Complementos de Análisis II - Matemáticos
Primer Cuatrimestre de 2004

Un ejemplo de una función definida en $\mathbb{R}$ discontinua en $\mathbb{Q}$ y continua en $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
Definimos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ asignando $f(x)=0$ si x es irracional, $f(0)=1$ y $f(\frac{p}{q})=\frac{1}{q}$ para $\frac{p}{q}$ fracción irreducible, no nula, con $q>0$.Veremos que esta f satisface para todo valor $a\in\mathbb{R}$, que $\lim_{x\to a} f(x)=0$.
Si consideramos $f_1=f|\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ y $f_2=f|\mathbb{Q}$, tendremos que para todo $a\in\mathbb{R}$ $\lim_{x\to a} f_1(x)=0$ (pues $f_1\equiv 0$). Veamos ahora que para todo $a\in\mathbb{R}$ $\lim_{x\to a} f_2(x)=0$. Sugiero intentar graficar esta función, considerando primero los racionales cuyo denominador es 1 (o sea, los enteros), después aquellos cuyo denominador es 2, etc.
Queremos probar que dados $a\in\mathbb{R}$ y $\varepsilon>0$ es posible hallar $\delta>0$ tal que $0<|\frac{p}{q}-a|<\delta \implies \frac{1}{q}<\varepsilon$. Pero el conjunto F de los $q\in\mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{q}\geq\varepsilon$ es un conjunto finito, vamos a usar este hecho para encontrar un δ adecuado. Para cada $q\in F$, fijo, consideremos los números $\frac{m}{q}, m\in\mathbb{Z}$, a distancia $\frac{1}{q}$ cada uno del otro. Sea $m_q\in\mathbb{Z}$ el mayor entero tal que $\dfrac{m_q}{q}<a$. Para cada uno de los finitos elementos q de F consideramos $\dfrac{m_q}{q}$, nos quedamos con el mayor, $\frac{m}{q'}$. Entonces $\frac{m}{q'}$ es el mayor racional que tiene denominador en F y es menor que a.Análogamente, existe $\frac{n}{q''}$, la menor fracción con denominador en F tal que $a<\frac{n}{q''}$. Con la posible excepción de a, ningún racional del intervalo $(\frac{m}{q'},\frac{n}{q''})$ tiene su denominador en F.Luego tomando $\delta=\min\{a-\frac{m}{q'},\frac{n}{q''}-a\}$,se tiene que $0<|\frac{p}{q}-a|<\delta \implies q\notin F \implies \frac{1}{q}<\varepsilon$, como queríamos probar.

Tenemos entonces que f satisface para todo valor $a\in\mathbb{R}$, que $\lim_{x\to a} f(x)=0$, con lo cual es continua en todo irracional y discontinua en todo racional.

(Ejercicio optativo con pistas) No es posible hallar una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $\mathbb{Q}$ y discontinua en $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.
Para probar esto necesitamos aceptar temporalmente el siguiente enunciado "El conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ no puede expresarse como una unión numerable de conjuntos cerrados. Análogamente, $\mathbb{Q}$ no es intersección de una familia numerable de abiertos".

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función arbitraria. Para cada $n\in\mathbb{N}$ consideramos el conjunto C_n, formado por los elementos $a\in\mathbb{R}$ que tienen la siguiente propiedad: existe un intervalo abierto I, con $a\in I$, tal que $x,y\in I \implies |f(x)-f(y)|<\frac{1}{n}$.Probar que

1. Cada C_n es un conjunto abierto
2. f es continua en $x=a$ si y solo si $a\in C_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Concluir que el conjunto de los puntos de continuidad de cualquier función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una intersección numerable de abiertos. Deducir, usando el enunciado de más arriba, que no existe una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en los racionales y discontinua en los irracionales. El enunciado se probará más adelante.