# Álgebra II

## Primer Cuatrimestre — 2014

## Práctica 7: Módulos II

## Módulos libres, proyectivos e inyectivos

**1.1.** $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

**1.2.** Muestre que el grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es libre.

*Sugerencia.* Sea $M \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ el subgrupo de todos los elementos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\{i \in \mathbb{N} : 2^n \nmid x_i\}| < \infty$. Entonces si $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es libre, $M$ es libre de rango no numerable. Analice ahora el grupo abeliano $M/2M$.

**1.3.** *Bases duales.* Sea $A$ un anillo y $P$ un $A$-módulo a izquierda. Una *base dual* para $P$ es un par $((x_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I})$ tal que $x_i \in P$ para todo $i \in I$, $f_i \in \hom_A(P, A)$ para todo $i \in I$ y se tiene que

(i) para todo $x \in P$, $|\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}| < \infty$, y

(ii) para todo $x \in P$, es $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$.

Nótese que en la segunda condición la suma tiene sentido por la primera condición.

($a$) Muestre que un $A$-módulo $P$ es proyectivo sii posee una base dual.

($b$) Muestre que un $A$ módulo $P$ es proyectivo y finitamente generado sii posee una base dual finita.

**1.4.** Sea $A$ un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea $M$ un $A$-módulo a izquierda.

($a$) Si $M$ es libre, entonces $M_S$ es libre como $A_S$-módulo.

($b$) Si $M$ es proyectivo, entonces $M_S$ es proyectivo como $A_S$-módulo.

($c$) Si $M$ es finitamente generado, entonces $M_S$ es finitamente generado como $A_S$-módulo.

**1.5.** *Resoluciones proyectivas.* Sea $A$ un anillo.

($a$) Para cada $A$-módulo $M$ existe un diagrama

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de $A$-módulos y homomorfismos de $A$-módulos que es exacto y en el que cada $P_p$, $p \geq 0$, es proyectivo. Llamamos a este diagrama una *resolución proyectiva* de $M$.

($b$) De hecho, los $A$-módulos $P_p$, $p \geq 0$, pueden elegirse libres.

($c$) Si $A$ es noetheriano a izquierda y $M$ es finitamente generado, entonces los $A$-módulos $P_p$, $p \geq 0$, pueden elegirse finitamente generados.

($d$) Si $f : M \to N$ es un morfismo de $A$-módulos y

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \longrightarrow Q_p \longrightarrow Q_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de $M$ y $N$, respectivamente, entonces existen morfismos $f_p : P_p \to Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r] \arrow[d, "f_p"] & P_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_p \arrow[r] & Q_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

($e$) Encuentre resoluciones proyectivas para
  (i) un $A$-módulo proyectivo;
  (ii) el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;
  (iii) el $k[X]$-módulo $S = k[X]/(X)$.

**1.6.** Para cada $A$-módulo a izquierda $M$, sea $M^* = \mathrm{hom}_A(M,A)$ con su estructura de $A$-módulo a derecha obtenida de la estructura de $A$-bimódulo de $A$. Muestre que $M$ es un proyectivo finitamente generado sii $M^*$ lo es.

**1.7.** $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

**1.8.** Si $A$ es un dominio de integridad y $K$ es su cuerpo de fracciones, entonces $K$ es un $A$-módulo inyectivo.

**1.9.** Sea $G$ un grupo finito y $k$ un cuerpo tal que $|G|$ es inversible en $k$. Mustrar que todo $k[Q]$-módulo es proyectivo e inyectivo. ¿Todo $k[G]$-módulo es necesariamente libre?

**1.10.** Si $A$ un un anillo de división, todo $A$-modulo es inyectivo y proyectivo.

# Productos tensoriales

**2.1.** Muestre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

**2.2.** Sea $A$ un anillo y $M_A$ y ${}_AM$ $A$-módulos. Muestre que $M \otimes_A N$ es un $\mathrm{End}_A(M)$-$\mathrm{End}_A(N)$-bimódulo.

