ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre — 2014

Primer parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....

CARRERA: .... L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sean $n = 2915 = 5 \times 11 \times 53$ y G un grupo de orden n. Pruebe que si G tiene un elemento de orden 55 entonces es abeliano.

Sugerencia. Recuerde que $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{p-1}$ para todo primo $p \neq 2$.

2. Sea A un dominio íntegro y $S \subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Pruebe que el morfismo canónico $\iota : A \to A_S$ es un isomorfismo si y solo si todo elemento de A_S es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en A.

3. Sea $A = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ el anillo de enteros gaussianos.

(a) Pruebe que las únicas unidades de A son ± 1, $\pm i$.

(b) Pruebe que todo número complejo está a una distancia menor o igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de un entero gaussiano. En particular para todo $w \in \mathbb{C}$ y todo $z \in A \setminus \{0\}$ existe $u \in A$ tal que $|w - uz| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|z|$.

(c) Concluya que los enteros gaussianos son un dominio euclideo con la norma $\delta : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por $\delta(a + bi) = a^2 + b^2$.

(d) Factorice $13 \in A$ como producto de primos de A.

4. (a) Mostrar que un grupo finito no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

(b) Sea G un grupo cíclico finito y $g \in G$ un generador. Sea $n = |G|$ y sea p un número primo tal que $p \mid n$. Entonces $\langle g^p \rangle$ es un subgrupo maximal de G.

(c) Mostrar que un grupo finito que posee un solo subgrupo maximal es cíclico que tiene como orden una potencia de un número primo.

5. *El álgebra de Weyl.* Sea $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ el anillo de endomorfismos de $\mathbb{C}[X]$ considerado como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sean $p, q \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ definidos de la siguiente manera: si $f \in \mathbb{C}[X]$, entonces

$$p(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}, \qquad \text{y} \qquad q(f) = Xf$$

y sea $A = \mathbb{C}[p, q]$ el menor subanillo de $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ que contiene a $\mathbb{C}$, a p y a q. Llamamos a A el *álgebra de Weyl*.

(a) En A es $pq - qp = 1$.

(b) El conjunto $\{p^i q^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ es una base de A como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

(c) Describa el centro de A.