Complementos de Análisis II - Matemáticos
Práctica 4- Primer Cuatrimestre de 2004

Cubrimientos, compacidad

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $\Im_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Demostrar que $(0,1) = \bigcup_{n \geq 2} \Im_n$. ¿Existe un conjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} \Im_n$? Justificar.

2. Demostrar que el disco unidad abierto $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ puede expresarse como la unión de una familia de cuadrados cerrados.

3. Sea $U_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \parallel (x,y) - (0,n) \parallel < n\}$. Demostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que S es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

5. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia entre p y S de la forma siguiente:
$$d(p,S) = \inf\{\parallel p - x \parallel / x \in S\}.$$
   (a) Hallar todos los $p \in \mathbb{R}^n$ tales que $d(p,S) = 0$.
   (b) Demostrar que si S es cerrado la distancia entre un punto p y el conjunto S se realiza, es decir, existe $q \in S$ tal que $d(p,S) = \parallel p - q \parallel$.
   (c) Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ y sea $G = \{v \in \mathbb{R}^n / d(v,S) < \varepsilon\}$. Demostrar que G es abierto.

   Sea $T \subset \mathbb{R}^n$ otro conjunto, se define $d(S,T) = \inf\{\parallel x - y \parallel \ / \ x \in S,\ y \in T\}$ (la distancia entre S y T).

   (d) ¿Es cierto que $d(S,T) = \inf\{d(p,T) \ / \ p \in S\}$?
   (e) Mostrar que no siempre existen $p \in S$ y $q \in T$ tales que $d(S,T) = \parallel p - q \parallel$(cf. parte (a)).
   (f) ¿Qué ocurre con la pregunta anterior si S y T son cerrados? ¿Y si los dos son compactos? ¿Y si uno es compacto y el otro cerrado no acotado?

6. Sean K compacto y F cerrado no vacíos. Mostrar que existen $x_0 \in K, y_0 \in F$ tales que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x \in K$, $y \in F$. Dar ejemplos de dos conjuntos cerrados y disjuntos F, G tales que $\inf\{|x - y|; x \in F, y \in G\} = 0$.

7. Dar (o buscar) una demostración diferente de la teórica del enunciado "Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si X es compacto entonces $f(X)$ es compacto". Deducir que una función continua definida en un intervalo real cerrado y acotado alcanza su máximo y su mínimo.

8. Dar (o buscar) una demostración diferente de la teórica del enunciado " Sea $f : K \to \mathbb{R}^m, K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, f continua. Entonces f es uniformemente continua"

9. Añadir a la lista de la sección 4 de la práctica 3 el enunciado "Todo cubrimiento por abiertos de un subconjunto cerrado y acotado de K tiene un subcubrimiento finito" y demostrar la equivalencia con los otros enunciados (Obs: es difícil, si no le sale puede dejarlo para otro cuatrimestre, pero recuerde al menos que es equivalente a los otros enunciados)

10. Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, para un cierto $b \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es uniformemente continua.