ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2014

Primer parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....

CARRERA: .... L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sea G un grupo de orden 12 tal que existe $P \subset G$ un 3-sylow que no es normal.

(a) Pruebe que la acción de G en las coclases a izquierda de G/P induce un morfismo inyectivo $G \to S_4$.

(b) Estudie la cantidad de elementos de orden 3 en G y concluya que la imagen de dicho morfismo es A_4.

2. Pruebe que hay exactamente 5 clases de equivalencia de grupos de 12 elementos. Encuentre un representante de cada una.

3. Sean $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ y $A = \{a + bw \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Pruebe que A es un anillo.

(b) Calcule las unidades de A.

(c) Pruebe que A es un dominio euclideo con la norma $\delta : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por $\delta(a + bw) = |a + bw|^2 = a^2 - ab + b^2$.

(d) Encuentre $z \in A$ tal que $\langle z \rangle = \langle 7, 8 + 3w \rangle$.

4. Sean A un anillo conmutativo y $T \subset A$ un subconjunto. Sean $X = \{x_t : t \in T\}$ un conjunto de variables indexadas por T y $A[X]$ en anillo de polinomios con variables en X. Por último, sea $S \subset A$ el menor subconjunto multiplicativamente cerrado de A que contiene a T. Muestre que hay un isomorfismo

$$A_S \cong A[X] / \left\langle tx_t - 1 : t \in T \right\rangle .$$

5. *El álgebra de funciones en el plano cuántico.* Sea $q \in \mathbb{C} \setminus 0$ y supongamos que q no es una raíz de la unidad. Sea $V = \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}\}$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{C}$. Consideramos dos elementos $x, y \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ definidos de la siguiente manera: si $f \in V$ y $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $x(f), y(f) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ son tales que

$$\big(x(f)\big)(n) = q^n f(n)$$

y

$$\big(y(f)\big)(n) = f(n+1).$$

Sea $A_q = \mathbb{C}[x, y]$ la menor subálgebra de $\mathrm{End}_C\, C(V)$ que contiene a $\mathbb{C}$, a x y a y. Llamamos a A_q el *álgebra de funciones en el plano cuántico.*

(a) En A_q vale que $yx = qxy$.

(b) El conjunto $\{x^i y^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ es una base de A_q.

(c) Se tiene que $\mathrm{Z}(A_q) = \mathbb{C}$.