y archivos de sonido Mariana I. Prieto.

Existen muchas conexiones entre la música y la matemática. Aquí nos ocuparemos de una de las más clásicas que es la relacionada con la construcción de las escalas musicales.

En la Grecia antigua los pitagóricos estudiaron, entre muchas otras cosas, la armonía, es decir, cómo suenan dos o más sonidos producidos al mismo tiempo o qué combinaciones resultan "agradables" y cuáles no. Por supuesto que "agradable" es algo muy subjetivo (por eso lo ponemos entre comillas), sabemos que hay obras musicales que a algunas personas les parecen hermosas mientras que a otras les resultan espantosas. De hecho, lo que ha sido considerado como musicalmente aceptables fue cambiando a través del tiempo.

Sin embargo, hay algunas reglas básicas que parecen ir más allá de cuestiones culturales, combinaciones de sonidos que "suenan bien" (¡otra vez las comillas!) a todas las personas, lo cual ha motivado que distintas culturas en diversos lugares del mundo hayan usado escalas musicales similares.

1 LA ESCALA PITAGÓRICA

Los Pitagóricos producían los sonidos haciendo vibrar una cuerda y, variando la longitud de ésta, obtenían sonidos de distintas alturas, es decir más graves o más agudos. La observación fundamental que hicieron es que dos sonidos tocados simultáneamente resultaban agradables (consonantes) cuando el cociente entre las longitudes de las cuerdas era una fracción cuyo numerador y denominador eran números enteros y pequeños, por ejemplo una el doble de la otra o una el triple de la otra (suponiendo, claro está, que las cuerdas fueran siempre del mismo material y grosor y que estuvieran igualmente tensas). Hoy se sabe que los sonidos son simplemente vibraciones que se transmiten a través del aire hasta nuestros oídos. Se sabe también que la altura de un sonido que produce una cuerda está dada por la velocidad a la que ésta vibra, o dicho de otra manera, a la frecuencia con la que la cuerda vibrante pasa por su posición inicial, y que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

Consideremos el caso más simple: dos cuerdas tales que sus longitudes son una el doble de la otra. La cuerda más corta produce un sonido más agudo que el producido por la más larga. En otros términos, la frecuencia del sonido emitido por la cuerda más corta es el doble que la del producido por la más larga. Ahora bien, ninguna persona con un oído normal diría que estas dos notas son iguales, sin embargo, tienen algo en común de tal forma que al tocarlas simultáneamente se produce un sonido que resulta agradable, y tanto es así, que es usual denominarlas con el mismo nombre. Por ejemplo, si el lector está familiarizado con un piano, sabrá que hay muchas teclas que producen DO, si empezamos por la de más a la izquierda entre éstas, el segundo DO tiene el doble de frecuencia, el tercero el doble que el segundo y así sucesivamente.

Existen estudios sobre la fisiología del oído y del cerebro para tratar de entender cuál es la razón por la que estas dos notas tocadas juntas suenan bien, pero éste es un problema de otra índole que no trataremos en este artículo. De todas formas es interesante el siguiente experimento: escuchar dos notas a la vez dejando fija la más grave y variando la frecuencia de la más aguda comenzando por una con frecuencia un poco mayor que el doble de la primera y haciendola bajar de a poco hasta llegar a la que tiene exactamente el doble. Se puede apreciar que el sonido inicial es bastante disonante hasta llegar al sonido final que suena prácticamente como si fuera una sola nota. Esto es lo que se escucha en el siguiente link (primero se escuchan las dos notas por separado).

