Complementos de Análisis II - Matemáticos
Práctica 2- Primer Cuatrimestre de 2004

1 Normas, distancias

Una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una <u>*distancia*</u> en $\mathbb{R}^n$ si se cumple que*:*

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

1. Demostrar que las siguientes funciones son distancias en $\mathbb{R}^n$.

   (a) $d_1(x, y) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

   (b) $d_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)^2}$

   (c) $d_M(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

   (d) $d_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

Dada la distancia d, para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ se define la *bola abierta* de centro p y radio ε para la distancia d mediante $B_d(p, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, p) < \varepsilon\}$ y de modo análogo la *bola cerrada* mediante $\overline{B}_d(p, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, p) \leq \varepsilon\}$. Observación: cuando se sobreentienda cuál es la distancia utilizada, notaremos la bola abierta (resp. cerrada) mediante la expresión $B_\varepsilon(p)$, o también $B(p, \varepsilon)$; (respectivamente $\overline{B}_\varepsilon(p)$,o $\overline{B}(p, \varepsilon)$) caso contrario la notamos mediante $B_d(p, \varepsilon)$ (respectivamente $\overline{B}_d(p, \varepsilon)$)

2. En $\mathbb{R}^2$

   (a) Considere $p = (2, 3)$. Para cada una de las distancias del ejercicio 1 dibuje la bola abierta de centro p y radio 1. Sugerencia: si se complica, empiece tomando $p = (0, 0)$

   (b) Lo mismo que el inciso anterior pero esta vez dibujar bolas cerradas.

   (c) Considere en $\mathbb{R}^n$ los elementos $p = (1, \ldots, 1)$ y $q = (1, 2, 3, \ldots, n)$. Calcule "la" distancia entre ellos, tomando como referencia el ejercicio 1.

Una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una <u>*norma*</u> en $\mathbb{R}^n$ si se cumple que*:*

- $N(x)$=0 $\Leftrightarrow$ x= $(0, ..., 0)$.
- $N(\alpha x) =\mid \alpha \mid N(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces la función $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $d(x, y) = N(x - y)$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$. Esto dice que cada vez que se tiene una norma, es posible obtener una distancia. ¿Vale la recíproca? Justificar.

4. Chequear que las siguientes funciones son normas en $\mathbb{R}^n$

   (a) $N_1(x) = ||x||_1 = d_1(x,0) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

   (b) $N_2(x) = ||x||_2 = d_2(x,0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

   (c) $N_M(x) = ||x||_M = d_M(x,0) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

5. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, mostrar que $||x||_M \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n.||x||_M$ (aunque la norma N_2 es la más natural para cuestiones geométricas, este ejercicio muestra que podemos usar en $\mathbb{R}^n$, cuando sea conveniente, las normas N_1 y N_M, de manipulación formal más simple)

2 Sucesiones, límites, entornos

6. Dada la sucesión $(\overrightarrow{x_k}) \subset \mathbb{R}^n$ y $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, demostrar que la afirmación $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{a}$ (afirmación que necesariamente hace uso de una norma) no depende de si la norma en uso es N_1,N_2, o N_M. Sugerencia: reflexione sobre los alcances del ejercicio anterior.

7. Dada la sucesión $(\overrightarrow{x_k}) \subset \mathbb{R}^n$ y $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, demostrar que $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{a}$ si y solo si para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $\lim_{k\to\infty} x_{ki} = a_i$, o sea cada coordenada de $\overrightarrow{x_k}$ converge a la coordenada correspondiente de $\overrightarrow{a}$.

8. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones. Justificar.

   (a) $\overrightarrow{a_n} = \left(n, \frac{1}{n}\right)$

   (b) $\overrightarrow{b_n} = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \sin(\frac{n\pi+2}{2n})\right)$.

9. Demostrar que si la sucesión $(\overrightarrow{x_k}) \subset \mathbb{R}^n$, es tal que $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{a}$ y $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{b}$, entonces $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$

10. Demostrar que si existen sucesiones $(\overrightarrow{x_k}), (\overrightarrow{y_k}) \subset \mathbb{R}^n$, con $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{a}$, $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{y_k} = \overrightarrow{b}$ y $r > 0$ tal que $||\overrightarrow{y_k} - \overrightarrow{a}|| < r < ||\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{b}||$ para todo k natural, entonces $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = r$

11. Demostrar que si las sucesiones $(\overrightarrow{x_k}), (\overrightarrow{y_k}) \subset \mathbb{R}^n$, son tales que $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{a}$ y $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{y_k} = \overrightarrow{b}$, entonces se tiene que $\lim_{k\to\infty} ||\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{y_k}|| = ||\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}||$

12. Sea $(\overrightarrow{x_k}) \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión de Cauchy, esto es, dado $\varepsilon > 0, \exists k_0$ natural tal que si $k, j \geq k_0$ entonces $||x_k - x_j|| < \varepsilon$, (o también dado $\varepsilon > 0, \exists k_0$ natural tal que si $k \geq k_0$ entonces $||x_{k+p} - x_k|| < \varepsilon$ para todo p natural). Demostrar que $(\overrightarrow{x_k})$ converge en $\mathbb{R}^n$. Explicitar qué resultados se usan.

3 Límite inferior y límite superior de sucesiones acotadas reales

13. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto cerrado, acotado superiormente (resp. inferiormente). Demostrar que A tiene máximo (resp. mínimo).

14. Sea $(x_k) \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada y A el conjunto de puntos de aglomeración de (x_k). Definimos el *límite superior* (notación $\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \limsup_{k\to\infty} x_k$) y el *límite inferior* (notación $\underline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \liminf_{k\to\infty} x_k$) de la sucesión (x_k) respectivamente por los números $\max A$ y $\min A$,cuya existencia se deduce del ejercicio anterior. Probar que

    (a) $\underline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \sup_n(\inf_{k\geq n} x_k) = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} x_k)$

    (b) $\overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \inf_n(\sup_{k\geq n} x_k) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} x_k)$

15. Demostrar que si $(x_k) \subset \mathbb{R}$ es una sucesión acotada, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    (a) $\limsup x_k = \liminf x_k = a$

    (b) $\exists \lim_{k\to\infty} x_k = a$

16. Sea $(x_k) \subset \mathbb{R}$ una sucesión de Cauchy.

    (a) Si no lo hizo antes, demuestre que (x_k) es acotada

    (b) Demuestre que $\limsup x_k = \liminf x_k$. Deduzca que (x_k) tiene límite. ¿En qué momento usó la completitud de $\mathbb{R}$ para hacer esa deducción?

4 Algunas nociones topológicas

17. Estudiar cuáles propiedades (abierto, cerrado, ninguna de las dos cosas, acotado, no acotado) verifica cada uno de los subconjuntos:

    a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$ *b)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 0\}$
    c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n, 0 \leq y \leq 1\}$ *d)* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, z < 1,\ y \in \mathbb{Q}\cap \cap [0, 1]$

18. Dado $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, demostrar que $\exists (x_k) \subset \mathbb{Q}^n$ tal que $(\overrightarrow{x_k}) \to \overrightarrow{a}$. Deducir que $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

19. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, un punto $p \in S$ se llama un punto aislado de S si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$.*

    Notemos por S' el conjunto de todos los puntos de acumulación de S. Demostrar la igualdad:

    $$\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}.$$

20. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right), \text{con } n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

21. Para los siguientes conjuntos, hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

    (a) $S := \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$.

    (b) $S = \mathbb{Q}\cap \left[\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$

22. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

    (a) Demostrar que S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.

    (b) Demostrar que S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.