Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2014

Práctica 1: Grupos - Primera Parte

Definiciones y ejemplos

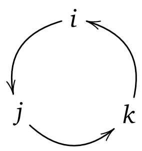
[1] **1.1.** (a) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Mostrar que $\mathbb{G}_n$, con respecto al producto de $\mathbb{C}$ es un grupo abeliano cíclico.

[1] (b) Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mostrar que S^1, con respecto al producto de $\mathbb{C}$, es un grupo abeliano. ¿Es cíclico?

[1] **1.2.** Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por la siguiente ecuaciones:

$$\begin{aligned} &i \cdot j = k, \quad && j \cdot k = i, \quad && k \cdot i = j, \\ &j \cdot i = -k, \quad && k \cdot j = -i, \quad && i \cdot k = -j, \\ &i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1, \end{aligned}$$

y la regla usual de los signos. Mostrar que $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano. Llamamos a $\mathbb{H}$ el *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$.



[1] **1.3.** Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Ponemos

$$\mathsf{GL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\}$$

y

$$\mathsf{SL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Mostrar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Descríbalos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

[1] **1.4.** *Grupo opuesto.* Sea G un grupo. Sea $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ tal que $G^{\mathrm{op}} = G$ como conjunto, y el producto es

$$\cdot : (g, h) \in G^{\mathrm{op}} \times G^{\mathrm{op}} \mapsto hg \in G^{\mathrm{op}}.$$

Mostrar que $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ es un grupo.

1.5. *Exponentes pequeños.* El *exponente* de un grupo G es el menor número e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$.

[1] (a) Mostrar que un grupo G tal que $g^2 = 1$ para todo $g \in G$ es abeliano.

[3] $^{\dagger}(b)$ ¿Qué puede decir si se tiene en cambio que $g^3 = 1$?

[1] **1.6.** Encontrar todos los grupos de orden a lo sumo 6.

1.7. Sea G un grupo y X un conjunto.

[1] (*a*) Sea $G^X = \{f : X \to G\}$ dotado del producto $\cdot : G^X \times G^X \to G^X$ dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \qquad \forall f, g \in G^X, \forall x \in X.$$

Mostrar que G^X es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

[1] (*b*) Sea $x_0 \in X$ y sea $H_{x_0} = \{f \in G^X : f(x_0) = 1\}$. Mostrar que H_{x_0} es un subgrupo de G. ¿Es normal?

[1] **1.8.** *Producto directo.* Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por

$$\cdot : \big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in K \times K \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in K.$$

Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de G y H* y lo notamos $G \times H$.

1.9. $\mathbb{F}_p$*-espacios vectoriales.*

[2] (*a*) Sea G un grupo abeliano y sea p un número primo. Supongamos que todo elemento de G tiene order p. Mostrar que es posible definir una multiplicación $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \to G$ por escalares de $\mathbb{F}_p$ de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial.

[2] (*b*) Supongamos además que G es finito. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ veces}}.$$

[2] †**1.10.** Mostrar que los tres axiomas de grupo—la asociatividad, la existencia de elemento neutro y la existencia de inversos—son independientes.

Subgrupos

[1] **2.1.** Sea G un grupo y $H \subset G$ un subconjunto. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es un subgrupo de G.

(ii) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy^{-1} \in H$.

Si además G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

3. H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy \in H$.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

2.2. Sea G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G.

[1] (*a*) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

[1] (*b*) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

[2] **2.3.** Dado un grupo G, ¿es el subconjunto de elementos de orden finito un subgrupo de G?

2.4. Sea G un grupo.

[1] (*a*) Sea $\mathscr{H}$ una familia de subgrupos de G. Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathscr{H}} H$ es un subgrupo de G.

[1+] (*b*) Sea ahora $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X. Describirlo en término de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X\rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r\rangle$ en lugar de $\langle\{x_1, \dots, x_n\}\rangle$.

[1] **2.5.** Sea G un grupo, $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X\rangle$ y sea N un subgrupo de G. Mostrar que N es normal en G sii $xNx^{-1} = N$ para todo $x \in X$. Mostrar que si G es finito entonces alcanza con pedir $xNx^{-1} \subset N$ para todo $x \in X$.

[1+] **2.6.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n-ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S\rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a $\mathbb{H}_n$ el *n-ésimo grupo de cuaterniones generalizados*.

Determinar el orden de $\mathbb{H}_n$ y listar sus elementos.

[1] **2.7.** (*a*) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\alpha^4 = \beta^3 = \mathsf{id}$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle \alpha, \beta\rangle$ es infinito.

Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

(*b*) Determine $\langle \alpha, \beta\rangle$.