**2.3.** Sean $A$ y $B$ anillos y $M_A$, ${}_AN_B$ y ${}_BP$ módulos. Muestre que hay un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

**2.4.** Sea $A$ un anillo conmutativo, $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal y $M$ un $A$-módulo. Muestre que hay un isomorfismo natural $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

**2.5.** Sea $A$ un anillo, $M_A$ y ${}_AN$ módulos y supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$ es suma de una familia de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Si $M_i \otimes_A N = 0$ ara todo $i \in I$, entonces $M \otimes_A N = 0$.

**2.6.** Sea $A$ un anillo y $M$ un $A$-módulo playo. Si $N \subset M$ es un sumando directo, entonces $N$ es playo.

**2.7.** Si $A$ es un anillo conmutativo y $M$, $N$ son $A$-módulos playos, entonces $M \otimes_A N$ es un $A$-módulo playo.

**2.8.** Sea $A$ un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

($a$) Si $M$ es un $A$-módulo izquierdo, entonces hay un isomorfismo $A_S \otimes_A M \cong M_S$.
($b$) El $A$-módulo derecho $A_S$ es playo.

†**2.9.** Sea $A$ un anillo y $M$ un $A$-módulo izquierdo. Entonces $M$ es playo sii para todo ideal $\mathfrak{a} \subset A$ finitamente generado, la aplicación

$$a \otimes m \in \mathfrak{a} \otimes_A M \mapsto am \in \mathfrak{a}M$$

es un isomorfismo.

**2.10.** Sea $A$ un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo $A$-módulo a izquierda es playo.
(ii) Todo $A$-módulo a derecha es playo.
(iii) Para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a = axa$.
(iv) Todo ideal izquierdo principal está generado por un idempotente.
(v) Todo ideal derecho principal está generado por un idempotente.

**2.11.** *Criterio local de platitud.* Sea $A$ un anillo conmutativo y $M$ un $A$-modulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $M$ es playo;
(ii) para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $M_\mathfrak{p}$ es un $A_\mathfrak{p}$-módulo playo;
(iii) para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, $M_\mathfrak{m}$ es un $A_\mathfrak{m}$-módulo playo.

**2.12.** Un anillo conmutativo $A$ es *absolutamente playo* si todos sus módulos son playos.

($a$) Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   1. $A$ es absolutamente playo.
   2. Todo ideal principal de $A$ es idempotente.
   3. Todo ideal finitamente generado de $A$ es un sumando directo de $A$.

($b$) Muestre que un anillo booleano es absolutamente playo.

($c$) Si $A$ es un anillo conmutativo absolutamente playo y $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado, entonces $A_S$ es absolutamente playo.

**2.13.** *Producto tensorial de álgebras.* Sea $k$ un cuerpo y sean $A$ y $B$ $k$-álgebras. Muestre que $A \otimes_k B$ es un álgebra de forma tal que el producto está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b = (aa') \otimes (bb').$$

**2.14.** Sea $k$ un cuerpo, $A$ una $k$-álgebra y $n$, $m \in \mathbb{N}$. Muestre que hay isomorfismos naturales de álgebras

$$A[X] \cong k[X] \otimes_k A,$$
$$\mathsf{M}_n(A) \cong \mathsf{M}_n(k) \otimes_k A,$$

y

$$\mathsf{M}_{nm}(A) \cong \mathsf{M}_n(A) \otimes_k \mathsf{M}_m(A).$$

## Productos de torsión

**3.1.** Sean $M$ y $N$ grupos abelianos. Consideremos el conjunto

$$G(M, N) = \{(m, k, n) \in M \times \mathbb{Z} \times N : km = 0, kn = 0\},$$

sea $L(M,N)$ el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por $G(M,N)$ y sea $R(M,N)$ el subgrupo de $L(M,N)$ generado por los elementos

$$\begin{array}{ll} (m+m',k,n)-(m,k,n)-(m',k,n), & \text{si } km=km'=0 \text{ y } km=0; \\ (m,k,n+n')-(m,k,n)-(m,k,n'), & \text{si } km=0 \text{ y } kn=kn'=0; \\ (m,kk',n)-(mk,k',n), & \text{si } kk'm=0 \text{ y } k'n=0; \\ (m,kk',n)-(m,k,k'n), & \text{si } km=0 \text{ y } kk'n=0. \end{array}$$

Definimos $M\odot N=L(M,N)/G(M,N)$.

