Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2014

Práctica 3: Grupos - Tercera Parte

1. Si un grupo G actúa sobre un conjunto finito X, el *carácter* de X es la aplicación $\chi_X : G \to \mathbb{N}_0$ dada por

$$\chi_X(g) = |\{x \in X : gx = x\}|, \qquad \forall g \in G.$$

Si no hay ambigüedad sobre X, escribimos simplemente χ.

(a) Si G actúa transitivamente sobre X, es muestre que

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = 1.$$

Sugerencia. Considere el conjunto $S = \{(g, x) \in G \times X : gx = x\}$ y cuente sus elementos de dos formas distintas.

(b) En general, si la acción no es necesariamente transitiva, es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = |X/G|.$$

Aquí, X/G es el conjunto de órbitas de G en X.

†(c) Si G actúa transitivamente sobre X y $x_0 \in X$, entonces, si G_{x_0} es el estabilizador de x_0 en G, es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^2 = |X/G_{x_0}|.$$

Sugerencia. Una forma de hacer esto consiste en contar los elementos del conjunto $S = \{(g, x, y) \in G \times X \times X : gx = x, gy = y\}$ de dos formas distintas.

2. *Grupos lineales finitos.* Sea k un cuerpo finito de q elementos.

(a) Sea $V = k^2$ el k-espacio vectorial de vectores columna y sea X el conjunto de vectores no nulos de V. Mostrar que la acción de $\mathsf{GL}_2(k)$ sobre V por multiplicación a izquierda preserva a X y que la acción de $\mathsf{GL}_2(k)$ sobre X es transitiva.

(b) Sea $v_0 = (1, 0)^t \in X$. Determinar el estabilizador $\mathsf{GL}_2(k)_{v_0}$ de v_0 en $\mathsf{GL}_2(k)$.

(c) Mostrar que $|\mathsf{GL}_2(k)| = (q^2 - 1)(q^2 - q)$.

†(d) Más generalmente, mostrar que si $n \in \mathbb{N}$, es

$$|\mathsf{GL}_n(k)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

†(e) Sea $n \in \mathbb{N}$. Muestre que el morfismo $\det : \mathsf{GL}_n(k) \to k^\times$ es sobreyectivo y concluya que

$$|\mathsf{SL}_n(k)| = \frac{1}{q-1}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

3. *Subgrupos grandes.*

(a) Sea G un grupo finito y H un subgrupo de índice 2. Construya explícitamente un homomorfismo de grupos $f : G \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\ker f = H$, mostrando en particular que H es normal.

El objetivo de lo que sigue es obtener una prueba de la siguiente proposición que generaliza a este resultado:

> **Proposición.** *Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$ y sea H un subgrupo de G de índice p. Entonces H es normal.*

Notemos que, en las condiciones de este enunciado G no puede poseer subgrupos de índice menor que p.

(b) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G; así, $|X| = p$. Consideramos sobre X la acción usual de G por multiplicación, dada por

$$(g, hH) \in G \times X \mapsto ghH \in X.$$

y sea $\theta : G \to S(X)$ el homomorfismo de grupos correspondiente. Mostrar que si $K = \ker\theta$, se tiene que $H \supset K$ y, como $\operatorname{im}\theta$ es un subgrupo de $S(X)$, que $|G : K|$ divide a $p!$.

(c) Muestre que $|G : K| = |G : H|$, para concluir que $H = K$ y, así, que H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, observe primero que $p = |G : H| \leq |G : K|$, de manera que $|G : K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G : K|$, lo hecho en la parte anterior implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G : K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Muestre para terminar que debe ser $r = 1$.

[1] **4.** Sea p un número primo. Un grupo abeliano finito de exponente p^r con $r > 0$ posee elementos de orden p.

Definición. *Sea p un número primo. Un elemento g de G es p-*primario *si su orden es una potencia de p. Un grupo G es un p-*grupo *si el orden de todo elemento de G es una potencia de p.*

5. Sea p un número primo.

(a) Si G es un p-grupo y H es un subgrupo de G, entonces H es un p-grupo.

(b) Si G es un p-grupo y $f : G \to H$ es un homomorfismo sobreyectivo, H es un p-grupo.

