# Álgebra II
## Primer Cuatrimestre — 2014

## Práctica 2: Grupos - Segunda Parte

[1] **1.** Sea $G$ un grupo y $X$ un conjunto. Sea $x_0 \in X$ y sea

$$\mathsf{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G.$$

Mostrar que se trata de un homomorfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

[1+] **2.** Mostrar que cualquiera sea el grupo $G$, existe un isomorfismo $G \cong G^{\mathrm{op}}$ entre $G$ y su grupo opuesto.

[1] **3.** Sean $G$ y $H$ grupos, y sea $\mathsf{hom}_{\mathrm{Grp}}(G, H)$ el conjunto de todos los homomorfismos $f : G \to H$. ¿Se trata en general de un subgrupo de $H^G$? Encuentre condiciones sobre $H$ que garanticen que lo sea.

[1] **4.** Muestre que el grupo $\mathbb{H}$ del ejercicio **1.2** y el grupo $\mathbb{H}_1$ del ejercicio **2.6** de la guía 1 son isomorfos.

**5.** Sea $G$ un grupo.

[1] (*a*) Sea $g \in G$ e $\mathsf{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$.

[1] (*b*) Mostrar que la aplicación $\mathsf{inn} : g \in G \mapsto \mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$ es un homomorfismo de grupos.

[1] (*c*) Describir el núcleo de inn. Los automorfismos que están en la imagen de $G$ se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathsf{Inn}(G)$.

[1] (*d*) Mostrar que $\mathsf{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$.

[2] **6.** Sea $G$ un grupo finito. Supongamos que existe $f \in \mathsf{Aut}(G)$ tal que $f^2 = 1$ y $f$ no deja fijo ningún elemento de $G$ aparte de 1. Entonces cada cada $g \in G$ es $f(g) = g^{-1}$ y $G$ es abeliano de orden impar.

*Sugerencia.* Muestre la aplicación $\phi : g \in G \mapsto g^{-1}f(g) \in G$ es biyectiva y muestre que $f(g) = g^{-1}$ escribiendo a $g$ en la forma $h^{-1}f(h)$ para algún elemento $h$ de $G$.

**7.** Sea $G$ un grupo. Un subgrupo $H$ de $G$ se dice *característico* si cualquiera sea $f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(H) \subset H$.

[1] (*a*) Muestre que si $H \subset G$ es un subgrupo característico, entonces para cada $f \in \mathsf{Aut}(G)$ es $f(H) = H$.

[1] (*b*) Muestre que $\mathsf{Z}(G)$ y $[G, G]$ son característicos.

[1] (*c*) $\Phi(G)$ es un subgrupo característico de $G$.

[1] (*d*) Si $H$ es un subgrupo característico de $G$, entonces $H$ es normal en $G$.

[1] (*e*) Si un grupo $G$ posee un único subgrupo $H$ de un orden dado, éste es característico.

[1] (*f*) Si $H$ es un subgrupo característico en $G$ y $K$ es un subgrupo característico en $H$, entonces $H$ es un subgrupo característico de $G$. Comparar con **2.21**.

[1] (*g*) Si $N \subset G$ es un subconjunto característico (es decir, si para cada $f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(N) \subset N$), entonces $\langle N \rangle$ y $\mathsf{C}(N)$ son subgrupos característicos de $G$.

Un subgrupo $H$ de $G$ se dice *totalmente característico* si $f(H) \subset H$ siempre que $f \in \mathsf{End}(G)$.

[1] (*h*) Un subgrupo totalmente característico es característico.

[2] (*i*) Dar ejemplos de un subgrupo totalmente característico y de un subgrupo característico pero no totalmente característico.

[1+] (*j*) Todos los subgrupos de un grupo cíclico son totalmente característicos. ¿Vale la recíproca?

[1+] †**8.** (*a*) Sea $G$ un grupo y sean $H$ y $K$ subgrupos de $G$ de índice finito. Entonces $L = H \cap K$ también tiene índice finito.

*Sugerencia.* Para verlo muestre que es posible definir una aplicación $\phi : G/L \to G/H \times G/K$ de manera que $\phi(xL) = (xH, xK)$ y muestre que ésta es inyectiva.

[1+] (*b*) El conjunto de elementos de un grupo que poseen un número finito de conjugados es un subgrupo característico.

**9.** Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos.

[1] (*a*) Si $H$ es abeliano, entonces $[G,G] \subset \ker f$.

[1] (*b*) Mostrar que $f([G,G]) \subset [H,H]$. En particular, concluya que $[G,G]$ es un subgrupo característico de $G$.

**10.** Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. ¿Es cierto en general que $f(\mathsf{Z}(G)) \subset \mathsf{Z}(H)$? En caso negativo, de condiciones suficientes que garanticen esta inclusión. Bajo esas condiciones, ¿es $f(\mathsf{Z}(G)) = \mathsf{Z}(H)$?

**11.** Sea $G$ un grupo.

[1] (*a*) Mostrar que la función $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.

[1] (*b*) Describir $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}^2, G)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_n, G)$.

[1] **12.** (*a*) Determinar $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito $G$.

[1] (*b*) Describir la imagen $D(G)$ de $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G) \mapsto f(1) \in G$.

[1] (*c*) Mostrar que cuando $G$ es abeliano, $D(G)$ es un subgrupo característico de $G$

**13.** Sea $G$ un grupo.

[1] (*a*) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre $G$ para que la aplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1] (*b*) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre $G$ para que la aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1] (*c*) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre $G$ para que la aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1+] **14.** Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $(m, n) = 1$, entonces $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

**15.** Sea $G$ un grupo finito y $\phi : G \to G$ un endomorfismo de $G$.

[1+] (*a*) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, entonces $\phi^m(G) = \phi^n(G)$. Sea $\alpha = \phi^n$.

