Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2014

Práctica 8: Teoremas clásicos de estructura

Dominios de ideales principales

1.1. Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ no son dominios de factorización única. Encontrar ideales no principales en estos anillos.

1.2. (a) Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es euclideano si $d \in \{-2, 2, 3\}$.

(b) Factorizar a $16 + 11\sqrt{2}$ como producto de elementos irreducibles del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

(c) Un número primo $p \in \mathbb{Z}$ es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ sii -2 es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$. Dé ejemplos de factorizaciones en $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ de números primos de $\mathbb{Z}$.

1.3. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo, $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo correspondiente y sea $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ la localización de $\mathbb{Z}$ en $\mathfrak{p}$. Describir todos sus ideales. Mostrar que $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ es un dominio de ideales principales con un único ideal maximal y encontrar un conjunto completo de elementos primos no asociados dos a dos.

1.4. Sea A un dominio de ideales principales y sea M un A-módulo finitamente generado. Mostrar que

(a) M es de torsión sii $\mathsf{hom}_A(M, A) = 0$; y

(b) M es indescomponible sii o bien $M \cong A$ o bien existe $p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tal es que $M \cong A/(p^n)$.

¿Qué puede decir cuando M no es finitamente generado?

1.5. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Encuentre todos los grupos abelianos de orden p^2, p^3, p^4 y p^5.

1.6. Sea G un grupo abeliano finito y sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo tal que $p \mid |G|$. Entonces el número de elementos de orden p de G es coprimo con p.

1.7. (a) Para los siguientes grupos abelianos, dar la factorización del teorema de estructura:

1. $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_6 + \mathbb{Z}_9$;
2. $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_8 + \mathbb{Z}_{14}$;
3. $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{49} + \mathbb{Z}$;
4. $\mathbb{Z}_{12} + \mathbb{Z}_{21} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_{20} + \mathbb{Z}_9 + \mathbb{Z}_7$.

(b) Determinar la factorización canónica de un grupo abeliano G de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

(c) Determinar la factorización canónica de un grupo abeliano G de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

1.8. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones.

1. $G = \langle a, b, c \rangle$; $2a + 3b = 0$, $2a + 4c = 0$.
2. $G = \langle a, b, c \rangle$; $a = 3b$, $a = 3c$.
3. $G = \langle a, b, c \rangle$; $3a = -c$, $3a = 3c - 8b$.

4. $G = \langle a, b, c \rangle$; $3a = b$, $b = 3c$.

1.9. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes.

1. $\mathbb{Z}^4/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.
2. $\mathbb{Z}^3/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_1$ es par, $x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\}$.
3. $\mathbb{Z}^3/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_1 = x_2 + x_3$ es par, $3 \mid x_3\}$.

1.10. Sean p, q, r primos distintos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n en cada caso.

1. $n = p^6 q^3 r$.
2. $n = p^2 q^4 r^5$.
3. $n = p^3 q^4$.

1.11. Sea $G \subset \mathbb{Z}^n$ un subgrupo.

(*a*) $[\mathbb{Z}^n : G]$ es finito sii G tiene rango n.

(*b*) Si G tiene rango n y $\{g_1, \dots, d_n\}$ es una base de G, sea $M \in \mathsf{M}_n(\mathbb{Z})$ la matriz que tiene a los g_i como columnas. Mostrar que $[\mathbb{Z}^n : G] = |\det M|$.

Módulos y anillos semisimples

2.1. Sea A un anillo y sea M un A-módulo simple. Entonces o bien M, considerado como grupo abeliano, es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$, o bien existe $p \in \mathbb{N}$ primo tal que M es, considerado como grupo abeliano, isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Z}_p$.

2.2. Sea A un anillo conmutativo y M y N dos A-módulos. Si alguno de M o N es semisimple, $M \otimes_A N$ es semisimple.

2.3. (*a*) Si A es un anillo semisimple y $B \subset A$ es un subanillo, ¿es B necesariamente semisimple?

(*b*) Si A es un anillo semisimple e $I \triangleleft A$ es un ideal bilátero, entonces A/I es semisimple.

2.4. *Anillos de matrices.*

(*a*) Sean A y B anillos y n, $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathsf{M}_m(\mathsf{M}_n(A)) \cong \mathsf{M}_{mn}(A)$ y $\mathsf{M}_n(A \times B) \cong \mathsf{M}_n(A) \times \mathsf{M}_n(B)$.

(*b*) Si A es un anillo semisimple y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathsf{M}_n(A)$ es semisimple.

(*c*) Sea A un anillo y sea $n \in \mathbb{N}$. Sea P el conjunto de vectores *fila* de n componentes en A y sea Q el conjunto de vectores *columna* de n componentes en A. Entonces P es un A-$\mathsf{M}_n(A)$-bimódulo y Q es un $\mathsf{M}_n(A)$-A-bimódulo con acciones de $\mathsf{M}_n(A)$ inducidas por el producto matricial. Más aún, hay un isomorfismo $Q \otimes_A P \cong \mathsf{M}_n(A)$ de $\mathsf{M}_n(A)$-bimódulos y un isomorfismo $P \otimes_{\mathsf{M}_n(A)} Q \cong A$ de A-bimódulos.