($a$) Si $M$ ó $N$ no posee elementos de orden finito, $M\odot N=0$

($b$) Hay un isomorfismo $M\odot N\cong N\odot M$.

($c$) Dados $f:M\to M'$ y $g:N\to N'$ son morfismos de grupos abelianos, es posible construir un morfismo de grupos abelianos $f\odot g:M\odot N\to M'\odot N'$ de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

(i) Si $f:M\to M'$, $f':M'\to M''$, $g:N\to N'$ y $g:N'\to N''$ son morfismos de grupos abelianos, entonces

$$(f'\odot g')\circ(f\odot g)=(f'\circ f)\odot(g'\odot g).$$

(ii) Si $f,f':M\to M'$ y $g$, $g':N\to N'$ son morfismos de grupos abelianos, entonces

$$(f+f')\odot g=f\odot g+f'\odot g$$

y

$$f\odot(g+g')=f\odot g+f\odot g'.$$

(iii) Si $M$ y $N$ son grupos abelianos, es $\mathsf{id}_M\odot\mathsf{id}_N=\mathsf{id}_{M\odot N}$.

($d$) Si $f:M\to M'$ y $g:N\to N'$ son isomorfismos, entonces el morfismo $f\odot g:M\odot N\to M'\odot N'$ es un isomorfismo.

($e$) Si $M$, $M'$, $N$ y $N'$ son grupos abelianos, entonces hay isomorfismos naturales

$$(M\oplus M')\odot N\cong(M\odot N)\oplus(M'\odot N)$$

y

$$M\odot(N\oplus N')\cong(M\odot N)\oplus M\odot(M\odot N').$$

($f$) Sea

$$0\longrightarrow M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de grupos abelianos y sea $N$ un grupo abeliano. Entonces hay una sucesión exacta

$$0\longrightarrow M'\odot N\xrightarrow{f\odot\mathsf{id}_N}M\odot N\xrightarrow{g\odot\mathsf{id}_N}M''\odot N\xrightarrow{\partial}$$
$$\longrightarrow M'\otimes N\xrightarrow{f\otimes\mathsf{id}_N}M\otimes N\xrightarrow{g\otimes\mathsf{id}_N}M''\otimes N\longrightarrow 0$$

para un cierto morfismo $\partial:M''\odot N\to M'\otimes N$.

($g$) Si $M$ es un grupo abeliano y $n\in\mathbb{N}$, calcule $M\odot\mathbb{Z}_n$.

($h$) Si $M$ es un grupo abeliano, sea $T(M) \subset M$ el subgrupo de los elementos de torsión. Muestre que hay un isomorfismo $M \odot \mathbb{Q}/ZZ \cong T(M)$.

($i$) Sea $p$ un número primo y $S = \{p^i : i \in \mathbb{N}_0\}$. Se trata de un conjunto multiplicativamente cerrado en $\mathbb{Z}$, así que podemos considerar la localización $\mathbb{Z}_S$. Si $M$ es un grupo abeliano, describa el grupo $M \odot \mathbb{Z}_S$.

($j$) Sean $M$ y $N$ grupos abelianos tales que si $m \in M$ tiene orden finito $k$ y $n \in N$ tiene orden finito $l$, entonces $(k,l) = 1$. Muestre que $M \odot N = 0$.

($k$) Muestre que si $M$ y $N$ son grupos abelianos finitos, entonces $M \otimes N \cong M \odot N$.

## Condiciones de cadena

**4.1.** *Anillos de matrices.* Sea $n \in \mathbb{N}$.

($a$) Un anillo $A$ es noetheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda.

($b$) Un anillo $A$ es noetheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda.

