ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2014

Práctica 6: Módulos

Módulos y morfismos

1.1. Sea A un anillo, $n \geq 1$ y $M \in M_{m,n}(A)$. Muestre que la multiplicación matricial da un morfismo de A-módulos

$$f : x \in A^n \mapsto Mx \in A^m.$$

1.2. Sea A un anillo.

(a) Sea M un A-módulo a izquierda. Si definimos un producto $M \times A^{\mathrm{op}} \to M$ poniendo $m \cdot a = am$, podemos dotar a M de una estructura de A^{op}-módulo a derecha. Lo notamos M^{op}.

(b) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos a izquierda, entonces $f : M^{\mathrm{op}} \to N^{\mathrm{op}}$ es un morfismo de A^{op}-módulos a derecha.

(c) Recíprocamente, todo A^{op}-módulo a derecha es de la forma M^{op} para algún A-módulo a izquierda M y todo morfismo de A^{op}-módulos está inducido como en la parte anterior.

1.3. Sean N y M dos $\mathbb{Q}$-módulos. Muestre que una función $f : N \to M$ es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos sii es un morfismo de grupos abelianos.

1.4. Sea A un anillo y N, M dos A-módulos.

(a) Muestre que $\mathsf{hom}_A(M,N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m), \qquad \forall f,\, g \in \mathsf{hom}_A(M,N),\ \forall m \in M.$$

(b) Sea $\mathsf{Z}(A)$ el centro de A. Definimos una operación

$$\mathsf{Z}(A) \times \mathsf{hom}_A(M,N) \to \mathsf{hom}_A(M,N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \qquad \forall f \in \mathsf{hom}_A(M,N),\ \forall a \in \mathsf{Z}(A),\ \forall m \in M.$$

Muestre que esto hace de $\mathsf{hom}_A(M,N)$ un $\mathsf{Z}(A)$-módulo.

(c) Muestre que para todo A-módulo M existe un isomorfismo de $\mathsf{Z}(A)$-módulos $\mathsf{hom}_A(A,M) \to M$.

1.5. (a) Sean A, B y C anillos y sean M un (A,B)-bimódulo y N un (A,C)-bimódulo. Muestre que el grupo abeliano $\mathsf{hom}_A(M,N)$ posee una única estructura de (B,C)-bimódulo tal que

$$(b \cdot f \cdot c)(m) = f(mb)c, \qquad \forall b \in B,\ \forall c \in C,\ \forall m \in M.$$

(b) Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Considerando a A como (A,A)-bimódulo, muestre que hay un isomorfismo de A-módulos a izquierda $\mathsf{hom}_A(A,M) \cong M$.

1.6. *Cambios de anillo.* Sea $\phi : A \to B$ un morfismo de anillos.

(a) Muestre que si definimos un porducto $A \times B \to B$ poniendo

$$a \cdot b = \phi(a)b$$

dotamos a B de una estructura de A-módulo a izquierda sobre B. De forma similar podemos obtener una estructura de A-módulo a derecha y de A-bimódulo sobre B.

(b) Sea M un B-módulo a izquierda. Muestre que el producto $A \times M \to M$ dado por $a \cdot m = \phi(a)m$ hace de M un A-módulo a izquierda. Lo notamos $\phi^*(M)$.

(c) Si $f : M \to N$ es un morfismo de B-módulos a izquierda, entonces $f : \phi^*(M) \to \phi^*(N)$ es un morfismo de A-módulos a izquieda. Lo notamos $\phi^*(f)$.

(d) Si M y N son B-módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f \in \mathsf{hom}_B(M,N) \mapsto \phi^*(f) \in \mathsf{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

(e) Si M, N y P son B-módulos a izquierda y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son morfismos de B-módulos, entonces

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular, la aplicación $\phi^* : \mathsf{End}_B(M) \to \mathsf{End}_A(\phi^*(M))$ es un morfismo de anillos.

(f) De condiciones sobre ϕ que impliquen que la aplicación

$$\phi^* : \mathsf{hom}_B(M,N) \to \mathsf{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

sea inyectiva (sobreyectiva) cualesquiera sean los B-módulos M y N.

