Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2014

Práctica 5: Localización

Localización

En estos ejercicios los anillos son conmutativos.

1.1. Probar que si A es un DIP, todo ideal primo no nulo de A es maximal.

1.2. Sean $P_1, \dots, P_n$ ideales primos de un anillo A y sea I un ideal de A contenido en $\cup_{i=1}^n P_i$. Probar que existe un $1 \le i \le n$ tal que $I \subseteq P_i$.

1.3. Sean $I_1, \dots, I_n$ ideales de un anillo A y sea P un ideal primo de A que contiene a $\cap_{i=1}^n I_i$.

1. Probar que existe un $1 \le i \le n$ tal que $I_i \subseteq P$.
2. Probar que si $P = \cap_{i=1}^n I_i$, entonces $P = I_i$ para algún $1 \le i \le n$.

1.4. Sea A un anillo y sea $S \subset A^\times$ un subconjunto multiplicativamente cerrado de unidades de A. Entonces $A_S \cong A$.

1.5. Sea A un anillo y sea $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Si $0 \in S$, entonces $A_S \cong 0$.

1.6. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado e $I \subset A$ un ideal. Sea $\bar{S}$ la imagen de S por la aplicación canónica $A \to A/I$. Entonces $(A/I)_{\bar{S}} \cong A_S/IA_S$.

1.7. Sea A un anillo, $S, T \subset A$ subconjuntos multiplicativamente cerrados de A y sea T' la imagen de T por la aplicación canónica $A \to A_S$. Sea $U = ST = \{st : s \in S,\ t \in T\}$.

Muestre que U es un conjunto multiplicativamente cerrado en A y que $(A_S)_T \cong A_U$.

1.8. (a) Sea X un espacio metrico y sea $A = C_{\mathbb{R}}(X)$ el anillo de las funciones reales continuas sobre X. Sea $x_0 \in X$ y pongamos $S = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$. Muestre que S es multiplicativamente cerrado. ¿Es inyectiva la aplicación canónica $A \to A_S$? De no serlo, describa su núcleo.

(b) Supongamos que A es un dominio de integridad y $S \subset A$ es multiplicativamente cerrado. Muestre que la aplicación canónica $A \to A_S$ es inyectiva.

(c) Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerado. Dé condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica $A \to A_S$ sea inyectiva.

1.9. Sea A un anillo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Muestre que $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. En general, escribimos $A_{\mathfrak{p}}$ en lugar de $A_{A\setminus\mathfrak{p}}$.

1.10. Sea $A = \mathsf{C}(\mathbb{R})$, $U = (0,1)$ y $S = \{f \in A : \forall t \in U,\ f(t) \neq 0\}$.

(a) S es multiplicativamente cerrado en A.

(b) Sea $r : \mathsf{C}(\mathbb{R}) \to \mathsf{C}(U)$ la restricción de funciones. Muestre que existe $\bar{r} : \mathsf{C}(\mathbb{R})_S \to \mathsf{C}(U)$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}(\mathbb{R}) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathsf{C}(U) \\ \mathsf{C}(\mathbb{R})_S \arrow[ur, dotted, "\bar{r}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, verifique que $\bar{r}$ es inyectiva.

[2] (c) Muestre que $\bar{r}$ es sobreyectiva.

1.11. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea $f : A \to A_S$ la aplicación canónica.

(a) Muestre que si $I \subset A_S$ es un ideal, entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de A.

(b) De esta forma, se obtiene una aplicación $f^* : \mathsf{Id}(A_S) \to \mathsf{Id}(A)$ del conjunto de ideales de A_S al conjunto de ideales de A. Muestre que f^* preserva inclusiones e intersecciones y que es inyectiva.

(c) Si $J \subset A$ es un ideal, entonces J está en la imagen de f^* sii $J = f^{-1}(JA_S)$ sii ningún elemento de S es un divisor de cero en A/J.

(d) Muestre que $f^*(\mathsf{Spec}\, A_S) \subset \mathsf{Spec}\, A$ de manera que, por restricción, obtenemos una inyección $f^* : \mathsf{Spec}\, A_S \to \mathsf{Spec}\, A$. La imagen de esta aplicación es exactamente $\{\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\, A : \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$.

1.12. Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(a) Si $I \subset A$ es un ideal maximal entre los que no intersecan a S, entonces I es primo.

(b) Describa el niradical de A_S.

1.13. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo y $\mathfrak{p} = (p)$ el ideal primo de $\mathbb{Z}$ correspondiente. Muestre que si $I \subset \mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ es un ideal no nulo, entonces existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $I = p^r \mathbb{Z}_p$.

1.14. Sea A un anillo y $T \subset A$ un subconjunto. Sea $X = \{x_t : t \in T\}$ un conjunto de variables indexadas por T y sea $A[X]$ en anillo de polinomios con variables en X. Sea $S \subset A$ el menor subconjunto multiplicativamente cerrado de A que contiene a T. Muestre que hay un isomorfismo

$$A_S \cong A[X] / \langle t x_t - 1 : t \in T \rangle .$$

†**1.15.** Sea A un anillo. Muestre que $S \subset A$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado maximal sii $A \setminus S$ es un ideal primo minimal.

†**1.16.** Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Decimos que S es *saturado* si

$$ab \in S \iff a \in S \quad \text{y} \quad b \in S.$$

Muestre que S es saturado sii $A \setminus S$ es unión de ideales primos.

1.17. Sea A un anillo. Describa el subconjunto $S \subset A$ multiplicativamente cerrado maximal tal que $A \to A_S$ es inyectivo.

Claude Chevalley
1909–1984, Francia

Chevalley fue uno de los primeros en considerar la contrucción de la localización de anillos conmutativos arbitrarios, en 1944. Sus trabajos más importantes fueron en la teoría de cuerpos de clases, la geometría algebraica y la teoría algebraica de grupos Lie. Fue miembro del grupo Bourbaki desde su fundación, en 1934, y era—en ese momento—el miembro más joven.