

ÁLGEBRA II
Primer Cuatrimestre — 2014
Recuperatorio del segundo parcial

APELLIDO Y NOMBRE:
CARRERA: L.U.: HOJAS:

1. Sean k un cuerpo y V, W espacios vectoriales con $\dim_k(V) < \infty$. Encuentre un isomorfismo entre $V^* \otimes W$ y $\text{hom}_k(V, W)$. Exhiba un ejemplo para mostrar que el resultado no es necesariamente cierto si V es de dimensión infinita.

2. *Bases duales.* Sea A un anillo y P un A -módulo a izquierda. Una *base dual* para P es un par $((x_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I})$ tal que $x_i \in P$ para todo $i \in I$, $f_i \in \text{hom}_A(P, A)$ para todo $i \in I$ y se tiene que

- (i) para todo $x \in P$, $|\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}| < \infty$, y
- (ii) para todo $x \in P$, es $x = \sum_{i \in I} f_i(x)x_i$. (nótese que la suma tiene sentido por la primera condición)

Muestre que un A -módulo P es proyectivo sii posee una base dual.

Nota: Si lo desea puede suponer que P es finitamente generado y que la base dual es finita pero no es necesario.

3. Sea A un anillo conmutativo artiniiano.

- (a) Sea $I \subseteq A$ un ideal. Pruebe que A/I es un anillo artiniiano.
- (b) Pruebe que todo ideal primo de A es maximal.

4. Sea A un dominio de ideales principales y sea M un A -módulo finitamente generado. Mostrar que

- (a) M es de torsión sii $\text{hom}_A(M, A) = 0$; y
- (b) M es indescomponible sii o bien $M \cong A$ o bien existe $p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tal es que $M \cong A/(p^n)$.

5. Sean A un anillo y $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de A -módulos a izquierda. Consideremos (P'_n, d') y (P''_n, d'') resoluciones proyectivas de M' y M'' respectivamente. Sea $P_n = P'_n \oplus P''_n$. Construya una sucesión de morfismos $d_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$ de manera que (P_n, d) sea una resolución proyectiva de M y $0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$ sea una sucesión exacta corta de complejos.

Sugerencia. Construya inductivamente los morfismos y use el lema de la serpiente cuándo sea necesario.

Ver el diagrama en el reverso.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow d'_2 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d''_2 & \\
 0 & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P''_1 \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d'_1 & & \downarrow d_1 & & \downarrow d''_1 & \\
 0 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & P''_0 \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow d'_0 & & \downarrow d_0 & & \downarrow d''_0 & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$