1.7. Sea A un anillo, M un A-módulo a izquierda y sea $B = \mathsf{End}_A(M)$ el anillo de endomorfismos de M.

(a) Muestre que M es un B-módulo a derecha de manera natural y que con esa estructura resulta de hecho un (A,B)-bimódulo.

(b) ¿Qué relación hay entre A y $\mathsf{End}_B(M)$?

1.8. Sea A un anillo.

(a) Sea $f : M \to M'$ un morfismo de A-módulos a izquierda. Para cada A-módulo a izquierda definimos un aplicaciones

$$f_P^* : h \in \mathsf{hom}_A(M',P) \mapsto h \circ f \in \mathsf{hom}_A(M,P)$$

y

$$f_*^P : h \in \mathsf{hom}_A(P,M) \mapsto f \circ h \in \mathsf{hom}_A(P,M').$$

Se trata de morfismos de grupos abelianos.

(b) Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ morfismos de A-módulos. Entonces para cada A-módulo a izquierda P vale que

$$f_P^* \circ g_P^* = (g \circ f)_P^*$$

y

$$g_*^P \circ f_*^P = (g \circ f)_*^P.$$

(*c*) Una sucesión de A-módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta sii la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo A-módulo a izquierda N. ¿Hay un enunciado similar que involcre a los morfismos f_N^* y g_N^*?

(*d*) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \mathsf{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \mathsf{hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

1.9. Un A-módulo M es simple sii para todo $m \in M \setminus 0$, $Am = M$.

1.10. (*a*) *Lema de Schur.* Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos.

1. Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectva.
2. Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.
3. Si M y M son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(*b*) Si M es un A-módulo simple, $\mathsf{End}_A(M)$ es un anillo de división.

1.11. Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \dots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

(*a*) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si $\det M \neq 0$.

(*b*) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores si $\det M \in A^\times$.

1.12. (*a*) Todo módulo de tipo finito posee un conjunto generador minimal.

(*b*) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto generador minimal de $\mathbb{Z}$ de cardinal n.

1.13. Sea k un cuerpo y V un k-espacio vectorial. Sea $f \in \mathsf{End}_k(V)$. Muestre que existe exactamente una estructura de $k[X]$-módulo a izquierda sobre V para la cual $k \subset k[X]$ actúa por multiplicación escalar y

$$X \cdot v = f(v), \qquad \forall v \in V.$$

1.14. Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda.

(*a*) El conjunto $\mathsf{ann}\, M = \{a \in A : am = 0,\ \forall m \in M\}$ es un ideal a izquierda de A. Si $\mathsf{ann}\, M = 0$, decimos que M es un A-módulo *fiel*.

(*b*) De ejemplos de módulos fieles.

Condiciones de cadena I

2.15. Un A-módulo es finitamente generado si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$-

2.16. Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos a izquierda y M' y M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generados.

2.17. Sea A un anillo, M un A-módulo a izquierda finitamente generado y sea $f : M \to A^n$ un morfismo sobreyectivo de A-módulos. Muestre que $\ker f$ es finitamente generado.

2.18. Muestre que existen módulos finitamente generados y no Noetherianos y módulos tales que todos sus submódulos propios son finitamente generados pero que no son Noetherianos.

2.19. Un k-espacio vectorial V es noetheriano sii $\dim_k V < \infty$.

2.20. Un anillo principal a izquierda es Noetheriano a izquierda.

2.21. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda y $f \in \operatorname{End}_A(M)$. Si $n \in \mathbb{N}_0$, pongamos $K_n = \ker f^n$ y $I_n = \operatorname{im} f^n$. Entonces

(a) $K_1 = K_2 \implies K_1 \cap I_1 = 0$;

(b) $I_1 = I_2 \implies K_1 + I_1 = M$;

(c) si M es Noetheriano, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $K_n \cap I_n = 0$;

(d) si M es Noetheriano y f es sobreyectivo, entonces f es un automorfismo.

2.22. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de d. Muestre que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es noetheriano.

