Álgebra II

Primer Cuatrimestre — 2014

Segundo parcial

Apellido y nombre: ....

Carrera: .... L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea A un anillo y considere el siguiente diagrama de A-módulos a izquierda:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & K' \arrow[d, "\iota'"] & \\
 & & & P' \arrow[d, "\phi'"] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde la fila y la columna son sucesiones exactas cortas. Además P y P' son módulos proyectivos. Pruebe que $K \oplus P' \cong K' \oplus P$.

Sugerencia. Considere el A-módulo $X = \{(p, p') \in P \times P' : \phi(p) = \phi(p')\}$ y uselo para completar el diagrama convenientemente.

Solución. Es fácil ver que X es un A-módulo. Además las proyecciones se restringen a X y dan morfismos $\pi : X \to P$ y $\pi' : X \to P'$ que resultan sobreyectivos.

Vale que $\ker \pi \cong K'$. En efecto, si $(p, p') \in \ker \pi$ entonces $p = \pi(p, p') = 0$. Como $(p, p') \in X$ vemos que $\phi'(p') = \phi(0) = 0$. Como la sucesión vertical es exacta, existe $k' \in K'$ tal que $\iota'(k') = p'$. De esta manera obtenemos un morfismo $\ker \pi \to K'$ que resulta un isomorfismo (ejercicio).

Análogamente $\ker \pi' \cong K$. Haciendo esto obtuvimos dos sucesiones exactas cortas $0 \to K \to X \to P' \to 0$ y $0 \to K' \to X \to P \to 0$. Estas dos sucesiones se parten pues P y P' son proyectivos. Por lo tanto $K \oplus P' \cong X \cong K' \oplus P$ como queríamos.

2. Sean A un anillo y M un A-módulo a izquierda finitamente presentado. Supongamos que el conjunto $\{m_1, \cdots, m_n\} \subseteq M$ genera a M. Sea K el núcleo del morfismo $f : A^n \to M$ dado por $f(e_i) = m_i$. Notar que la información del enunciado se puede codificar en el diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd} & A^s \arrow[r] & A^r \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & A^n \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Pruebe que K es finitamente generado (en particular ser finitamente presentado no depende de los generadores elegidos).

Solución. Como A^s y A^r son libres (y en particular proyectivos) podemos completar el diagrama del enunciado a un diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd} & A^s \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A^r \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & A^n \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

El lema de la serpiente nos da una sucesión exacta larga

$$\ker g \to \ker f \to \ker \mathrm{id} \to \operatorname{coker} g \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} \mathrm{id}$$

pero como $\ker \mathrm{id} = \operatorname{coker} \mathrm{id} = 0$ concluimos que hay un isomorfismo $\operatorname{coker} g \cong \operatorname{coker} f$. Esto nos permite armar una sucesión exacta corta

$$0 \to A^s \to K \to \operatorname{coker} f \to 0$$

en las que tanto A^s como $\operatorname{coker} f$ son finitamente generados. Concluimos que K también es finitamente generado.

Solución. Si cambiamos la primera fila por $0 \to K' \to A^r \to M \to 0$ donde K' es el núcleo de $A^r \to M$, estamos en condiciones de usar el primer ejercicio del parcial para concluir que $K \oplus A^r \cong A^n \oplus K'$. Además sabemos que K' es finitamente generado (pues recibe un epi de A^s) y por lo tanto $K \oplus A^r \cong A^n \oplus K'$ es finitamente generado. Como K es un sumando directo de un finitamente generado resulta, también, finitamente generado.

3. Sea G un grupo abeliano finitamente generado

(a) Pruebe que si G es finito, entonces $G \cong \hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(b) Encuentre un grupo abeliano finitamente generado tal que $G \ncong \hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(c) Pruebe que si G es finito, entonces la evaluación

$$ev : G \to \hom_{\mathbb{Z}}(\hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.

Solución. Como G es finitamente generado, el teorema de estructura nos dice que G es suma directa de grupos cíclicos. Además sabemos que $\hom(M \oplus N, T) \cong \hom(M, T) \oplus \hom(N, T)$. Estas dos cosas implican que basta probar el resultado para G un grupo cíclico. Vale que $\hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M) \cong \{x \in M : nx = 0\}$. Por lo tanto

$$\hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \{x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : nx = 0\} = \{\frac{a}{n} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : 0 \le a \le n-1\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Poniendo $G = \mathbb{Z}$ obtenemos un contraejemplo para el segundo item.

En el tercer item, es fácil ver que ev es un morfismo y que el codominio es isomorfo al dominio (usando dos veces el primer item). Para ver que es un isomorfismo alcanza con ver que es inyectivo o sobreyectivo. Lo más fácil es ver que es inyectivo. Supongamos que $ev(g) = 0$, esto quiere decir que $f(g) = 0$ para todo morfismo $f : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $g \neq 0$ entonces podemos definir $f : \langle g \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de manera que $f(g) = \frac{1}{n}$ donde n es el orden de g. Ahora extendemos este morfismo a todo G (usando el teorema de estructura o el hecho de que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo).

4. (a) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos.

1. Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectva.
2. Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.
3. Si M y M son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(b) Si M es un A-módulo simple, $\mathsf{End}_A(M)$ es un anillo de división.

5. Se dice que un complejo de A-módulos (C, d) *es contractil* si existe una familia de morfismos $s_n : C_n \to C_{n+1}$ tales que $\mathsf{id}_C = sd + ds$. Pruebe que todo complejo acíclico de A-módulos libres acotado inferiormente es contractil.

Solución. Supongamos que $C_n = 0$ para todo $n < 0$. Definimos $s_n = 0$ para todo $n < 0$. Para definir s_0, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "s_0"] & 0 \arrow[dl, "s_{-1}"] \\
C_1 \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La condición $\mathsf{id} = sd + ds$ queda ahora $\mathsf{id}_{C_0} = d_1 s_0$. Como d_1 es epi y C_0 es libre (en particular proyectivo) d_1 resulta una retracción y por lo tanto existe s_0 que verifica lo pedido.

La construcción de s_n para todo n es por inducción. Ya tenemos construido s_0, supongamos construidos s_k para todo $k < n$ y construyamos s_n. Para eso miramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_n \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "s_n"] & C_{n-1} \arrow[d, equal] \arrow[dl, "s_{n-1}"] \\
C_{n+1} \arrow[r] & C_n \arrow[r] & C_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Queremos construir $s_n : C_n \to C_{n+1}$ tal que $d_{n+1}s_n = \mathsf{id} - s_{n-1}d_n$. Sea $f = \mathsf{id} - s_{n-1}d_n$, usando la hipótesis inductiva es fácil ver que $d_n f = 0$ y por lo tanto podemos pensar $f : C_n \to \ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$. Esto nos permite considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "s_n"'] & \\
C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & \operatorname{im} d_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La existencia de la flecha punteada es consecuencia de que C_n es proyectivo y que la (co)restricción de d_{n+1} es epi. Es claro que la flecha que construimos satisface lo pedido.