Taller de Cálculo Avanzado
Primer Cuatrimestre — 2013

Práctica 5: Integrales

1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ definimos

$$\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

Probar que si $\pi_1 \subset \pi_2$ son dos particiones de $[a,b]$ entonces $\pi_1(f) \le \pi_2(f)$.

2. Determine si las funciones siguientes son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ correspondiente. En caso afirmativo, dar una mayoración para $V_f(a,b)$.

(a) $f(x) = \cos(x)$, con $x \in [0, 3\pi]$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, con $x \in [-1, 2]$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Estudie, además, la derivabilidad de la cuarta función.

3. Sean f y g funciones de variación acotada en $[a,b]$. Probar que fg también lo es.

4. Para las funciones de variación acotada siguientes, encuentre la función V_f; recordemos que $V_f(a) = 0$ y $V_f(x) = V_f(a,x)$ si $a < x \le b$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } -1 \le x < 0; \\ x, & \text{si } 0 \le x < 1; \\ 1-x, & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

(b) $f(x) = \sin x$, con $x \in [0, 2\pi]$

Para cada una de estas funciones encuentre explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

5. Analice en cada caso la existencia de la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ y calcúlela cuando corresponda.

(a) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a,b]$.

(b) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a) = a_0$, $\alpha(b) = b_0$; $c \in (a,b)$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a,c); \\ 3 & \text{si } x = c; \\ -1 & \text{si } x \in (c,b]. \end{cases}$$

¿Qué sucede si α es continua sólo en un entorno de c?

(c) f como en el ítem anterior y

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c]; \\ -1 & \text{si } x \in (c,b]. \end{cases}$$

(d) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a,b] = [-1,3]$.

(e) $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$ y $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

†**6.** Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que f es continua e integrable respecto de α en $[a,b]$. Sea c en (a,b), y sea $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\beta(x) = \alpha(x)$ para todo $x \neq c$. Muestre que f es integrable respecto de β en $[a,b]$, y que $\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f \, d\beta$. ¿Qué sucede si $c = a$ o $c = b$?.

7. Consideremos las funciones siguientes definidas en el intervalo $[0,2]$:

$$f(x) = |x-1|, \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0; \\ e^x & \text{si } x \in (0,2]. \end{cases}$$

Muestre que $f \in \Re(\alpha)$ en $[0,2]$ y calcule $\int\limits_0^2 f \, d\alpha$.

8. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,c]$ y $f \in \Re(\alpha)$ en $[c,b]$. Muestre que $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,b]$ y $\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha$.

†**9.** Si $\int_a^b f \, d\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f, ¿qué se puede decir sobre la función α?

Sugerencia. Para cada $c \in [a,b]$ considere la función monótona f_c tal que $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ en caso contrario.

10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Probar que si f es de variación acotada entonces es integrable en el sentido Riemann.

†**11.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a,b]$. Probar que f es de variación acotada y $V_f(a,b) = \int_a^b |f'(x)| \, dx$.

12. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente.

(*a*) Probar que existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f \, d\alpha = f(c) \, (\alpha(b) - \alpha(a))$.

(*b*) Supongamos que α es derivable en (a,b) (pero no necesariamente de clase C^1). Probar que la función

$$\psi(x) = \int_a^x f \, d\alpha$$

es derivable en (a,b), y $\psi'(x) = f(x)\alpha'(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

13. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, con f continua y α de variación acotada. Probar las siguientes afirmaciones.

(*a*) $|\int_a^b f \, d\alpha| \leq V_\alpha(a,b) \, \text{máx}_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

(*b*) La función $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = \int_a^x f \, d\alpha$ es de variación acotada.

(*c*) Si α satisface una condición de Lipschitz en $[a,b]$, entonces la función ψ definida en el punto anterior también satisface una condición de Lipschitz en $[a,b]$.