OCTAVA

Volvamos ahora a nuestro problema principal que es la construcción de escalas musicales. Elegir una escala es decidir que conjunto de notas (es decir de frecuencias) se utilizarán para hacer música. Claro que la primera pregunta que surge es para qué determinar de antemano un conjunto de notas. Algunos instrumentos de cuerdas permiten tocar frecuencias arbitrarias dentro de cierto rango. Este es el caso del violín y de los otros instrumentos de cuerda de la misma familia (viola, violoncello y contrabajo). En efecto, apretando la cuerda en cualquier lugar se consigue que la parte vibrante tenga una longitud arbitraria menor o igual que la longitud total de la cuerda. Siendo así, se podría dejar que las frecuencias a usar las decidan el compositor y los instrumentistas. Sin embargo, hay muchos otros instrumentos en los cuales las frecuencias que pueden sonar están determinadas al construirlos, este es el caso del piano o los otros instrumentos de teclado conocidos (por ejemplo, el clave) y de muchos instrumentos de viento como la flauta o la infinidad de variantes de este tipo que se han utilizado en diversas culturas (en este caso es la posición de los agujeros lo que determina las frecuencias). En consecuencia, si se quiere tocar música con distintos instrumentos a la vez, es necesario elegir un conjunto de frecuencias distinguibles entre sí por el oído humano.

Una vez aceptado como punto de partida que una frecuencia y su doble suenan bien tocadas simultáneamente, el problema se reduce a elegir qué otras frecuencias intermedias utilizar. Una vez hecho esto, y teniendo en cuenta lo explicado arriba, es natural agregar los dobles y mitades de las frecuencias elegidas y así sucesivamente hasta llegar a los límites de las frecuencias audibles para el humano.

Cómo lo que interesan son las proporciones entre frecuencias y no estas en forma absoluta, supongamos que nuestra nota más grave tiene frecuencia 1 y por lo tanto la de su doble tiene frecuencia 2. Nuestro problema se reduce entonces a qué frecuencias intermedias elegir (y una vez elegidas éstas, se agregan las frecuencias obtenidas multiplicandolas y dividiendo por 2, 4, 8, etc.).

Ahora bien, habíamos dicho que dos sonidos tocados en simultáneo resultan agradables cuando el cociente entre sus frecuencias es una fracción que puede escribirse de tal forma que su numerador y su denominador sean números entero pequeños. Entonces, la primera nota que agregaríamos es la que tiene frecuencia 3, pero como queremos agregar frecuencias intermedias entre 1 y 2, agregamos la frecuencia $\frac{3}{2}$ (¡ya que 3 es el doble de $\frac{3}{2}$!). En el lenguaje usual de la música clásica occidental, el intervalo entre dos notas tales que la frecuencia de una es $\frac{3}{2}$ de la de la otra, se llama una quinta, mientras que el intervalo formado por una nota y la del doble de su frecuencia se llama octava. En lo que sigue utilizaremos esta terminología aunque no entraremos en detalles sobre su origen.

En el siguiente link se realiza, ahora para una quinta, el experimento realizado más arriba para la octava.

QUINTA

Tenemos ya dos notas de nuestra escala cuyas frecuencias son

$$1 \quad , \quad \frac{3}{2}$$

Ya que sabemos que dos notas cuyas frecuencias están en relación $\frac{3}{2}$ (intervalo de quinta) suenan agradablemente en simultáneo, la idea es seguir agregando las "quintas" de cada una de las notas. La siguiente nota corresponde a la frecuencia $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, pero como el resultado es mayor que 2, lo dividimos por 2 (pues como ya dijimos, la frecuencia mitad da la misma nota una octava más abajo), obteniendo así la frecuencia $\frac{9}{8}$. Hasta ahora las frecuencias de las notas de nuestra escala están dadas entonces por

$$1 \quad , \quad \frac{9}{8} \quad , \quad \frac{3}{2}$$

El procedimiento sigue ahora de la misma manera, es decir, en cada paso se multiplica la frecuencia de la última nota agregada por $\frac{3}{2}$ y se agrega la nota correspondiente. O sea, si el resultado es menor que 2 se agrega esa frecuencia y si no, se la divide por 2.

Si llegáramos a la misma nota de la que empezamos pararíamos allí, pues continuar significaría repetir las notas ya agregadas a la escala . Sin embargo esto no es posible, en efecto, el procedimiento usado consiste en multiplicar por $\frac{3}{2}$ y, algunas veces, dividir por 2. De esta manera las frecuencias de todas las notas que se agreguen serán de la forma $\frac{3^m}{2^n}$ con m y n números enteros positivos, por lo que nunca podríamos llegar al 2 ni al 1 ya que ningún número entero se puede escribir como una fracción de esa forma porque el 3 y el 2 son números coprimos (es decir que una tal fracción es irreducible).