(c) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

6. Muestre que no hay grupos simples de orden 28 ó 312.

7. Muestre que un grupo de orden 12 ó 56 no es simple.

8. Si p y q son primos distintos, un grupo de orden pq no es simple.

9. Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $r \geq 1$ y $p > m$. Entonces G no es simple.

10. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Entonces G no es simple.

11. Muestre que un grupo de orden menor que 60 no es simple.

12. Mostrar que si G es un grupo y P es un subgrupo de Sylow de G, entonces P es un subgrupo característico de $\mathsf{N}(P)$.

13. Si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces $G \cong \prod_{p \text{ primo}} P_p$. En particular, un grupo abeliano finito es producto de sus subgrupos de Sylow.

14. Sean U y V dos grupos. Sean además $f : U \to W$ y $g : V \to W$ dos homomorfismos de grupos. Entonces la aplicación $h : (u,v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in K$ es un homomorfismo de grupos sii todo elemento de $f(U)$ conmuta con todo elemento de $h(V)$.

15. Si G y H son grupos, determine $\mathsf{Z}(G \times H)$.

16. *Producto directo interno.* Sea G un grupo.

(a) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.

(b) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con $(m,n) = 1$. Si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

†(c) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(N_i)_{i=1}^k$ una familia de subgrupos normales de G tales que $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^k N_i \right\rangle$ y para cada $j \in \{1,\dots,k\}$ se tiene que

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \le i \le k \\ i \ne j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

†(d) Otra vez, supongamos que G es finito y sean $N_1,\dots,N_k$ subgrupos normales de G de órdenes $r_1,\dots,r_k$ tales que $(r_i,r_j) = 1$ si $1 \le i,j \le k$ y $|G| = r_1 \cdots r_k$. Entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

17. *Producto semi-directo.*

(a) Sean G y N grupos y sea $\theta : G \to \mathsf{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea $K = N \times G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n,g)\cdot(n',g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \qquad \forall (n,g),(n',g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, K es un grupo.

Llamamos al grupo K construido el *producto semi-directo (o cruzado) de N por G con respecto a θ* y lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

(b) Encontrar homomorfismos 'naturales' de grupo $\iota : N \to N \rtimes_\theta G$ y $\pi : N \rtimes_\theta G \to N$ tales que ι sea inyectivo, π sea sobreyectivo e $\mathsf{im}\,\iota = \ker \pi$.

(c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el homomorfismo trivial, $N \rtimes_\theta G \cong N \times G$ es simplemente el producto directo.

18. *Producto semi-directo interno.* Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$;

(b) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$;

(c) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G.

(d) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N.

(e) La composición de la inclusión incl : : $G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica can : $K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo $\tau : G \cong K/N$.

(f) Existe un homomorfismo $\sigma : K \to N$ que se restringe a la identidad de N y cuyo núcleo es N.

Además, cuando estas afirmaciones valen, existe un homomorfismo de grupos $\theta : G \to \mathrm{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_\theta G \to K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & N \rtimes_\theta G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & G \arrow[d, "\tau"] \\
N \arrow[r, hook, "\mathrm{incl}"] & K \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] & K/N
\end{tikzcd}$$

Los homomorfismos ι y π del diagrama fueron construidos en el ejercicio **17**.

19. Mostrar que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ para un homomorfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ apropiado.

20. Mostrar que S_n es el producto semi-directo de A_n y $\langle (1\,2) \rangle$.

†**21.** Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semi-directo de forma no trivial.

†**22.** Sea G un grupo finito y $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G y α el endomorfismo de G construido en el ejercicio **15** de la practica 2. Mostrar que G es el producto semi-directo de $\ker \alpha$ e $\operatorname{im} \alpha$.

23. Caracterizar los siguientes grupos dados por generadores y relaciones

(a) $\langle x \mid x \rangle$
(b) $\langle x \mid x^n \rangle$
(c) $\left\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \right\rangle$
(d) $\left\langle x, y \mid x^n, xyx^{-1}y^{-1} \right\rangle$
(e) $\left\langle x, y \mid x^2, y^4, xyxy \right\rangle$
(f) $\langle x, y \mid xyxyxyxy \rangle$

24. Para cada $1 \le r \le 6$, considerar el grupo G_r presentado por $\left\langle a, b \mid a^7, a^{-1}b^{-1}a^r b \right\rangle$

(a) Probar que el cardinal de G_r es menor o igual a 21.
(b) Probar que para $r \in \{3, 5, 6\}$ se tiene $G_r \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
(c) Probar que $G_1 \cong \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.
(d) Probar que para $r \in \{2, 4\}$, G_r es un grupo no abeliano de orden 21. Estos dos grupos, ¿Son isomorfos?

