Complementos de Análisis II - Matemáticos
Práctica 1- Primer Cuatrimestre de 2004

Indicaciones generales (para todas las prácticas):

-Muchos de los ejercicios pueden hacerse de distintas maneras dependiendo de qué se tome como punto de partida. Se sugiere explicitar en cada caso cuál es ese punto de partida y cuáles propiedades son las que permiten avanzar en la resolución.

- Uno o dos ejercicios por práctica están marcados para -en forma optativa- entregar a los docentes para su corrección.

1 Propiedades del conjunto de los números reales

1. Sea K un cuerpo que verifica las siguientes propiedades de orden :

   (a) $\forall a, b \in K$ con $a \neq b$, entonces $a < b$ ó $b < a$.

   (b) $a > 0 \Rightarrow a \neq 0$

   (c) Si $a < b$, entonces $\forall c$, $a + c < b + c$.

   (d) Si $0 < a$ y $0 < b \Rightarrow 0 < ab$

   (e) Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.

   Mostrar los siguientes hechos:
   i) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
   ii) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
   iii) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$
   iv) Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces se tiene que $a = b = 0$.

2. Probar que si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces $r + s\alpha \notin \mathbb{Q}$ si r, s son racionales y $s \neq 0$.

3. a. Probar que si $a < b$, con $a, b \in \mathbb{Q}$, hay un $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tal que $a < \alpha < b$. Observación : puede considerar como verdadero el hecho de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, Euclides dió un argumento de esto hace 23 siglos. Sugerencia: considerar el caso $a = 0$, $b = 1$, tomar $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Para el caso general usar el ejercicio 2.

   b. Deducir que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

4. Probar que si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, se tiene que $|a - b| < \varepsilon$, entonces $a = b$

5. Comparar 13^{12} y 12^{13}. ¿Cuál es mayor? (Pista: $(n+1)^n$ y n^{n+1} se pueden comparar recordando la definición del número e)

2 Algo de sucesiones

Una sucesión de números reales es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. El valor $a(n)$ es representado por a_n y llamado n-ésimo término de la sucesión. Escribiremos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente (a_n) para indicar la sucesión. Se supone conocida la definición de límite de sucesiones.

6. Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, demostrar, usando la definición que:

   (a) $\lim_{n\to\infty} 5 - 2a_n = -1$

   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 9$

7. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in IN} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$

8. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

   (a) Probar que si $r < L$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r, \forall n \geq n_0$. Enunciar y demostrar una afirmación análoga para el caso $r > L$

   (b) ¿Pueden reformularse las afirmaciones anteriores para los casos $r \leq L$ y $r \geq L$?

   (c) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que dado $r \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in IN$ tal que $a_n > r \ \forall n \geq n_0$?

9. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a 0 y sea σ_n la sucesión de las medias aritméticas (promedios) definida como $\sigma_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

10. **(Entregar en forma optativa)** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tales que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Probar, justificando cada afirmación, que:

    (a) Si $L < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

    (b) Si $L > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

    (c) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = L$

Dada una sucesión (a_n) de números reales, una **subsucesión** de (a_n) es una restricción de la función a a un subconjunto infinito $N' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. La denotamos $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

11. Demostrar que de toda sucesión convergente se puede extraer una subsucesión monótona.

3 Más propiedades del conjunto de los números reales

12. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de A.

    (a) s verifica que:

    i. $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;

    ii. si $t \geq a$ para cualquier $a \in A$, entonces $t \geq s$.

    (b) s verifica que:

    i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;

    ii. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.

    (c) s verifica que:

    i. $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;

    ii. existe una sucesión $(a_n)_{n \in IN}$ contenida A tal que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = s$.

    Convencerse de equivalencias análogas para el ínfimo.

13. Sean A y $B \subseteq \mathbb{R}$, dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$. Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.

4 La construcción de un cuerpo ordenado completo, arquimedianidad

En toda esta sección, K es un cuerpo no vacío totalmente ordenado. Llamamos **cortadura de** K a una separación de K en dos subconjuntos A y B de manera tal que (i) $A \cup B = K$, (ii) $A \neq \emptyset \neq B$, (iii) $\forall a \in A, \forall b \in B$ se tiene que $a < b$, (iv) $\forall a \in A$, si $a' < a$ entonces $a' \in A$ y análogamente, $\forall b \in B$ si $b' > b$ entonces $b' \in B$. Un **elemento de separación** de la cortadura que pertenece a K es un elemento $s \in K$ que satisface $a \leq s, \forall a \in A$ y $s \leq b, \forall b \in B$, pudiendo pertenecer tanto a A como a B.