2.23. Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial de dimensión infinita y $A = \operatorname{End}_k(V)$ el anillo de endomorfisos de V. Muestre que existe un A-módulo M no nulo tal que $M \cong M \oplus M$.

Algunos lemas usuales

3.24. (a) Sea

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos izquierdos en el que las filas son exactas. Entonces existe exactamente un morfismo $f'' : M'' \to N''$ que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

(b) Si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

3.25. *Lema de los cinco.* Consideremos un diagrama conmutativo de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

y supongamos que las dos filas son exactas.

(a) Si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

(b) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

(c) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

3.26. *Lema de los nueve.* Consideremos un diagrama de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

en el que las tres columnas y las dos primeras (o las dos últimas) filas son exactas. Entonces la tercera fila también es exacta.

Localización de módulos

4.27. *Localización de módulos.* Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda.

(a) Muestre que existe un A-módulo M_S y un homomorfismo de A-módulos $j_M : M \to M_S$ que satisfacen la siguiente propiedad:

> Para cada homomorfismo $f : M \to N$ con codominio en un A-módulo N para el cual todas las aplicaciones $n \in N \mapsto sn \in N$ con $s \in S$ son isomorfismos, existe un único homomorfismo $\bar{f} : M_S \to N$ tal que $f = \bar{f} \circ j_M$.

(b) El par (M_S, j_M) está determinados a menos de un isomorfismo canónico.

(c) El A-módulo M_S es de forma natural un A_S-módulo.

(d) Si M es un A-módulo tal que para todo $s \in S$ la aplicación $m \in M \mapsto sm \in M$ es biyectiva, entonces $j_M : M \to M_S$ es un isomorfismo.

(e) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-modulos, entonces existe un único morfismo $f_S : M_S \to N_S$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_M"'] & N \arrow[d, "j_N"] \\
M_S \arrow[r, "f_S"] & N_S
\end{tikzcd}$$

Si $S = A \setminus \mathfrak{p}$ para un ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, entonces escribimos $M_{\mathfrak{p}}$ en vez de M_S.

4.28. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Entonces $M_S = 0$ sii existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

De un contraejemplo para esta equivalencia cuando M no es finitamente generado.

4.29. *Exactitud de la localización.*

(a) Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado. Si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos, entonces

$$0 \longrightarrow M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

(b) En particular, si $M' \subset M$ es un submódulo de un A-módulo M, entonces M'_S puede ser considerado un submódulo de M_S.

4.30. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto central multiplicativamente cerrado y M un A-módulo.

(a) Si P y Q son submódulos de M, entonces $(P+Q)_S = P_S + Q_S$.

(b) Si P y Q son submódulos de M, entonces $(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S$.

(c) Si $P \subset M$ es un submódulos, entonces hay un isomorfismo canónico $(M/P)_S \cong M_S/P_S$.

4.31. *Propiedades locales.* Sea A un anillo conmutativo.

(a) Sea M un A-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  (i) $M = 0$;
  (ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y
  (iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(b) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  (i) f es inyectivo;
  (ii) $f_{\mathfrak{p}}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y
  (iii) $f_{\mathfrak{m}}$ es inyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(c) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  (i) f es sobreyectivo;
  (ii) $f_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectivo para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$; y
  (iii) $f_{\mathfrak{m}}$ es sobreyectivo para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$.

(d) Consideremos una sucesión de A-módulos y morfismos de A-módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

tales que $gf = 0$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  (i) La sucesión (1) es exacta.
  (ii) Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \lhd A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{p}$, es exacta.

(iii) Para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \lhd A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{m}$, es exacta.

4.32. *Soporte de un módulo.* Sea A un anillo conmutativo. Si M es un A-módulo, el *soporte de M* es el conjunto

$$\operatorname{supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Muestre que si M es finitamente generado, es

$$\operatorname{supp} M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \subset \operatorname{ann} M\}.$$

Bartel Leendert van der Waerden
1903–1996, Bélgica y Suiza.

van der Waerden publicó en 1930 su obra más conocida, el libro *Algebra*, basado en parte en notas de Emmy Noether y Émil Artin, en el que que dio forma a lo que hoy entendemos por álgebra.