25. Probar que $\left\langle a, b \mid a^4, abab^{-1}, a^2b^{-2} \right\rangle$ es una presentacion del grupo de los cuaterniones.

Ejercicios adicionales

1.1 Grupos múltiplemente transitivos

Sea G un grupo y supongamos que G actúa fielmente sobre un conjunto X. Sea $k \ge 1$.

26. Mostrar que obtenemos una acción de G sobre X^k si definimos

$$g \cdot (x_1, \dots, x_k) = (gx_1, \dots, gx_k), \qquad \text{si } g \in g \text{ y } (x_1, \dots, x_k) \in X^k.$$

Mostrar que si $|X| > 1$, la acción de G sobre X^k no es transitiva.

Definición. *Pongamos* $X^{(k)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^k : x_i \neq x_j \text{ si } 1 \le i < i \le k\}$. *Diremos que la acción de G sobre X es k-*transitiva *si G actúa transitivamente sobre* $X^{(k)}$.

27. Mostrar que la acción canónica de S_n sobre $\{1,\dots,n\}$ es n-transitiva.

28. Mostrar que la acción canónica de A_n sobre $\{1,\dots,n\}$ es $(n-2)$-transitiva pero no $(n-1)$-transitiva.

29. Sea K un cuerpo, V un K-espacio vectorial. Mostrar que $\mathsf{Aut}_k(V)$ actúa 1-transitivamente sobre $V \setminus \{0\}$ pero no 2-transitivamente.

30. Sea otra vez K un cuerpo, V un K-espacio vectorial con $\dim_K \geq 2$, y sea X el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión 1. Mostrar que la acción de $\mathsf{Aut}_K(V)$ sobre V induce una acción natural sobre X, que es 2-transitiva pero no 3-transitiva.

31. Mostrar que la acción sobre el conjunto de vértices de un tetraedro regular del grupo de rotaciones del sólido es 2- pero no 3-transitiva.

32. Sea A un grupo finito no trivial y $A' = A \setminus \{1\}$. Claramente $\mathsf{Aut}(A)$ actúa sobre A'.

(a) Si $\mathsf{Aut}(A)$ actúa 1-transitivamente en A', entonces existe un número primo p tal que todo elemento de A' es de orden p. Esto implica que A es un p-grupo, así que su centro no es trivial. Concluir que A es abeliano y entonces que $G \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$.

(b) Determinar todos los grupos A tales que $\mathsf{Aut}(A)$ actúa 2-transitivamente sobre A'.

Definición. *Diremos que la acción de G sobre X es* finamente k-transitiva *si es k-transitiva y además, para cada $\forall(x_1,\dots,x_k) \in X^{(k)}$ y cada $g_1, g_2 \in G$, es*

$$\forall i \in \{1,\dots,k\},\ g_1(x_i) = g_2(x_i) \implies g_1 = g_2.$$

En otras palabras, esta condición dice que dos elementos de G que actúan de la misma forma sobre k elementos de k deben coincidir.

33. Si la acción de G es finamente k-transitiva sobre X y $n = |X|$, entonces

$$|G| = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

34. La acción de S_n sobre $\{1,\dots,n\}$ es finamente n-transitiva, finamente $(n-1)$-transitiva pero no finamente $(n-2)$-transitiva.

35. La acción de A_n sobre $\{1,\dots,n\}$ es finamente $(n-2)$-transitiva.

36. *Acciones finamente* 1*-transitivas.* Este ejercicio lleva a una descripcion de todas las acciones finamente 1-transitivas.

(a) Sea G un grupo finito. Pongamos $R = G$ y consideremos la acción regular a izquierda $G \times R \to R$; recordemos que

$$g \cdot r = gr, \qquad \forall g \in G, r \in R.$$

Mostrar que la acción de G sobre R es finamente 1-transitiva.

(b) Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X no vacío de forma finamente 1-transitiva. Mostrar que existe una función biyectiva $\phi : R \to X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times R \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times \phi"'] & R \arrow[d, "\phi"] \\ G \times X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, si las flechas verticales están dadas por las acciones de G.

