Ejercicios para entregar de Elementos Finitos
Segundo Cuatrimestre de 2006

1. (clase 27/9)

   (a) Generalizar la demostración de la desigualdad de Poincaré en dominios convexos a valores de k mayores con las técnicas de Dobrowolski. Es decir, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo y una función $u \in H^{k+1}(\Omega)$ sea

   $$p_k(u)(x) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega T_k(u)(y,x)\, dy$$

   donde

   $$T_k(u)(y,x) = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(y) \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!}$$

   (o sea $T_k(u)(y,x)$ es el polinomio de Taylor de grado k de u centrado en y).

   Demostrar que existe una constante $C = C(k,n) > 0$ tal que

   $$|u - p_k(u)|_{j,\Omega} \leq C\, d^{k+1-j}\, |u|_{k+1,\Omega}$$

   para todo $0 \leq j \leq k+1$, donde $d := diam(\Omega)$.

   (b) Con las mismas técnicas generalizar (a) para dominios estrellados respecto de una bola $B \subset \Omega$ (en este caso $C = C(k,n,B)$).

2. (clase 27/9) "Serendipity elements"

   Dado R, un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, mostrar que los vértices y los puntos medios de los lados forman un conjunto $\mathcal{Q}_2^{red}$ -unisolvente, donde

   $$\mathcal{Q}_2^{red} := \langle 1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2 \rangle$$

3. (clase 6/10) "Estimaciones del error en la interpolación en triángulos"

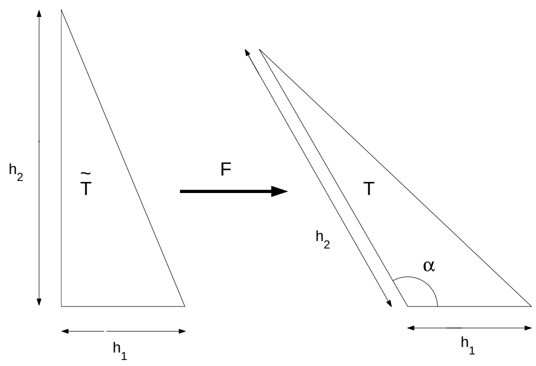
   Llamemos Πu a la interpolada de Lagrange de grado 1 de u.

   (a) Sea $\widehat{T}$ el triangulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Utilizando la desigualdad de Poincaré

   $$\|v\|_{L^2(\widehat{T})} \leq C \|v\|_{H^1(\widehat{T})} \quad ,$$

   donde ℓ es cualquier lado de $\widehat{T}$ y $\int_\ell v = 0$, demostrar

   $$\left\| \frac{\partial(u - \Pi u)}{\partial x} \right\|_{L^2(\widehat{T})} \leq C \left\| \nabla \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\widehat{T})}$$



(b) Si $\widetilde{T}$ es el triángulo rectángulo de la figura deducir de (a), mediante un cambio de variables, que

$$\Big\|\frac{\partial(u-\Pi u)}{\partial x}\Big\|_{L^2(\widetilde{T})} \leq C\left\{h_1\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big\|_{L^2(\widetilde{T})} + h_2\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big\|_{L^2(\widetilde{T})}\right\}$$

(c) Considerar la transformación lineal que manda $\widetilde{T}$ en un triángulo genérico T con vértices en $(0,0)$, $(h_1,0)$ y (a,b) (ver la figura) dada por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{h_2} \\ 0 & \frac{b}{h_2} \end{pmatrix}$$

Verificar que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{h_{\widetilde{T}}}{h_T} \leq \sqrt{2}$$

y que

$$\|B\|_2 \leq \sqrt{2} \quad \text{and} \quad \|B^{-1}\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}$$

donde $\|\,.\,\|_2$ es la norma matricial asociada a la norma euclidea.

(d) Demostrar la estimación de error

$$\|\nabla(u-\Pi u)\|_{L^2(T)} \leq C\frac{h_T}{sen\,\alpha}|u|_{2,T}$$

siendo α el ángulo máximo de T.

4. (clase 6/10) "Estimaciones del error en la interpolación en rectángulos de $\mathbb{R}^3$"

Sea $R := [0,1]^3$ y $u_\varepsilon \in H^2(R)$ definida por

$$u_\varepsilon(x) := \left(1 - \min\{1, \varepsilon \ln|\ln(\frac{r}{e})|\}\right) x_1$$

con $r := \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ y $\varepsilon > 0$. Probar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}(u_\varepsilon - \Pi^1_R(u_\varepsilon))\right\|_{L^2} \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}\right\|_{L^2} = 0.$$

Es decir que en $\mathbb{R}^3$ no vale una estimación análoga a la demostrada en la parte (a) del ejercicio anterior.

5. (clase 12/10)

   Sea $T \subset \mathbb{R}^n$ un simplex (o sea triángulo en $\mathbb{R}^2$, tetraedro en $\mathbb{R}^3$, etc.) y $\sigma = \frac{h_T}{\rho_T}$ Probar que existe una constante positiva $C = C(\sigma, k)$ tal que para toda $v \in \mathcal{P}_k(T)$,

$$|v|_{1,T} \leq \frac{C}{h_T}\,\|v\|_{L^2(T)}$$

6. (clase 12/10)

   Sean $T \subset \mathbb{R}^n$ un triángulo en $\mathbb{R}^2$ o tetraedro en $\mathbb{R}^3$ y P_i los nodos usuales de interpolación en $\mathcal{P}_k(T)$. Probar que, si φ es el polinomio de Lagrange que satisface $\varphi_j(P_i) = \delta_{ij}$, existe una constante positiva $C = C(\sigma, k)$ tal que

$$|\varphi_j|_{1,T} \leq C\, h_T^{\frac{n}{2}-1}$$

7. (clase 12/10)

   Mostrar que existe una constante positiva C tal que dada $u \in H^2(\Omega_j)$

$$\|u - \Pi u\|_{1,T} \leq C\, h_{\Omega_j}\, |u|_{2,\Omega_j},$$

   donde Πu es la interpolación de Clement y Ω_j la unión de todos los triángulos que contienen a P_j.

8. (clase 12/10)

   Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en B_1 y de integral uno. Mostrar que existe una constante C tal que dada $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$\|u - u * \varphi_t\|_{L^2} \leq C\, t\, \|u\|_{H^1},$$

   donde $\varphi_t(x) := t^{-n}\varphi(\frac{x}{t})$.

9. (clase 13/10) “Inclusión de espacios intermedios (Besov-Sobolev)”

   Mostrar que $\hat{H}^s \subset H^{s-\varepsilon}$, para todo $\varepsilon > 0$.

10. (clase 2/11)(Teorema de trazas en un triángulo)

Sea $T \subset \mathbb{R}^n$ un simplex (o sea triángulo en $\mathbb{R}^2$, tetraedro en $\mathbb{R}^3$), y ℓ un lado (si $n = 2$) o cara (si $n = 3$) $\sigma = \frac{h_T}{\rho_T}$. Probar que existe una constante positiva $C = C(\sigma)$ tal que, para toda $v \in H^1(T)$,

$$\|v\|_{L^2(\ell)} \leq C\{h_T^{-1/2} \|v\|_{L^2(T)} + h_T^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(T)}\}$$