En consecuencia, podríamos seguir agregando notas eternamente. ¿Cuándo parar entonces? Observemos que, si seguimos un paso más despues de la duodécima nota, la siguiente frecuencia resulta ser

$$\frac{3^{12}}{2^{18}} = 2.02728\cdots$$

o sea, un número muy cercano a 2. Al dividir este número por 2 obtenemos una frecuencia muy cercana a 1, es decir que la décimotercera nota resultaría ser un sonido muy cercano a la nota original. Por este motivo es que se adoptó la escala de doce notas construída de esta manera y llamada escala pitagórica.

El cociente

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1.01364\cdots$$

se llama usualmente *coma pitagórica*.

Los cocientes entre las frecuencias de las notas de esta escala y la nota con la cual empezamos la construcción (llamada tónica) están dadas por

$$1, \frac{3^7}{2^{11}}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^9}{2^{14}}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{3^{11}}{2^{17}}, \frac{3^6}{2^9}, \frac{3}{2}, \frac{3^8}{2^{12}}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{3^{10}}{2^{15}}, \frac{3^5}{2^7}$$

Como dijimos más arriba, comenzábamos por una nota de frecuencia 1 porque lo que importa para la construcción de una escala son las proporciones entre las frecuencias.

Para obtener las verdaderas frecuencias de la escala musical debemos decir en primer lugar cómo medimos las frecuencias. La manera usual es utilizar como unidad la cantidad de vibraciones por segundo. Esta unidad de medida se conoce con el nombre de Hertz (que proviene del físico alemán Heinrich Hertz). Por ejemplo, la frecuencia 261hz es la de una nota DO. Comenzando por ella, y multiplicándola por los factores obtenidos arriba, obtenemos la escala usual cuyas frecuencias en Hertz están dadas en la siguiente tabla.

orden	nota	frecuencia
1	DO	261,6256
8	DO#	279,3824
3	RE	294,3288
10	RE#	314,3052
5	MI	331,1199
12	FA	353,5934
7	FA#	372,5099
2	SOL	392,4384
9	SOL#	419,0736
4	LA	441,4932
11	LA#	471,4578
6	SI	496,6799

Table 1: Escala pitagórica

En el siguiente link se puede escuchar la escala pitagórica, comenzando con el DO cuya frecuencia es 261,6256 Hz y terminando en el DO cuya frecuencia es el doble de ésta.

PITAGÓRICA COMPLETA

2 SEMITONOS Y LA ESCALA TEMPERADA

El intervalo entre una nota y la siguiente de una escala se llama semitono. En la escala pitagórica construida más arriba hay dos clases de semitonos. En efecto, si hacemos el cociente entre las frecuencias de dos notas sucesivas de la escala, obtenemos los números $\frac{3^7}{2^{11}}$ o $\frac{2^8}{3^5}$ dependiendo de cuál sea el par de notas sucesivas elegidas.

Observemos además que los dos semitonos son muy parecidos, en efecto, tenemos que

$$\frac{3^7}{2^{11}} = 1,0679\cdots$$

mientras que

$$\frac{2^8}{3^5} = 1,0534\cdots$$

La existencia de dos semitonos distintos trae consecuencias indeseadas al transportar un motivo musical en un instrumento de afinación fija como el piano. Por ejemplo, si a una melodía que comienza en la nota DO se la transporta subiendo todas sus notas un semitono (es decir comenzándola en DO#) sonará distinta a la original si se usa la escala pitagórica.

Esto motivó la construcción de una escala alternativa conocida con el nombre de temperada y que fue comenzada a usar por Johann Sebastian Bach (1685-1750). La idea para construir esta escala es simple: seguir usando doce notas pero cuyas frecuencias sean tales que el cociente entre dos sucesivas resulte siempre igual, es decir, que los semitonos sean todos iguales. La escala así construida resulta muy parecida a la pitagórica.

