Taller de Cálculo Avanzado

Verano — 2016

Parcial

Apellido y nombre: ....

---

1. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales y sea $l \in \mathbb{R}$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión que tiende a l, entonces $(a_n)_{n\geq 1}$ tiende a l.

(b) Si toda subsucesión de $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene una sub-subsucesión que converge a l entonces $(a_n)_{n\geq 1}$ tiende a l.

2. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones acotadas de números reales. Demuestre las desigualdades

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Probar que $f(K)$ es compacto.

4. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos, y sea $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

(a) Probar que si A es abierto entonces $A + B$ es abierto.

(b) Encontrar un ejemplo de A y B cerrados tales que $A + B$ no sea cerrado.

(c) Probar que si A es cerrado y B es compacto entonces $A + B$ es cerrado.

5. Sean $I, J \subset \mathbb{N}$ conjuntos infinitos tales que $I \cup J = \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ notamos i_k al k-ésimo elemento de I, y j_k al k-ésimo elemento de J. Sea ahora $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales y sea $l \in \mathbb{R}$. Probar que $a_n \to l$ si y solo si las subsucesiones $a_{i_k} \to l$ y $a_{j_k} \to l$.

6. Sean $f_n, g_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ las funciones

$$f_n = \frac{1}{nx + 1} \qquad\qquad g_n = \frac{x^n}{nx^n + 1}.$$

Probar que las sucesiones de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ convergen puntualmente a la función constantemente 0, pero solo una converge uniformemente.

7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada

(a) $V_f = 0$ si y solo si es constante.

(b) Si V_f es Lipschitz entonces f es Lipschitz.

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f d\alpha = f(c)\,(\alpha(b) - \alpha(a))$.

9. Sea a_n una sucesión acotada de números reales y sea $\rho = 1/\limsup \sqrt[n]{a_n}$. Sea $t \in \mathbb{R}$. Probar que $S_n = \sum_{i=1}^n a_n t^n$ converge absolutamente si $|t| < \rho$ y diverge si $|t| > \rho$. Muestre con ejemplos que S_n puede converger o diverger si $t = \pm\rho$.

10. Sea $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función

$$\alpha(t) = \begin{cases} -3 & \text{si } t < 0; \\ 0 & \text{si } t = 0; \\ 2 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Probar que para toda función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua en 0 se tiene $\int_{-1}^1 f d\alpha = f(0)$, y dar un ejemplo de una función no integrable respecto de α.