ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2014

Segundo parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....

CARRERA: .... L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sea A un anillo y considere el siguiente diagrama de A-módulos a izquierda:

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& & & K' \arrow[d, "\iota'"] & \\
& & & P' \arrow[d, "\phi'"] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde la fila y la columna son sucesiones exactas cortas. Además P y P' son módulos proyectivos. Pruebe que $K \oplus P' \cong K' \oplus P$.

Sugerencia. Considere el A-módulo $X = \{(p, p') \in P \times P' : \phi(p) = \phi(p')\}$ y uselo para completar el diagrama convenientemente.

2. Sean A un anillo y M un A-módulo a izquierda finitamente presentado. Supongamos que el conjunto $\{m_1, \cdots, m_n\} \subseteq M$ genera a M. Sea K el núcleo del morfismo $f : A^n \to M$ dado por $f(e_i) = m_i$. Notar que la información del enunciado se puede codificar en el diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
& A^s \arrow[r] & A^r \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & A^n \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pruebe que K es finitamente generado (en particular ser finitamente presentado no depende de los generadores elegidos).

3. Sea G un grupo abeliano finitamente generado

(a) Pruebe que si G es finito, entonces $G \cong \hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(b) Encuentre un grupo abeliano finitamente generado tal que $G \ncong \hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(c) Pruebe que si G es finito, entonces la evaluación

$$ev : G \to \mathsf{hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.

4. (a) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos.

1. Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectva.
2. Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.
3. Si M y M son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(b) Si M es un A-módulo simple, $\mathsf{End}_A(M)$ es un anillo de división.

5. Se dice que un complejo de A-módulos (C, d) *es contractil* si existe una familia de morfismos $s_n : C_n \to C_{n+1}$ tales que $\mathrm{id}_C = sd + ds$. Pruebe que todo complejo acíclico de A-módulos libres acotado inferiormente es contractil.