¿Cuáles son los intervalos de la escala temperada? Al igual que en la construcción de la pitagórica, partimos suponiendo que la primer nota tiene frecuencia 1 y queremos encontrar las frecuencias de las siguientes notas de tal forma que se cumpla que el cociente entre las frecuencias de dos notas sucesivas sea un valor x constante. Para que esto pase, la frecuencia de la segunda nota debe ser x, la de la tercera x^2 y así sucesivamente hasta llegar a que la duodécima nota debe tener una frecuencia igual a x^{11} y la siguiente una igual a x^{12}. Pero queremos que esta nota tenga una frecuencia igual al doble de la de la nota de la que partimos, es decir que $x^{12} = 2$, o sea, $x = \sqrt[12]{2}$.

En consecuencia, los factores por los que tenemos que multiplicar la frecuencia de nuestra primer nota para obtener la escala temperada de doce notas son los siguientes,

$$1,\ \sqrt[12]{2}, (\sqrt[12]{2})^2, (\sqrt[12]{2})^3, (\sqrt[12]{2})^4, (\sqrt[12]{2})^5, (\sqrt[12]{2})^6, (\sqrt[12]{2})^7, (\sqrt[12]{2})^8, (\sqrt[12]{2})^9, (\sqrt[12]{2})^{10}, (\sqrt[12]{2})^{11}$$

En el siguiente link se puede escuchar la escala temperada.

TEMPERADA COMPLETA

Como ya dijimos, las escalas pitagórica y temperada son muy parecidas. Uno puede ver usando una calculadora que los factores dados aquí arriba, que definen la escala temperada, son muy cercanos a las fracciones que definen la pitagórica. Esta cercanía es mayor en la quinta que en el resto de las notas . En efecto, el número $(\sqrt[12]{2})^7 \sim 1$ que define la quinta en la escala temperada es prácticamente igual a $\frac{3}{2}$. Esto resulta importante en la música occidental dado el papel primordial que juega la quinta .

Si comenzamos nuevamente por la nota DO cuya frecuencia es 261hz, las frecuencias de la escala temperada son las de la siguiente tabla.

orden	nota	frecuencia
DO	261,6256	
DO#	277,1826	
RE	293,6648	
RE#	311,127	
MI	329,6276	
FA	349,2282	
FA#	369,9944	
SOL	391,9954	
SOL#	415,3047	
LA	440	
LA#	466,1638	
SI	493,8833	

Table 2: Escala temperada

3 BATIDOS Y REPRESENTACIÓN DE LOS SONIDOS

Cuando se escuchan simultáneamente dos sonidos cuyas frecuencias son muy cercanas se percibe una oscilación en el volumen del sonido resultante. A estas oscilaciones se las llama batidos. En los links siguientes se pueden escuchar dos ejemplos de este fenómeno. En el primer link se escuchan las notas LA# de la escala pitagórica y de la escala temperada primero en forma sucesiva y luego superpuestas. En el segundo link se escucha lo mismo pero ahora para la nota RE.

LA#

RE

Los batidos resultan de utilidad práctica para los músicos al afinar instrumentos. En efecto, si uno quiere ajustar la afinación, por ejemplo de dos cuerdas que deben producir la misma nota, si se perciben batidos es que la afinación no es correcta.

Para dar una idea de por qué se producen los batidos necesitamos hablar antes de cómo se representan los sonidos. Más allá de los batidos, la representación matemática de los sonidos es fundamental en numerosas aplicaciones, por ejemplo en lo que tiene que ver con grabación y reproducción de los sonidos.