2.8. *Generación de S_n.*

[1] (*a*) Mostrar que

(i) $S_n = \langle\{(i\,j) : 1 \le i < j \le n\}\rangle$;

(ii) $S_n = \langle\{(1\,i) : 1 \le i \le n\}\rangle$;

(iii) $S_n = \langle\{(i\;\; i+1) : 1 \le i < n\}\rangle$;

(iv) $S_n = \langle(1\,2), (1\,2\,3\dots n)\rangle$;

[1+] †(*b*) Sea $\mathscr{T} = \{(i\,j) : 1 \le i < j \le n\}$ el conjunto de todas las transposiciones. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $T \subset \mathscr{T}$ para que $S_n = \langle T\rangle$.

2.9. Sea G un grupo.

[1] (*a*) Sea $\mathscr{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Mostrar que $\bigcap_{H\in\mathscr{H}} H$ es un subgrupo normal de G.

[1] (*b*) Sea $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X. Describirlo en término de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X*. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X, construido en **2.4**.

[1] (*c*) Supongamos que $X \subset G$ es un conjunto tal que, cualquiera sea $g \in G$, es $gXg^{-1} \subset X$. Mostrar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

2.10. (*a*) Sea G un grupo y sea $N \subset G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$. Muestre que N es normal.

(*b*) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z}\} \subset G$. Entonces H es un subgrupo de G. Sea ahora $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Muestre que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

2.11. Si G es un grupo y $A, B \subset G$ son subconjuntos, definimos

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Consideremos un grupo G y $A, B \subset G$ dos subgrupos arbitrarios.

[1] (a) AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.

[1] (b) $G = AB$ sii $G = \langle A, B\rangle$ y $AB = BA$.

[1] (c) Si $AB = BA$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.

[1] (d) Si $G = AB$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

2.12. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$; $[a, b]$ es el *conmutador de a y b*. Claramente $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b.

[1] (a) Sea $X = \{[a, b] : a, b \in G\}$ y sea $G' = \langle X\rangle$ el subgrupo generado por X en G. Mostrar que G' es normal en G. Llamamos a G' es *subgrupo derivado de G* y lo escribimos $[G, G]$.

[1] (b) G es abeliano sii $[G, G] = 1$.

[1] (c) Determinar $[G, G]$ cuando G es $\mathbb{H}$ o un grupo diedral D_n.

Un grupo es *perfecto* si coincide con su subgrupo derivado.

[3] †(d) Sea k un cuerpo finito. Mostrar que $[\mathsf{GL}_n(k), \mathsf{GL}_n(k)] = \mathsf{SL}_n(k)$ con la excepción de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. Mostrar que $\mathsf{SL}_n(k)$ es perfecto con la excepción de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ y $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. ¿Qué sucede en los casos excepcionales?

[1] **2.13.** (a) Sea G un grupo y sea $\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Mostrar que $\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G. Llamamos a $\mathsf{Z}(G)$ el *centro de G* y decimos que los elementos de $\mathsf{Z}(G)$ son *centrales* en G.

[1] (b) Sea G un grupo y $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X\rangle$. Mostrar que es

$$\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ para todo } x \in X\}.$$

[1+] (c) Encontrar el centro de un grupo abeliano, de D_n para cada $n \geq 1$, de $\mathbb{H}$, de S_n para cada $n \geq 1$, de $\mathsf{GL}_n(R)$ para cada $n \geq 1$ y $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p\}$.

[1] (d) Sea G un grupo y X un conjunto. Determinar el centro de G^X.

[1] **2.14.** Sea G un grupo y H un subgrupo abeliano de G. Mostrar que $H\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo abeliano de G.

2.15. Sea G un grupo.

[1] (a) Sea $g \in G$. El *centralizador de g en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(g) = \{h \in G : gh = hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G y que es, en efecto, el subgrupo más grande de G que contiene a g y en el que g es central.

[1] (b) Sea $N \subset G$ un subconjunto. El *centralizador de N en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(N) = \{h \in G : nh = hn \text{ para cada } n \in N\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G.

[1] (c) Mueste que si $N \subset G$ es un subconjunto, $\mathsf{C}(\langle N\rangle) = \mathsf{C}(N)$.

[1] (d) Sea $H \subset G$ un subgrupo de G. El *normalizador de H en G* es el subconjunto $\mathsf{N}(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G. Mostrar, más aún, que H es un subgrupo normal de $\mathsf{N}(H)$.

[1] (e) Si $N \subset G$ es un subconjunto normal (es decir, si para cada $g \in G$, gNg^{-1}), entonces $\mathsf{Z}(N)$ es un subgrupo normal de G.

[1+] **2.16.** Si $g = (i_1\, i_2 \cdots i_{k-1}\, i_k) \in S_n$ es un ciclo de orden k, determinar $\mathsf{C}(g)$.