[2] (*b*) Mostrar que $\mathsf{im}\,\alpha$ es normal o dar un contraejemplo.

[1+] **16.** Usando el hecho que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{F}_2^2$, encuentre un isomorfismo $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

[1] **17.** (*a*) Sea $G$ un grupo y sea $X \subset G$ un subconjunto tal que $\langle X \rangle = G$. Sea $f \in \mathsf{End}(G)$ tal que $f(x) = x$ para todo elemento $x \in X$. Entonces $f = \mathsf{id}_G$.

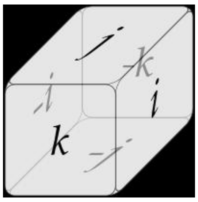
[1+] (*b*) Sea $X$ el conjunto de los elementos de orden 2 de $S_3$. Muestre que cada automorfismo de $S_3$ induce una permutación de $X$ y deduzca que $\mathsf{Aut}(S_3) \cong S_3$.

**18.** *Automorfismos de* $\mathbb{H}$.

[1] (*a*) Determine todos los automorfismos interiores de $\mathbb{H}$.

[2] (*b*) De ejemplos de automorfismos de $\mathbb{H}$ no interiores.

[2] (*c*) Muestre que $\mathsf{Aut}(\mathbb{H}) \cong S_4$.




**19.** Mostrar que

(*a*) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^+ \cong S^1$;

(*b*) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;

(*c*) $\mathsf{GL}_n(k)/\mathsf{SL}_n(k) \cong k^\times$ si $k$ es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;

(*d*) $S^1/\mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;

(*e*) si $m|n$, $\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$.

**20.** Si $G$ es un grupo no abeliano, entonces $G/\mathsf{Z}(G)$ no es cíclico.

*Sugerencia.* Use **2.14**.

**21.** Muestre que $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$.

**22.** Si $G$ es un grupo y $H$ y $K$ son subgrupos normales de $G$, muestre que $G/(H \cap K)$ es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/L$.

**23.** Dado un grupo $G$, el *grupo* $\mathsf{Out}(G)$ *de automorfismos exteriores de* $G$ se define como el cociente $\mathsf{Aut}(G)/\mathsf{Inn}(G)$; recordemos que en el ejercicio **5**(*d*) vimos que $\mathsf{Inn}(G)$ es normal en $\mathsf{Aut}(G)$. Es importante observar que los elementos de $\mathsf{Out}(G)$ *no* son automorfismos de $G$.

Determinar $\mathsf{Out}(G)$ cuando $G \in \{S_3, S_4, \mathbb{H}\}$.

**24.** Sea $G$ un grupo y sea $H$ un subgrupo no normal. Mostrar que el conjunto de coclases izquierdas de $H$ en $G$ no forma un grupo bajo la multiplicación usual.

**25.** Calcular $[A_n, A_n]$ y $\mathsf{Z}(A_n)$.

†**26.** *Automorfismos de* $S_n$.

(*a*) Sea $\phi \in \mathsf{Aut}(S_n)$ y sea $g = (1\,2\,3)$. Mostrar que $\phi(g)$ es un producto de 3-ciclos disjuntos, que $\phi(\mathsf{cl}(g)) \subset \mathsf{cl}(\phi(g))$ y que, de hecho, la restricción $\phi : \mathsf{cl}(g) \to \mathsf{cl}(\phi(g))$ es una biyección.

(*b*) Mostrar que

$$|\mathsf{cl}(g)| = \frac{n!}{3(n-3)!}$$

y que si $\phi(g)$ es producto de $r$ 3-ciclos disjuntos,

$$|\mathsf{cl}(\phi(g))| = \frac{n!}{3^r r!(n-3r)!}.$$

(*c*) Mostrar que o bien $r = 1$ o bien $r = 2$ y $n = 6$.

Supongamos desde ahora que $n \neq 6$.

(*d*) La imágen de todo 3-ciclo por $\phi$ es un 3-ciclo.

(*e*) Sea $3 \leq i \leq n$ y supongamos que $\phi((1\,2\,3)) = (\alpha\,\beta\,\gamma)$ y $\phi((1\,2\,i)) = (\alpha'\,\beta'\,\gamma')$. Muestre que $(\alpha\,\beta\,\gamma)(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ tiene orden dos y use esto para concluir que $|\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'\}| = 4$.

($f$) Muestre que existen $\alpha, \beta, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ distintos de manera que para cada $3 \leq i \leq n$ es $\phi((1\,2\,i)) = (\alpha\,\beta\,\gamma_i))$.

($g$) Sea $\pi \in S_n$ tal que $\pi(1) = \alpha$, $\pi(2) = \beta$ y $\pi(i) = \gamma_i$ para cada $3 \leq i \leq n$. Muestre que $\phi(x) = \pi x \pi^{-1}$.

($h$) Muestre que $\mathsf{inn} : S_n \to \mathsf{Aut}(S_n)$ es un isomorfismo.

($i$) Determine $\mathsf{Aut}(S_6)$.

Georg Frobenius
1849–1917, Alemania

Georg Frobenius combinó resultados de la teoría de ecuaciones algebraicas, geometría y teoría de numeros que lo llevaron al estudio de grupos abstractos, la teoría de representaciones de grupos y la teoría de caracteres.