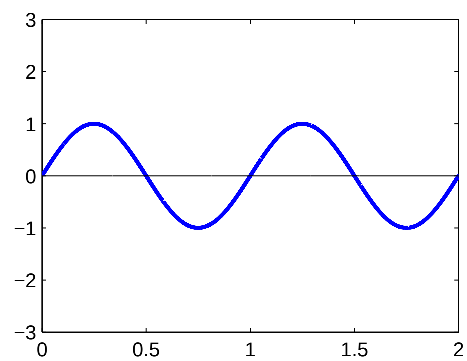
Las dos propiedades fundamentales de un sonido son su volumen (o sea, cuán fuerte lo oímos) y su altura (cuán grave o agudo lo oímos). Como ya hemos dicho, los sonidos son vibraciones en el aire y su altura depende de la cantidad de vibraciones por segundo, siendo el sonido más agudo cuanto mayor sea esta cantidad de vibraciones.

¿Cómo representar gráficamente estas vibraciones? Pensemos nuevamente en una cuerda vibrante y en cómo se mueve un punto de la cuerda (por ejemplo su punto medio). Al vibrar la cuerda, este punto se moverá hacia arriba y hacia abajo de tal forma que, si graficamos la posición del punto en función del tiempo, obtenemos una curva oscilante. Las funciones trigonométricas clásicas, el seno y el coseno, son funciones oscilantes simples y juegan un papel fundamental en este tema.

Indiquemos con t al tiempo medido en segundos y con $p(t)$ a la posición del punto de la cuerda en el instante t (suponiendo que cuando la cuerda esta fija el punto esta a altura cero). Consideremos los siguientes ejemplos simples de movimientos oscilatorios:

Si tuvieramos

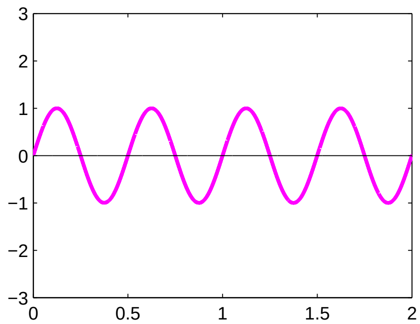
$$p(t) = \operatorname{sen} 2\pi t$$



En el instante inicial, $t = 0$, el punto estaría a altura 0, o sea, $p(0) = 0$, y luego de 1 segundo habría vuelto a su posición inicial, o sea $p(1) = 0$, habiendo oscilado una sola vez como se ve en el gráfico. Luego se repite el mismo movimiento sucesivamente obteniéndose de esta forma lo que se llama una función periódica (en el gráfico se muestran los dos primeros ciclos). Decimos entonces que la frecuencia, o sea la cantidad de vibraciones por segundo, es igual a 1Hz. Si fuera en cambio,

$$p(t) = \operatorname{sen} 4\pi t$$

al cabo de 1 segundo también el punto volvería estar en su posición inicial pero habiendo oscilado dos veces, es decir que en este caso la frecuencia es igual a 2Hz.



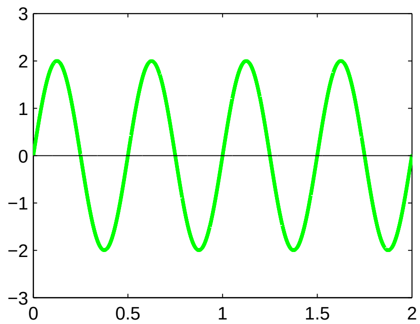
Por otra parte, en ambos ejemplos, la altura máxima que alcanza el punto es igual a 1 (y análogamente hacia abajo llega a -1). Decimos entonces que la amplitud de este movimiento oscilatorio es igual a 1.

Como ya hemos dicho, la frecuencia es lo que nos da la altura del sonido: cuanto mayor sea la frecuencia más agudo será el sonido. Por otra parte, la amplitud está relacionada con el volumen: mayor amplitud implica volumen más alto. Intuitivamente, si la cuerda se pulsa más fuerte, las oscilaciones serán de mayor tamaño y el sonido producido se escuchará más fuerte.

Por ejemplo, si

$$p(t) = 2 \operatorname{sen} 4\pi t$$

la frecuencia es la misma que en el segundo ejemplo pero la amplitud es el doble, es decir que se escuchará una nota de la misma altura que en ese ejemplo pero más fuerte .



