Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2014
Práctica 9: Álgebra homológica

1. Ver si las sucesiones de A-módulos dadas son complejos y, en caso afirmativo, calcular su homología.

(a) $A=\mathbb{Z}$, $C_i=0$ para los $i<0$, $C_i=\mathbb{Z}_8$ para los $i\geq 0$, $d_i : C_i \to C_{i-1}$ dados por $d_i(x)=2x$.

(b) Igual que el inciso anterior, pero con $d_i(x)=4x$.

(c) $A=\mathbb{R}$,

$$C: \quad \cdots \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \cdots,$$

$d_n : C_n \to C_{n-1}$ dados por $d_{2i}(p)=p(0)$ y $d_{2i+1}(p)=Xp$.

(d) $A=\mathbb{Z}$,

$$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \cdots,$$

$d_n : C_n \to C_{n-1}$ dados por

$$d_{2i}((a_1,a_2,a_3,\dots))=(0,a_2,a_3,\dots) \quad \text{y} \quad d_{2i}((a_1,a_2,a_3,\dots))=(5a_1,0,0,\dots).$$

(e) $A=\mathbb{Z}$,

$$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \to \cdots$$

(f) $A=\mathbb{Z}$,

$$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \cdots$$

con $d_{2i}(x)=nx, d_{2i-1}(x)=0$.

2. Ver si son morfismos de complejos.

(a) $C=C'$ el primer complejo del ejercicio **1**, $\{f_i\}$ dada por $f_{2i}(x)=2x$, $f_{2i+1}(x)=4x$.

(b) Los mismos complejos, pero con $f_{2i}(x)=x$, $f_{2i+1}(x)=3x$.

3. Dados dos complejos de A-módulos $C=(C_i,d_i)$ y $C'=(C'_i,d'_i)$, probar que $C\oplus C'=(C_i\oplus C'_i, d_i\oplus d'_i)$ es un complejo, y que $H_*(C\oplus C')=H_*(C)\oplus H_*(C')$.

4. *Homología de un grafo*. Sea Γ un grafo orientado finito con vértices $V=\{v_0,\dots,v_m\}$ y aristas $X=\{a_0,\dots,a_n\}$. Dado un anillo A, se considera el siguiente complejo C. C_0 es el A-módulo libre con base V, C_1 es el A-módulo libre con base X, $C_k=0$ para $k\neq 0,1$, d_1 definido en la base por $d_1(a_s)=a_s^f-a_s^i$, donde a_s^i y a_s^f denotan respectivamente el vértice inicial y final de la arista a_s.

Probar que si Γ es conexo, la homología del complejo C es 0 salvo $H_0(C)$ y $H_1(C)$ que son A-módulos libres de dimensiones 1 y $1-m+n$ respectivamente.

5. Se dice que un complejo de A-módulos C *se parte* si existe una familia de morfismos $s_n : C_n \to C_{n+1}$ tales que $d=dsd$.

(a) Sea C el siguiente complejo de $\mathbb{Z}_4$-módulos

$$\cdots \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \cdots,$$

donde los morfismos son todos la multiplicación por 2. Probar que el complejo es acíclico pero no se parte.

(*b*) Probar que todo complejo acíclico de A-módulos libres acotado inferiormente se parte.

(*c*) Probar que todo complejo acíclico de $\mathbb{Z}$-módulos libres de tipo finito se parte.

(Un complejo C se dice *acotado inferiormente* si $\exists\, n_0 : C_n = 0\ \forall\, n \leq n_0$.)

6. Un complejo se dice *contráctil* si el morfismo identidad es homotópico al morfismo nulo. Probar que un complejo C es contráctil sii es acíclico y se parte.

7. Dado un morfismo de complejos $f : C \to C'$, se define el *cono* de f de la siguiente manera. $M_n = C_{n-1} \oplus C'_n$, $\delta_n : C_{n-1} \oplus C'_n \to C_{n-2} \oplus C'_{n-1}$, $\delta_n(c, c') = (-d_{n-1}(c), d'_n(c') - f_{n-1}(c))$.

Probar lo siguiente.

(*a*) $M(f) = (M_n, \delta_n)$ es un complejo para todo morfismo f.

(*b*) $M(1)$ es acíclico y se parte, donde 1 es la identidad de un complejo C. Sugerencia: tomar $s_n(c, c') = (-c', 0)$.

8. Sea $f : C \to C'$ un morfismo de complejos. Probar que $f \simeq 0$ sii f se extiende a un morfismo $(-s, f) : M(1_C) \to C'$, donde 1_C es la identidad del complejo C.

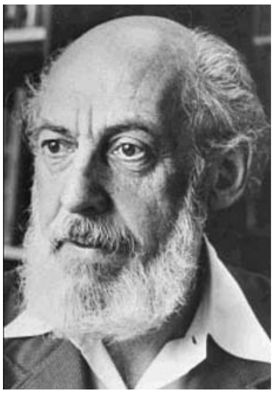
9. Dado un morfismo de complejos $f : C \to C'$, se define el *cilindro* de f de la siguiente manera. $T_n = C_n \oplus C_{n-1} \oplus C'_n$,

$$\delta : C_n \oplus C_{n-1} \oplus C'_n \to C_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus C'_{n-1}, \quad \delta_n(x, y, z) = (d(x) + y, -d(y), d'_n(z) - f(y)).$$

Probar lo siguiente.

(*a*) $T(f) = (T_n, \delta_n)$ es un complejo para todo morfismo f.

(*b*) Dados dos morfismos $f, g : C \to C'$, $f \simeq g$ sii se extienden a un morfismo $(f, s, g) : T(1) \to C'$, donde 1 es la identidad de C.



Samuel Eilemberg
1913–1998, Polonia.

La topología fue su principal interés: trabajó en el tratamiento axiomático de la teoría de la homología con Norman Steenrod, y en el álgebra homológica con Saunders MacLane, escribió un libro sobre el tema anterior con Henri Cartan que llegó a ser un clásico, y tomó parte en los encuentros del grupo Bourbaki.