Complementos de Análisis II - Matemáticos
Práctica 3- Primer Cuatrimestre de 2004

1 Más sobre nociones topológicas

1. Demostrar que el interior de un conjunto S es el mayor conjunto abierto contenido en S y que la adherencia de un conjunto S es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a S.
2. Sean S y T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, analizar la veracidad de las fórmulas $\overline{S \cap T} = \overline{S} \cap \overline{T}$ y $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$ (la barra denota la adherencia).
3. Sean S y T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, analizar la veracidad de las fórmulas $(S \cup T)^\circ = S^\circ \cup T^\circ$y $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$(el cerito denota interior)
4. Conjeturar y demostrar (o buscar en los libros) resultados acerca de si la unión y la intersección (finita o arbitraria) de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ es otro conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
5. Lo mismo pero con conjuntos cerrados.

2 Límite funcional, continuidad, continuidad uniforme en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

6. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Demostrar que para que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, es necesario y suficiente que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L, \forall (x_n) \subset A - \{a\}$tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$
7. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Demostrar que si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces f es acotada en un entorno de a, esto es, existen $M > 0, \delta > 0$ tales que $0 < |x - a| < \delta, x \in A \implies |f(x)| < M$.
8. Sea $A \subset \mathbb{R}$ abierto. Mostrar que para que $f : A \to \mathbb{R}$ sea continua, es necesario y suficiente que $f^{-1}(B)$ sea abierto, cualquiera sea $B \subset \mathbb{R}, B$ abierto.
9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Mostrar que el conjunto $Z_f = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$ es cerrado. Concluir que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces $C = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)\}$ es cerrado
10. Demostrar que una función $f : A \to \mathbb{R}$, definida en un abierto A es continua si y solo si para todo $c \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\{x \in A, f(x) < c\}$ y $\{x \in A, f(x) > c\}$ son abiertos
11. Demostrar que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es discontinua en un punto $a \in X$ si y solo si existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(x_n) \subset X$ tales que $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
12. Armar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva que sea discontinua solo en dos valores de $\mathbb{R}$. Armar otra (también biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) que sea discontinua solo en el conjunto $\mathbb{Z}$ (números enteros). ¿Será posible armar una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de manera tal que sea discontinua solamente sobre $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$? ¿Y de modo que sea discontinua sobre $\mathbb{R}$?
13. Sean $F \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y $f : F \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que existe una función continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi|F = f$

14. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A,B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $X,Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Decidir en cada caso si corresponde $\subset, \supset$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A\cup B) & \ldots\ldots & f(A)\cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X\cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A\cap B) & \ldots\ldots & f(A)\cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X\cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(\mathbb{R}^n - A) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^m - f(A) \\
(vi) & f^{-1}(\mathbb{R}^m - X) & \ldots\ldots & \mathbb{R}^n - f^{-1}(X)
\end{array}$$

En cada caso, dar hipótesis sobre f para que valga la igualdad.

15. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^m$. Probar que f es continua si y sólo si para todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un cerrado $W_F \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(F) = W_F \cap S$.

16. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}^n$ son la misma función.

17. Rehacer los ítems *a)* y *b)* del ejercicio 17 de la práctica 2 con nuevos argumentos (¡y mucho menos trabajo!)

18. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ se dice *lipschitziana* cuando existe $k > 0$ (constante de Lipschitz) tal que para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que $||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$.

    (a) Demostrar que toda función lipschitziana es uniformemente continua

    (b) Demostrar que toda transformación lineal $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lipschitziana

    (c) (optativo) Demostrar que toda transformación bilineal $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es lipschitziana en cada parte acotada de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$. Concluya que toda aplicación bilineal es continua. (Ejemplos de aplicaciones bilineales son la multiplicación de un número por un vector, $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \varphi(\alpha, x) = \alpha.x$, el producto interno $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \varphi(x,y) = \sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i y_i$, etc)

19. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \| x \|$.

    (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \| x \|^2$.

    (c) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$ con $r = 0$ y con $r > 0$.

    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x,y) = x^2 + 3y$.

20. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f : S \to \mathbb{R}^m$ y $g : f(S) \to \mathbb{R}^k$ funciones uniformemente continuas. Demostrar que $g \circ f : S \to \mathbb{R}^k$ es uniformemente continua.

21. ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces lo es en $A \cup B$?

22. Sean p y q puntos de $\mathbb{R}^3$, y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \| x - p \| - \| x - q \|$. ¿Es f continua? ¿Es acotada? ¿Es uniformemente continua? ¿Existe $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)$?

23. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\cos x, \sin x)$.

24. Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont.* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

25. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función uniformemente continua. Demostrar que si $(x_k) \subset A$ es una sucesión de Cauchy, entonces $(f(x_k))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^m$. Mostrar con un ejemplo que si la función es continua pero no uniformemente continua, el resultado no vale.

26. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función uniformemente continua. Demostrar que para todo $a \in A'$ existe el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Mostrar con un ejemplo que si la función es continua pero no uniformemente continua, el resultado no vale.

3 Conexión, conexión por arcos

27. Un conjunto $S \subset R^n$ se llama <u>*conexo*</u> si cada vez que se tienen dos conjuntos abiertos $G, H \subset R^n$ tales que

    - $S = (S \cap G) \cup (S \cap H)$
    - $S \cap G \cap H = \emptyset$

    Vale que $S \subset G$ *o* $S \subset H$.

    (a) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es conexo. ¿Qué ocurre con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$? ¿Y con $\mathbb{Q}^2$? Si le gusta pensar en esto puede ver que pasa con $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$... [Respuesta: es conexo, pero no lo consulte, va a hacer enojar a los docentes]

    (b) Demostrar que el intervalo $[0,1]$ es conexo.

    (c) ¿Es $\mathbb{R}$ conexo?

    (d) Demostrar que un conjunto abierto y conexo $S \subset \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea poligonal totalmente contenida en S.

    [Dado $p \in S$ arbitrario considere los conjuntos $G := \{x \in S$ / se unen a p con una poligonal contenida en $S\}$ y $H := S - G$.]

28. Sean A y B conjuntos conexos de $\mathbb{R}^2$. ¿ Es $A \cap B$ necesariamente conexo? ¿Es $A \cup B$ necesariamente conexo?

29. Usando la función continua $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ y el ejercicio 27. c., demostrar que el intervalo $(-1,1)$ es conexo. Deducir que cualquier intervalo de la forma (a,b) es conexo.

30. Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, entonces el segmento que une v con w es el conjunto $\overline{vw} = \{v + t(w-v) : t \in [0,1]\}$ (si no lo ve, haga un dibujo para convencerse).

    (a) Demostrar que $\overline{vw}$ es un conjunto conexo.

    (b) Sea ahora u otro punto en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que la poligonal $\Pi := \overline{vw} \cup \overline{wu}$ es un conjunto conexo. Convencerse de que cualquier poligonal en $\mathbb{R}^2$ es siempre un conjunto conexo.

    (c) Sea $S = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$. Demostrar que dos puntos cualesquiera de S pueden unirse por una poligonal totalmente contenida en S (además formada por segmentos "horizontales" y "verticales"). Deducir que $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ es conexo (ahora sí puede consultarlo si no le sale).

4 Una vuelta a la completitud

En el ejercicio 21 de la práctica 1 definíamos a $\mathbb{R}$ como el único cuerpo ordenado K que (con la noción de distancia dada por $|x-y|$) satisface además, alguna de las afirmaciones equivalentes:

1. (a) Toda sucesión acotada de elementos de K tiene una subsucesión convergente en K

   (b) El orden de K es arquimediano y toda sucesión fundamental (o de Cauchy) de elementos de K es convergente en K

   (c) El orden de K es arquimediano y si (I_n) es un encaje de intervalos cerrados de K cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

   (d) Todo subconjunto de K acotado superiormente y no vacío tiene supremo en K.

   (e) Toda sucesión monótona y acotada de elementos de K tiene límite en K.

   (f) Toda cortadura de elementos de K tiene un único elemento de separación perteneciente a K.

31. Demostrar que los enunciados siguientes pueden añadirse a la lista de equivalencias:

    g. Todo conjunto infinito acotado tiene un punto de acumulación en K.

    h. K es conexo.

    i. Toda función continua definida en K tal que tome valores mayores y menores que cero en un intervalo cerrado se anula en algún valor de ese intervalo.

    j. K es arquimediano y todo desarrollo decimal finito o infinito es un número perteneciente a K.