14. Hallar un ejemplo de cuerpo totalmente ordenado y de cortadura en ese cuerpo que no tenga elemento de separación (en ese cuerpo).

15. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

    (a) Toda cortadura de K tiene un único elemento de separación perteneciente a K

    (b) Todo subconjunto de K acotado superiormente tiene supremo en K

Dado K se puede considerar el subconjunto infinito formado por $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \cdots$ .Si llamamos números naturales ($\mathbb{N}$) a ese subconjunto, la **arquimedianidad** es una propiedad del orden que básicamente dice que hay números naturales tan grandes como se quiera. Esa propiedad puede expresarse, por ejemplo por la afirmación "$\mathbb{N}$ es no acotado superiormente"

16. Demostrar la equivalencia entre las siguientes afirmaciones

    (a) $\mathbb{N} \subset K$ es no acotado superiormente

    (b) Dados $a, b \in K$, siendo $a > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

    (c) Dado $a \in K, a > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < a$

17. Demostrar que la arquimedianidad del orden de K es una propiedad que se deduce de cada una de las afirmaciones del ejercicio 15.

18. Demostrar la equivalencia entre las siguientes afirmaciones, identificando en qué momento se usa la hipótesis de arquimedianidad al tomar como punto de partida la tercera afirmación.

    (a) Todo subconjunto de K acotado superiormente tiene supremo en K

    (b) Todo subconjunto de K acotado inferiormente tiene ínfimo en K

    (c) El orden de Kes arquimediano y si $(I_n)_{n\geq 1}$ es un encaje de intervalos cerrados de K cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

19. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

    (a) Todo subconjunto de K acotado superiormente tiene supremo en K

    (b) Toda sucesión monótona y acotada de elementos de K tiene límite en K

    Concluya que la arquimedianidad del orden de K es una propiedad que también se deduce de la segunda afirmación. Busque un argumento para deducirla sin pasar por la primera.

20. Demostrar que las siquientes afirmaciones son equivalentes

    (a) Toda sucesión acotada de elementos de K tiene una subsucesión convergente en K

    (b) El orden de K es arquimediano y toda sucesión de Cauchy de elementos de K es convergente en K

    (c) El orden de K es arquimediano y si $(I_n)_{n\geq 1}$ es un encaje de intervalos cerrados de K cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

21. Hay un único cuerpo K totalmente ordenado (salvo isomorfismos) que satisface que todo subconjunto de K acotado superiormente tiene supremo en K (propiedad que llamamos **completitud de** K). A ese cuerpo lo llamamos $\mathbb{R}$. Tomando como referencia los ejercicios anteriores, confeccione una lista de distintas maneras de definir a $\mathbb{R}$.

22. Probar que si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, Hay un único $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ que verifica $x^n = a$ (se lo indica $x = \sqrt[n]{a}$). (Sugerencia: $\{x > 0 : a < x^n\}$ y $\{x : 0 < x^n \leq a\} \cup \{x : x \leq 0\}$ forman una cortadura de $\mathbb{R}$)

5 Otros

23. Dado un conjunto X probar que el conjunto formado por los subconjuntos de X (partes de X, denotado $P(X)$), es ordenado, con el orden dado por la inclusión, pero el orden no es un orden total.

24. Sea $\mathbb{R}(t)$ el conjunto de fracciones $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$ donde p y q son polinomios con coeficientes reales, y q es no nulo. Se considera $\dfrac{p(t)}{q(t)} = \dfrac{p(t).u(t)}{q(t).u(t)}$ si $u(t)$ es no idénticamente nulo.

    (a) Probar que con las operaciones usuales (suma y producto de polinomios), $\mathbb{R}(t)$ es un cuerpo.

    (b) Considerar el orden dado por "$r(t)$ es positiva cada vez que el coeficiente principal del polinomio $p.q$ sea positivo". Verificar que con el orden así definido se tiene que la suma y el producto de dos fracciones positivas es positivo, y que para una fracción cualquiera se tiene que: es cero, positiva, o su inversa aditiva es positiva.

    (c) Mostrar que ese orden para $\mathbb{R}(t)$ es no arquimediano.