37. Sea K un cuerpo finito de q elementos.

(a) Consideremos el conjunto $\mathsf{AGL}(1,K) = K^\times \times K$ y dotémoslo de un producto dado por

$$(a,b)\cdot(a',b') = (aa', b+ab'), \qquad \forall (a,b),(a',b') \in \mathsf{AGL}(1,K).$$

Muestre que $(\mathsf{AGL}(1,K),\cdot)$ es un grupo.

(b) Consideremos ahora el conjunto $X = K$ y la aplicación $\mathsf{AGL}(1,K)\times K \to K$ dada por

$$(a,b)\cdot x = ax+b, \qquad \forall (a,b)\in \mathsf{AGL}(1,K), \forall x \in X.$$

Muestre que esto da una acción de $\mathsf{AGL}(1,K)$ sobre X.

(c) Muestre que esta acción es finamente 2-transitiva.

38. Sea G un grupo finito y sea X un conjunto no vacío sobre el que G actúa de forma finamente 2-transitiva.

(a) Sea $x_0 x \in X$ y $H = G_{x_0}$. Pongamos $X' = X \setminus \{x_0\}$. Entonces H actúa de forma finamente 1-transitiva sobre X' y es un subgrupo maximal de G.

(b) $H \cap gHg^{-1} \neq 1$ sii $g \in H$. En particular, $\mathsf{N}(H) = H$ y $C(h) \subset H$ para cada $h \in H\setminus\{1\}$.

(c) G posee involuciones y son todas conjugadas. Notemos I al conjunto de las involuciones de G.

(d) Sea $N' = \{g \in G : \text{para cada } x \in X, gx \neq x\}$ y $N = N' \cup \{1\}$. Entonces es $|N'| = n-1$. Además, N es un subconjunto normal de G.

(e) La acción de N sobre X es simplemente transitiva.

(f) H posee a lo sumo una involución. Si H posee una involución, $|I| = n$; en caso contrario, $|I| = n-1$.

(g) Si $s,t \in I$ y $s \neq t$, entonces st no tiene puntos fijos en X.

(h) Sea $j \in G\setminus H$ una involución. Si $H \cap I \neq \varnothing$, sea además i la única involución de H. Entonces

$$I = \begin{cases} j^H, & \text{si } H\cap I = \varnothing; \\ j^H \cup \{i\}, & \text{si } H \cap I \neq \varnothing. \end{cases}$$

Aquí $j^H = \{hjh^{-1} : h \in H\}$.

(i) Es $I^2 \setminus \{1\} = N'$ y N es un subgrupo normal abeliano de G. De hecho, si $H\cap I = \varnothing$, se tiene que $I = N'$. Más precisamente, existe un número primo p tal que $N \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, y $p = 2$ sii $H \cap I = \varnothing$.

(j) Si T es un subgrupo normal de G con $\mathsf{Z}(T) \neq 1$, entonces $G = \mathsf{Z}(T) \rtimes H$.

(k) $G \cong N \rtimes H$ con respecto a la acción por conjugación de H sobre N.

(l) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos una aplicación $\xi : N' \to H$ de la siguiente manera: si $n \in N'$, entonces $nx_0 \in X'$ porque n no deja fijo ningún elemento de X, así que como la acción de H sobre X' es simplemente transitiva, existe exactamente un elemento $\xi(n) \in H$ tal que $\xi(n)x_1 = nx_0$. Mostrar que ξ es una biyección.

(m) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos en X dos operaciones $\cdot$ y $+$ en X de la siguiente manera.

Sean $x,y \in X$. Si $x = x_0$, ponemos $x\cdot y = x_0$. Si $x \neq x_0$, existe exactamente un elemento $h \in H$ tal que $hx_1 = x$, y ponemos $x \cdot y = hy$. Por otro lado, sabemos que existe exactamente un elemento $n \in N$ tal que $nx_0 = x$; ponemos $x + y = ny$.

Mostrar que $(X,+)$ es un grupo abeliano isomorfo a N y que $(X',\cdot)$ es un grupo isomorfo a H.

(n) Mostrar que si H es abeliano, entonces $(X,+,\cdot)$ es un cuerpo K y que $G \cong \mathsf{AGL}(1,K)$.

