Práctica 6

Integral de Riemann Stieltjes

1. Analizar la existencia de $\int_a^b f d\alpha$ y en caso afirmativo calcular su valor:

a) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria, f constante sobre $[a,b]$.

b) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$;

$$a \leq c \leq b\,,\ f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 5 & , x \in [a,c) \\ 3 & , x = c \\ -1 & , x \in (c,b] \end{cases}$$

Qué sucede si se pide continuidad de α sólo en un entorno de c ?

c) f como en b) y $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [a,c] \\ -1 & , x \in (c,b] \end{cases}$

d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$, $[a,b] = [-1,3]$

e) $f(x) = \alpha(x) = \cos x$, $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$

2. Supongamos que $\int_a^b f d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f . Qué se puede decir sobre la función α ?

(Sug. Considerar para cada $c \in [a,b]$, $f_c(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [a,c] \\ 0 & , x \in (c,b] \end{cases}$

3. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, f α-integrable Riemann-Stieltjes.

Para cada partición del intervalo $[a,b]$, $\pi = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se define

$$s_\pi = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$$

Probar que existe una sucesión de particiones $(\pi_m)_{m\geq 1}$ que verifica:

i) $(\pi_m)_{m\geq 1}$ es "monótona", es decir $m < m' \Longrightarrow \pi_m \subset \pi_{m'}$

ii) $\lim\limits_{m\to\infty} \|\pi_m\| = 0$

iii) $\lim\limits_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \displaystyle\int_a^b f d\alpha$, independientemente de la elección de los puntos intermedios t_k .

iv) Si $(\sigma_m)_{m\geq 1}$ es otra sucesión monótona de particiones tal que $\pi_m \subset \sigma_m$, $\forall m \geq m_0$, entonces $(\sigma_m)_{m\geq 1}$ cumple b) y c) .

4. En las hipótesis del ejercicio anterior, sean $g, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$, g β-integrable Riemann-Stieltjes, para la partición $\pi = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se define

$$r_\pi = \sum_{k=1}^{n} g(t_k) \left(\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})\right)$$

Comprobar la existencia de una sucesión $(\pi_m)_{m\geq 1}$ que verifica simultáneameete

$$\lim_{m\to\infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha \quad \text{y} \quad \lim_{m\to\infty} r_{\pi_m} = \int_a^b g d\alpha$$

5. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $\displaystyle\int_a^c f d\alpha$ y $\displaystyle\int_c^b f d\alpha$ existen. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f d\alpha$ también existe y vale $\displaystyle\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$

6. Sean $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ α-integrables Riemann-Stieltjes, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Probar que $\displaystyle\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha$

7. Se considera la función parte entera $[\quad] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$.

Analizar la exitencia de las siguientes integrales y en caso afirmativo calcular su valor:

a) $\displaystyle\int_0^4 x^2 d[x]$ b) $\displaystyle\int_0^2 x d(x - [x])$ c) $\displaystyle\int_0^2 x^2 d|x|$

8. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada, y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

   a) Demostrar que $|f|$ es α-integrable RS.

   b) Probar la desigualdad $|\displaystyle\int_a^b f d\alpha| \leq \int_a^b |f| d\alpha$

   c) Deducir $|\displaystyle\int_a^b f d\alpha| \leq \max_{x\in[a,b]} |f| \, V_a^b \alpha$

   d) Probar que $\displaystyle\int_a^x f d\alpha$ es una función de variación acotada.

9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Probar que f resulta integrable Riemann.

   En particular toda función monótona es integrable Riemann.