

ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2010
Práctica 4 - H^1 y BMO

Ejercicio 1. (*Núcleo de Poisson en $\mathbb{R}^n$*)

Probar que

$$(e^{-2\pi|x|})^\wedge = c_n \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Para eso, deducir primero que

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta^2/4u} du$$

usando las igualdades

- $e^{-\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx$, $\beta > 0$ (aplicar residuos a $e^{i\beta z}/(1+z^2)$)
- $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u} du$

Ejercicio 2. Probar que si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ es tal que $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 0$, entonces f y su transformada de Hilbert están en $L^1(\mathbb{R})$ (es decir, $f \in H^1(\mathbb{R})$).

Ejercicio 3. Probar que $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ con la definición

$$H^1 = \{f \in \mathcal{S}' : \sup_{t>0} f * P_t \in L^1\}$$

Ejercicio 4. Demostrar la existencia de descomposición atómica en $(2, p)$ -átomos para H^p cuando $p < 1$ siguiendo la demostración de Wilson.

Ejercicio 5. (*Interpolación con H^1*)

Sea $1 < p \leq \infty$ y sea T un operador subaditivo que manda $H^1(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ en funciones medibles de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que para toda $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $\lambda > 0$ vale:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq C \frac{\|f\|_{H^1}}{\lambda}$$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}|^{1/p_1} \leq C \frac{\|f\|_{p_1}}{\lambda}$$

- Sean $1 < q < p < p_1 < \infty$ y consideremos la descomposición de Calderón-Zygmund en L^q de $|f|$ (ver el ejercicio 2 de la práctica anterior). Notar que si $\Omega = \cup Q_j$, entonces $\Omega \subseteq \{(M(|f|^q))^{\frac{1}{q}} > \lambda\}$ y $|f| \leq \lambda$ en casi todo punto de Ω^c .
- Probar que $g \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\|g\|_\infty \leq 2^{\frac{n}{q}} \lambda$$

$$\|g\|_{p_1}^{p_1} \leq \int_{|f| \leq \lambda} |f(x)|^{p_1} dx + 2^{\frac{np_1}{q}} \lambda^{p_1} |\Omega| < \infty.$$

- Probar que para $c = c(n, q)$ adecuada, $c\lambda^{-1}|Q_j|^{-1}b_j$ es un $(1, q)$ -átomo. Deducir que $b \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y que satisface

$$\|b\|_{H^1} \leq C\lambda \sum_j |Q_j| \leq c\lambda|\Omega| < \infty$$

- Probar que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\leq p\gamma^p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{Tg > \frac{1}{2}\gamma\lambda\}| d\lambda \\ &\quad + p\gamma^p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{Tb > \frac{1}{2}\gamma\lambda\}| d\lambda \end{aligned}$$

y deducir que para cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < p_1 < \infty$), $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$

- Probar que si $p_1 = \infty$, $|Tg| \leq C2^{\frac{n}{q}}\lambda$, y deducir que el resultado anterior también vale eligiendo γ adecuadamente para que la integral que involucra a g sea nula.

Ejercicio 6. Probar que $f \in BMO \Rightarrow |f| \in BMO$, pero la recíproca no es cierta.

Ejercicio 7. Probar que $\log|x| \in BMO(\mathbb{R})$ pero $|\log|x||^p \notin BMO(\mathbb{R})$ si $1 < p < \infty$.

Ejercicio 8. Probar que para $1 < p < \infty$ existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|^p \right)^{1/p} \leq \|f\|_* \leq C_2 \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|^p \right)^{1/p}$$

Ejercicio 9. Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y existen constantes positivas m, b tales que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y para todo $0 < p < \infty$ vale

$$\alpha |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}|^{\frac{1}{p}} \leq bp^m |Q|$$

entonces f cumple

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}| \leq |Q|e^{-c\alpha^{1/m}}$$

con $c = (2b)^{1/m} \log 2$. (Sugerencia: usar $p = (\alpha/2b)^{1/m}$).