1.2 Grupos nilpotentes

Sea G un grupo. Definimos una sucesión creciente

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots$$

de subgrupos normales de G inductvamente de la siguiente manera, empezando por $Z_0 = 1$: sea $i \in \mathbb{N}_0$ y supongamos que ha hemos contruido Z_i. Como Z_i es normal, podemos considerar el homomorfismo canónico $\pi : G \to G/Z_i$. Ponemos entonces $Z_{i+1} = \pi^{-1}\big(\mathsf{Z}(G/Z_i)\big)$; se trata claramente de un subgrupo normal de G, y es $Z_{i+1}/Z_i \cong \mathsf{Z}(G/Z_i)$. La sucesión de subgrupos $(Z_i)_{i\geq 0}$ se llama la *cadena central superior* de G.

Definición. *Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $Z_n = G$, decimos que G es* nilpotente. *El menor tal n es la* longitud nilpotente *de G.*

39. Un grupo abeliano es nilpotente. ¿Es nilpotente S_3? Dé un ejemplo de un grupo nilpotente y no abeliano.

Definición. *Una sucesión creciente $(N_i)_{i\geq 0}$ de subgrupos normales de un grupo G tal que $N_0 = 1$ y $N_{i+1}/N_i \subset \mathsf{Z}(G/N_i)$ para cada $i \geq 0$ es una* cadena central ascendente. *Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $N_i = G$ entonces decimos que la cadena* termina *o que* llega *a G.*

40. Si G es un grupo y $(N_i)_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente en G, muestre que para cada $i \geq 0$ se tiene que $[N_{i+1}, G] \subset N_i$.

41. Si G es un grupo y $(Z_i)_{i\geq 0}$ es su cadena central superior, entonces para cada $i \geq 0$ se tiene que $Z_{i+1} = \{g \in G : [g, G] \subset Z_i\}$.

42. Mostrar que si un grupo G posee una cadena central ascendente $(N_i)_{i\geq 0}$ que llega a G, entonces es nilpotente. Una forma de hacer esto es ver que $N_i \subset Z_i$ para cada $i \geq 0$.

43. Sea G un grupo tal que $G/\mathsf{Z}(G)$ es nilpotente. Entonces G es nilpotente.

44. Un p-grupo finito es nilpotente.

45. Los subgrupos Z_i que aparecen en la serie central de G son subgrupos característicos en G.

Esto puede verse por inducción en i, siendo inmediato para $i = 0$. Para ver que Z_{i+1} es característico en G si Z_i lo es, proceda de la siguiente manera: muestre que todo $\alpha \in \mathsf{Aut}(G)$ induce, de manera natural, un automorfismo $\bar{\alpha} \in \mathsf{Aut}(G/Z_i)$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha"'] & G/Z_i \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\ G \arrow[r, two heads] & G/Z_i \end{tikzcd}$$

Usando que el centro de un grupo es característico, concluir que Z_{i+1} es característico.

46. Un cociente de un grupo nilpotente es nilpotente. Para mostrarlo, considere un homomorfismo es $f : G \to G'$ con dominio G nilpotente y verifique que si $(Z_i)_{i\geq 0}$ es la cadena central superior de G, entonces $(f(Z_i))_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente de G' que termina en G'.

47. Todo subgrupo de un grupo nilpotente es nilpotente.

48. Todo producto de grupos nilpotentes es nilpotente.

49. Si G es nilpotente y N es normal en G, entonces $N \cap \mathsf{Z}(G) \neq 1$.

50. Todo subgrupo propio de un grupo nilpotente está estrictamente contenido en su normalizador. En particular, todo subgrupo maximal es normal.

51. Si G es nilpotente y $P \subset G$ es un subgrupo de Sylow de G, entonces P es normal y, en particular, único.

52. Si G es nilpotente y finito y para cada primo p, P_p es el p-subgrupo de Sylow, entonces $G \cong \prod_p P_p$.

Esta serie de ejercicios prueba el siguiente teorema:

Teorema. *Un grupo finito es nilpotente sii es isomorfo al producto de sus subgrupos de Sylow.*

Evariste Galois
1811 – 1832, Francia

Evariste Galois produjo un metodo para determinar cuando una ecuacion general puede ser resuelta por radicales y es famoso por sus desarrollos que aportaron al comienzo de la teoria de grupos.