En la práctica las oscilaciones son de magnitudes mucho mayores que en la de estos ejemplos (como habíamos dicho, la frecuencia del DO central de un piano es 261Hz). Generalizando los ejemplos, tenemos que un movimiento oscilatorio dado por

$$p(t) = A \operatorname{sen} 2\pi f t$$

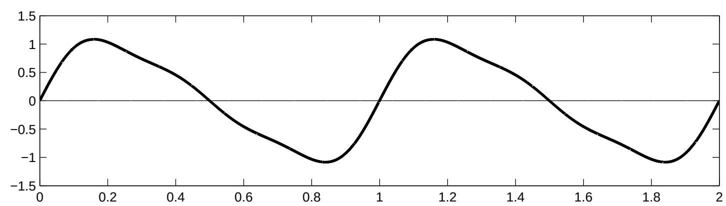
siendo A y f números positivos, tiene una amplitud igual a A y una frecuencia igual a f.

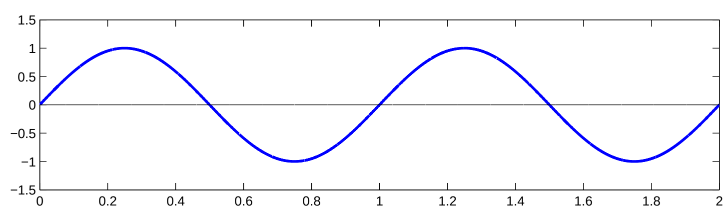
Por supuesto que en la práctica el sonido se va apagando hasta desaparecer debido al rozamiento de la cuerda con el aire, o sea que la altura de la curva debería ir decayendo. Sin embargo, la representación de una vibración por una función periódica resulta ser una buena aproximación de gran utilidad en muchas aplicaciones.

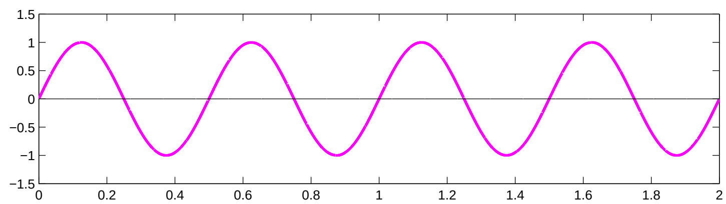
Como es de esperar, el movimiento de un punto de la cuerda es en realidad mucho más complejo que el descripto por las funciones trigonométricas de los ejemplos de más arriba. Lo mismo podemos decir para cualquier otra vibración producida por algún instrumento.

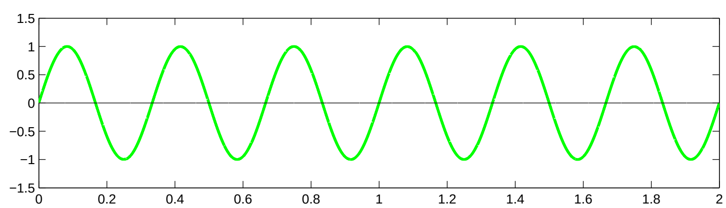
Sin embargo, se puede ver que un movimiento oscilatorio general puede ser descripto no ya por una sola función trigonométrica, pero sí por una suma de este tipo de funciones con distintas frecuencias que son múltiplos de una frecuencia dada, llamada fundamental. Esa frecuencia fundamental es la que determina la altura de la nota mientras que el peso con que aparezcan las frecuencias más altas determina lo que se conoce como el timbre (que es lo que hace que una misma nota suene muy distinto en un instrumento que en otro).

A modo de ejemplo mostramos en el gráfico siguiente una función periódica que es la suma de múltiplos de las tres funciones trigonométricas que se muestran abajo.