**4.2.** Un dominio integro artiniano es un cuerpo.

**4.3.** ($a$) Un grupo abeliano artiniano es de torsión.

($b$) Un grupo abeliano es artiniano y noetheriano sii es finito.

**4.4.** *Extensiones finitas de anillos.* Sea $B$ un subanillo de un anillo $A$ tal que $A$ es finitamente generado como $B$-módulo a izquierda. Si $B$ es noetheriano a izquierda, entonces $A$ es noetheriano a izquierda.

**4.5.** *Algebras de matrices.* Sean $A$ y $B$ anillos y $M$ y $N$ un $A$-$B$-bimódulo y un $B$-$A$-bimódulo, respectivamente. Sea

$$T = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$$

el álgebra de matrices. Entonces $T$ es noetheriana a derecha sii $A$ y $B$ son anillos noetherianos a derecha y $M$ es un $B$-módulo noetheriano y $N$ es un $A$-módulo noetheriano.

**4.6.** *Polinomios de Laurent.* Sea $k$ un cuerpo y sea $A = k[X, X^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en $k$. Muestre que $A$ es noetheriano.

*Sugerencia.* Imite la demostración del teorema de Hilbert para $k[X]$.

**4.7.** *Extensiones de Ore.* Sea $A$ un anillo y sea $\sigma : A \to A$ un homomorfismo de anillos.

($a$) Muestre que existe exactamente una estructura de anillo sobre el grupo abeliano $B = A[X]$ de polinomios con coeficientes a izquierda en $A$ en una variable $X$ tal que

$$Xa = \sigma(a)X, \qquad \forall a \in A.$$

Escribimos $A[X;\sigma]$ al anillo correspondiente.

($b$) Si $\sigma$ es inyectivo y $A$ es un dominio, entonces $A[X;\sigma]$ es un dominio.

($c$) Si $\sigma$ es inyectivo y $A$ es un anillo de división, entonces $A[X;\sigma]$ es un dominio de ideales principales.

($d$) Si $\sigma$ es automorfismo y $A$ es noetheriano a izquierda (derecha), entonces $A[X;\sigma]$ es noetheriano a izquierda (derecha).

**4.8.** *Extensiones de Ore, II.* Sea $A$ un anillo y sea $\sigma : A \to A$ un homomorfismo de anillos. Una *$\sigma$-derivación* de $A$ es un homomorfismo de grupos $\delta : A \to A$ que satisface

$$\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b), \qquad \forall a,\, b \in A.$$

Si $\sigma = \mathrm{id}_A$, decimos simplemente que $\delta$ es una *derivación* de $A$.

($a$) Muestre que existe exactamente una estructura de anillo sobre el grupo abeliano $B = A[X]$ de polinomios con coeficientes a izquierda en $A$ en una variable $X$ tal que

$$Xa = \sigma(a)X + \delta(a), \qquad \forall a \in A.$$

Escribimos $A[X; \sigma, \delta]$ al anillo correspondiente.

($b$) Si $\sigma$ es inyectivo y $A$ es un dominio, entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es un dominio.

($c$) Si $\sigma$ es inyectivo y $A$ es un anillo de división, entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es un dominio de ideales principales.

($d$) Si $\sigma$ es automorfismo y $A$ es noetheriano a izquierda (derecha), entonces $A[X; \sigma, \delta]$ es noetheriano a izquierda (derecha).

**4.9.** Sea $A = k[X]$, $\sigma = \mathrm{id}_A : A \to A$ y $\delta = \frac{\partial}{\partial X} : A \to A$.

($a$) Muestre que $\delta$ es una derivación de $A$.

($b$) Muestre que el álgebra de Weyl $A_1$ es isomorfa a $A[X; \sigma, \delta]$. En particular, concluya que $A_1$ es noetheriana.

Reinhold Baer
1902–1979, Alemania y Suiza

Los trabajos más importantes de Baer fueron en teoría de grupos. En 1940 introdujo el concepto de módulo inyectivo.