Como consecuencia de esto, si M es un A-módulo izquierdo, entonces

$$P \otimes_{\mathsf{M}_n(A)} (Q \otimes_A M) \cong M.$$

(*d*) Si M es un A-B-bimódulo y N es un B-módulo izquierdo proyectivo, entonces $M \otimes_B N$ es un A-módulo proyectivo.

(*e*) Sea A un anillo. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathsf{M}_n(A)$ es semisimple, entonces el anillo A mismo es semisimple.

2.5. Sea A un anillo, M un A-módulo finitamente generado. Si $B = \mathsf{End}_A(M)$ y A es semisimple, entonces B es semisimple. Notemos que esto tiene como caso particular a la segunda parte del ejercicio **2.4**, ya que si $M = A^n$, entonces $\mathsf{End}_n(M) \cong \mathsf{M}_n(A)$.

2.6. (a) Un anillo artiniano a izquierda sin divisores de cero es un anillo de división.

(b) Si A es un anillo sin divisores de cero tal que $\mathsf{M}_n(A)$ es semisimple para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces A es un anillo de división.

Álgebras de grupo

3.1. Muestre que si $k \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces $kS_3 \cong k \times k \times \mathsf{M}_2(k)$.

3.2. Encuentre la descomposición de Wedderburn para kD_4 con $k \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ si $D_4 = \langle s, t : s^2 = t^4 = 1, sts = t^{-1}\rangle$.

3.3. Sea $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo de los cuaterniones unitarios. Muestre que

$$\mathbb{Q}Q \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{H}_{\mathbb{Q}},$$
$$\mathbb{R}Q \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}_{\mathbb{R}},$$

y

$$\mathbb{C}Q \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathsf{M}_2(\mathbb{C}).$$

Aquí $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ es el anillo de los cuaterniones reales y $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ es el análogo definido sobre $\mathbb{Q}$.

Álgebras de grupos cíclicos

Si $n \in \mathbb{N}$, sea G_n un grupo cíclico de orden n y sea $g_n \in G_n$ un generador.

[1] **4.1.** Sea k un cuerpo de característica cero. Si $kG_n \cong \mathsf{M}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathsf{M}_{n_r}(D_r)$ es la factorización de kG_n como k-álgebra dada por el teorema de Wedderburn, de manera que es $r \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ y $D_1, \ldots, D_r$ son k-álgebras de división, entonces $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$ y D_i es un cuerpo para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$.

En particular, hay exactamente r isoclases de kG_n-módulos simples y si $S_1, \ldots, S_n$ son representantes de estas clases, hay un isomorfismo de kG_n-módulos $kG_n \cong \bigoplus_{i=1}^r S_i$.

[1] **4.2.** Sea k un cuerpo de característica cero. Sea M un kG_n-módulo simple y sea $a : m \in M \mapsto g_n m \in M$ la multiplicación por g_n. Entonces $a \in \mathsf{End}_{kG_n}(M)$ porque kG_n es un anillo conmutativo. Sea $\mu \in k[X]$ el polinomio minimal de a sobre k. Muestre que μ es irreducible en $k[X]$. Además, si $k = \mathbb{Q}$, entonces μ tiene coeficientes enteros.

4.3. *Álgebras de grupos cíclicos sobre* $\mathbb{C}$. Sea $\Omega_n \subset \mathbb{C}^\times$ el subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^\times$ de las raíces n-ésimas de la unidad.

[1] (a) La aplicación $\phi : \chi \in \hom_{\mathrm{Grp}}(G_n, \Omega_n) \mapsto \chi(g_1) \in \Omega_n$ es un isomorfismo de grupos abelianos. Esto implica que el conjunto $\hat{G}_n = \hom_{\mathrm{Grp}}(G_n, \Omega_n)$ tiene exactamente n elementos; llamemoslos $\chi_1, \ldots, \chi_n$.

[1] (b) Muestre que si $\chi, \rho \in \hat{G}_n$, entonces

$$\sum_{g \in G_n} \chi(g)\rho(g^{-1}) = \delta_{\chi,\rho}.$$

Sugerencia. Multiplique el miembro izquierdo de esta igualdad por $\big(1 - \chi(g_1)\rho(g_1^{-1})\big)$.

[1] (*c*) Si $\chi \in \hat{G}_n$, sea $e_\chi = \frac{1}{n}\sum_{g\in G_n}\chi(g^{-1})g \in \mathbb{C}G_n$. Entonces si $\chi, \rho \in \hat{G}_n$,

$$\begin{aligned} e_\chi^2 &= e_\chi, \\ e_\chi e_\rho &= 1, \qquad \text{cuando } \chi \neq \rho, \end{aligned}$$

y

$$\sum_{\chi\in\hat{G}_n} e_\chi = 1.$$

[1] (*d*) Consideremos el anillo $A = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ con n factores y sean $x_1, \ldots, x_n \in A$ los elementos de la base canónica. Hay un isomorfismo de anillos $\phi : \mathbb{C}G_n \to A$ tal que $\phi(e_{\chi_i}) = x_i$ si $1 \leq i \leq n$. Describa representantes para cada isoclase de $\mathbb{C}G_n$-módulos simples.

Abraham Adrian Albert
1905–1972, Estados Unidos.

Albert fue uno de los pioneros en el estudio de la estructura de las álgebras de división. Su libro *Structure of Algebras* es un clásico.