<u>Práctica 5</u>

Funciones de Variación Acotada

1. Sea f creciente en $[a,b]$ y $D = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Se define la función de salto de f:

$$j_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a \\ f(a^+) - f(a) + \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}/x_k < x} (f(x_k^+) - f(x_k^-)) + f(x) - f(x^-) & \text{si } a < x \leq b \end{cases}$$

Probar que:

i) j_f es creciente.

ii) $j_f(y) - j_f(x) \leq f(y) - f(x)$, si $a \leq x < y < b$.

iii) $j_f(x^+) - j_f(x) = f(x^+) - f(x)$; $j_f(x^-) - j_f(x) = f(x^-) - f(x)$.

iv) $f(x) = j_f(x) + g(x)$, donde g es creciente y continua en $[a,b]$.

2. Sea f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que existe M con $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$

   Probar que f es de variación acotada en $[a,b]$.

3. Dar un ejemplo de una función continua pero no de variación acotada.

4. Sean f y g de variación acotada en $[a,b]$ Probar que $f+g$ y $f.g$ también lo son.

5. Sea f de variación acotada en $[a,b]$ tal que $|f(x) \geq m > 0$, $\forall x \in [a,b]$.

   Probar que $\dfrac{1}{f}$ es de variación acotada en $[a,b]$.

6. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_a^b f$.

   a) $f(x) = \cos x$ en $[0, 3\pi]$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\dfrac{\pi}{x})^2 & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$

En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f.

7. Para las funciones que siguen, hallar la función $V_a^x f$ y encontrar funciones monótonas crecientes g_1, g_2 tales que $f = g_1 - g_2$:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & , -1 \leq x < 0 \\ x & , 0 \leq x < 1 \\ 1-x & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$.

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y continua en el punto $x_0 \in [a, b]$.

a) Demostrar que $V_a^{x_0} f = \sup\limits_{x < x_0} V_a^x f = \inf\limits_{x > x_0} V_a^x f$.

b) Deducir de a) que la función $V_a^x f$ es continua en x_0 .

9. Demostrar a partir del ejercicio anterior, y de la descomposición $f(x) = V_a^x f - (V_a^x f - f(x))$, que toda función continua de variación acotada se descompone como resta de dos funciones continuas estrictamente crecientes.