2.17. Sea G un grupo y S y T subconjuntos de G tales que $S \subset T$. Entonces:

[1] (*a*) $\mathsf{C}(S) \supset \mathsf{C}(T)$;

[1] (*b*) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(S)) \supset S$; y

[1+] (*c*) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathsf{C}(S))) = \mathsf{C}(s)$.

2.18. Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces:

[1] (*a*) $g \in \mathsf{C}(g)$;

[1] (*b*) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(g)) = \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$;

[1+] (*c*) $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $h \in \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$; y

[1+] (*d*) $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $\mathsf{Z}(\mathsf{C}(g)) \supset \mathsf{Z}(\mathsf{C}(h))$.

2.19. Sean G un grupo y H y K subgrupos de G.

[1] (*a*) Si alguno de H o K es normal en G entonces HK es un subgrupo.

[1] (*b*) Si los dos son normales, entonces $HK = KH$ y se trata de un subgrupo normal de G.

[1] **2.20.** Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G. Mostrar que $[N, G] \subset N$.

†**2.21.** El objetivo de este ejercicio es dar un ejemplo de que la normalidad de subgrupos no es transitiva.

[1] (*a*) Sea G el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ con $ad - bc \neq 0$. Mostrar que G, con respecto a la composición de funciones, es un grupo.

[1] (*b*) Sea T el subconjunto de G formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e \\ y + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{R}$. Mostrar que T es un subgrupo *normal* en G.

[1] (*c*) Sea L el subconjunto de T formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e \\ y + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{Z}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de T; como T es abeliano, L es normal en T.

[1] (*d*) Mostrar que L no es normal en G.

[1+] **2.22.** Encontrar todos los subgrupos de D_4. Clasifíquelos bajo isomorfismo y determinar cuáles son normales.

[2-] **2.23.** Sea $\mathbb{H}$ el grupo de los cuaterniones. Mostrar que posee un único elemento de orden 2 y que éste es central. Deducir que $H \not\cong D_4$ y que todo subgrupo de H es normal.

Un grupo no abeliano con esta propiedad se dice *Hamiltoniano*. El siguente teorema de Reinhold Baer (1902–1979) describe completamente esta clase de grupos:

Teorema. (R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, S. B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2 (1933), 12-17) *Un grupo finito es hamiltoniano sii es isomorfo a* $\mathbb{H} \times A$ *para algún grupo abeliano que no tiene elementos de orden* 4.

[2-] **2.24.** Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G de índice finito n. Mostrar que si $g \in G$, entonces $g^n \in N$. Dar un ejemplo para mostrar que esto puede ser falso si N no es normal.

[2-] **2.25.** (a) Mostrar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

[2-] (b) Sea G un grupo cíclico y $g \in G$ un generador. Sea $n = |G|$ y sea p un número primo tal que $p \mid n$. Entonces $\langle g^p \rangle$ es un subgrupo maximal de G.

[2] (c) Mostrar que un grupo finito que posee un solo subgrupo maximal es cíclico que tiene como orden una potencia de un número primo.

[2] †**2.26.** Sea G un grupo finito y H el subgrupo de G generado por los elementos de orden impar. Entonces H es normal y tiene índice una potencia de 2.

†**2.27.** *Subgrupo de Frattini.* Sea G un grupo. Sea $\mathscr{M}$ el conjunto de subgrupos propios maximales de G. Si $\mathscr{M} \neq \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathscr{M}} M$; si, en cambio, $\mathscr{M} = \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = G$. $\Phi(G)$ es el *subgrupo de Frattini*, en honor de Giovanni Frattini (1852–1925, Italia).

[1] (a) Determinar el subgrupo de Frattini de $\mathbb{Z}_{p^2}$ si p es primo.

Un elemento $g \in G$ es un *no-generador* si siempre que $X \subset G$ es un conjunto generador de G y $g \in X$, entonces $X \setminus \{g\}$ también genera a G.

[3] (b) Mostrar que $\Phi(G)$ es el conjunto de elementos no-generadores de G.

[1] (c) Mostrar que $\Phi(G)$ es normal.

[2] **2.28.** Sea G un grupo y H un subgrupo propio de G. Entonces $\langle G \setminus H \rangle = G$.

[2-] **2.29.** Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.

William Burnside
1852–1927, Inglaterra

William Burnside fue el primero en desarrollar la teoría de grupos desde el punto de vista abstracto. Publicó en 1897 *The Theory of Groups of Finite Order*, el primer libro sobre la teoría de grupos publicado en inglés. En 1904 demostró que todo grupo de orden $p^n q^m$ es soluble, uno de sus resultados más importantes, y conjeturó que todo grupo de orden impar es soluble. Este último resultado fue obtenido en 1962 por Walter Feit y John Griggs Thompson, quienes dieron una demostración de 250 páginas (Feit, W. y Thompson, J. G. Solvability of Groups of Odd Order. Pacific J. Math. 13, 775-1029, 1963)