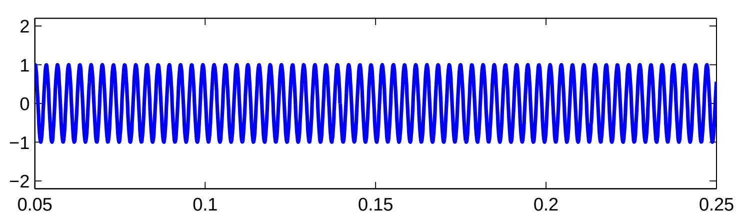
La escritura de funciones periódicas como suma de trigonométricas (en general una serie o "suma de infinitos términos") es lo que se conoce como desarrollo en serie de Fourier, ya que fue el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) quien desarrolló este método, aunque también habían utilizado ideas similares otros matemáticos anteriores a él, por ejemplo, los célebres Daniel Bernoulli (1700 - 1782) y Leonhard Euler (1707 - 1783).

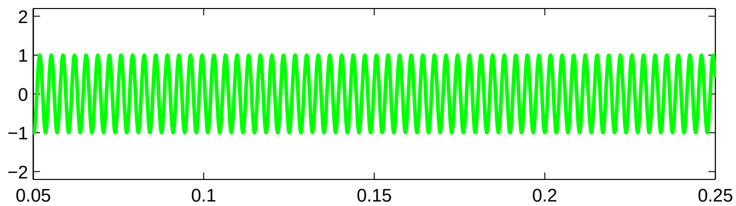
Volvamos ahora al tema de los batidos. Habíamos dicho que estos se producen al tocar simultaneámente dos notas de frecuencias muy cercanas.

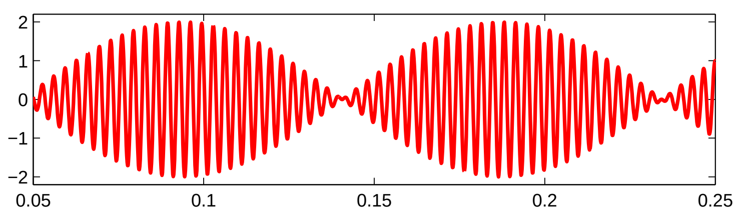
Supongamos entonces que tenemos dos movimientos oscilatorios elementales, uno con frecuencia f_1 y el otro con frecuencia f_2. Es decir, estos movimientos están representados por $\mathrm{sen}\,(f_1 t)$ y $\mathrm{sen}\,(f_2 t)$. Al superponerlos obtenemos el sonido representado por la suma, la que según una igualdad trigonométrica conocida puede escribirse de la siguiente manera,

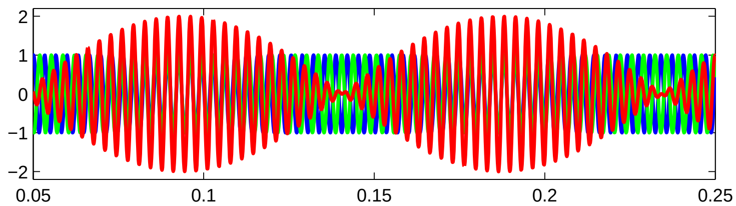
$$\mathrm{sen}\,(2\pi f_1 t) + \mathrm{sen}\,(2\pi f_2 t) = 2\cos\,(\pi(f_1 - f_2)t)\ \mathrm{sen}\,(\pi(f_1 + f_2)t)$$

Mirando el lado derecho de la fórmula observamos que el sonido obtenido al superponer las dos notas tiene una frecuencia igual al promedio de las frecuencias de los sonidos originales, que al ser estas casi iguales, resulta ser también casi igual (por eso oímos una nota de la misma altura), pero tiene una amplitud variable dada por $2\cos\,(\pi(\omega_1 - \omega_2)t)$, es decir una amplitud oscilante como se aprecia en la figura y en consecuencia un volumen también oscilante como se aprecia al escuchar.




2
1
0
−1
−2
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25


2
1
0
−1
−2
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25



Finalmente, en el link siguiente se pueden escuchar las escalas de DO mayor (es decir DO, RE, MI, FA, SOL, LA SI, DO) pitagórica y temperada primero separadamente y luego superpuestas.

PITAGÓRICA VS. TEMPERADA